BIBLIOGRAPHIE

1. Fubini G. — *Fondamenti di geometria proiettivo-differenziale*. Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. T. 43, 1919, p. 1—46.
2. Terracini A. — *Osservazioni sulla geometria proiettiva differenziale delle congruenze di rette*. Atti Istituto Veneto di Scienze, etc. T. XCIV, 1934—1935, p. 75—86.
3. Fubini G.-Cech E. — *Geometria proiettiva differenziale*. N. Zanichelli, Bologna 1927.
4. Bortolotti E. — *Sulle proprietà proiettive delle deformazioni infinitesime*, etc. R. Palermo, T. LIV, 1930, p. 97—141.
5. Marcus F. — *Cîteva contribuţii la proprietăţile proiective ale deformărilor infinit mici ale unei suprafeţe în ea însăşi*. Studii şi cercetări ştiinţifice. Matematică. Anul XII, 1961, p. 71—94. Acad. R. S. România, filiala Iaşi.
6. Marcus F. — *Sopra gli scorrimenti proiettivi*. Annali di mat. pura ed applicata, S. IV, T. LVII, 1962, p. 223—232. Bologna.
7. Marcus F. — *Une nouvelle caracterisation des réseaux et surfaces* & etc. Czechoslovak Mathematical Journal, T. 7 (82), 1957, Praga, p. 308—313.

CONGRUENŢE DE DREPTE CU GRUP CONTINUU DE DEFORMĂRI SAU COLINIAŢII PROIECTIVE ÎN ELE ÎNSELE

Rezumat

Se stabileşte noţiunea de congruenţă de drepte care admite un grup continuu de deformări sau coliniaţii proiective şi se studiază în particular cazul congruenţelor determinate de traiectoriile grupului sau de conjugatele lor. Se arată că o congruenţă poate admite cel mult un grup G_2 de deformări proiective în ea însăşi, determinîndu-se toate aceste congruenţe.

PROBLEMA LUI SAINT-VENANT PENTRU BARE NEOMOGENE

DE

A. RADU

1. *Introducere*. În teoria elasticităţii, problema lui Saint-Venant este problema mixtă a întinderii, încovoierii, torsiunii şi încovoierii de către cupluri a barelor cilindrice, în ipoteza lui Clebsch. Firesc, se pot considera grupe care cuprind una, două sau trei dintre problemele simple enumerate mai sus.

În teoria liniară a elasticităţii, tensiunile care apar în problema generală a lui Saint-Venant pot fi obţinute prin însumarea tensiunilor găsite pentru fiecare dintre cele patru probleme simple. De multe ori este mai convenabil să se rezolve fiecare dintre problemele de mai sus separat.

L. M. Milne-Thomson [1], [2] şi L. Solomon [6], [7] rezolvă problema mixtă a lui Saint-Venant în cazul unui mediu izotrop omogen, atît pentru domenii simplu conexe, cît şi pentru domenii multiplu conexe, utilizînd metoda funcţiilor analitice de o variabilă complexă.

Într-o Notă anterioară [5], ne-am ocupat de problema torsiunii şi încovoierii unei bare cilindrice cu profil simplu conex, în ipoteza că materialul elastic izotrop din care este formată bara, are modulul lui Young E variabil continuu într-o secţiune transversală, iar coeficientul lui Poisson ν constant în toată bara.

Obiectul acestei lucrări este studiul problemei generale a lui Saint-Venant pentru o bară cilindrică cu baza un domeniu multiplu conex Ω, în cazul cînd materialul elastic izotrop al barei posedă neomogenitate continuă transversală. Presupunem că modulul lui Young E nu variază în lungul barei şi că pe bază este de clasă $C^1(\Omega)$, iar coeficientul lui Poisson ν este constant în toată bara. Pentru rezolvarea problemei propuse ne vom folosi de metoda funcţiilor analitice generalizate (în sens Vekua) de o variabilă complexă.

2. *Punerea problemei*. Considerăm o bară cilindrică de lungime finită l, fixată la unul din capete — baza, care este în echilibru sub

acţiunea unui sistem de forţe aplicate la capătul liber. Presupunem că forţele de masă sînt nule, pe suprafaţa laterală nu acţionează forţe exterioare şi că forţele aplicate pe bază fac echilibru celor aplicate pe capătul liber.

Alegem un sistem de coordonate carteziene ortogonale astfel încît planul $x_1 O x_2$ să conţină capătul liber, iar axa Ox_3 să fie paralelă la generatoarele suprafeţei laterale şi îndreptată spre bază.

Sarcinile aplicate pe capătul liber sînt static echivalente cu o forţă $\mathbf{R}(R_1, R_2, R_3)$ aplicată în punctul O şi un cuplu al cărui moment este $\mathbf{M}(M_1, M_2, M_3)$.

Dacă momentul rezultant este nul, avem problema întinderii sau încovoierii, după cum rezultanta este perpendiculară pe capătul liber sau este conţinută în planul acestuia. Cînd rezultanta este nulă şi momentul rezultant este perpendicular pe capătul liber, avem problema torsiunii iar cînd rezultanta este nulă şi momentul rezultant este conţinut în planul capătului liber, avem cazul încovoierii de către un cuplu (încovoiere pură).

Baza o presupunem un domeniu multiplu conex Ω, a cărui frontieră Γ este formată dintr-un număr finit de curbe $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ simple închise, rectificabile şi fără puncte comune, Γ_0 fiind conturul exterior iar $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ contururile interioare. Unghiul pe care-l face tangenta la curba Γ_j (pentru $j = 0, 1, \ldots, m$) cu axa Ox_1, satisface o condiţie Hölder.

Vom nota prin u_i, ε_{ij}, σ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ respectiv componentele de plasării, deformării şi tensiunii.

Presupunem, ca şi în cazul omogen, că are loc condiţia lui Clebsch

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{22} = 0 \tag{2.1}$$

în toată bara.

În virtutea acestei ipoteze, ecuaţiile de echilibru elastic devin

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0. \tag{2.2}$$

Rezultă că σ_{31} şi σ_{23} sînt independente de x_3, iar σ_{33} depinde liniar de x_3. Notăm cu $\overset{0}{\sigma}_{33}$ valoarea lui σ_{33} pentru $x_3 = 0$, deci pe capătul liber.

Condiţiile pe capătul liber conduc la ecuaţiile:

$$\int_\Omega \sigma_{31}\, d\omega = R_1, \quad \int_\Omega \sigma_{23}\, d\omega = R_2, \tag{2.3}$$

$$\int_\Omega (x_1 \sigma_{23} - x_2 \sigma_{31})\, d\omega = M_3, \tag{2.4}$$

$$\int_\Omega \overset{0}{\sigma}_{33}\, d\omega = R_3, \tag{2.5}$$

$$\int_\Omega x_2 \overset{0}{\sigma}_{33}\, d\omega = M_1, \quad \int_\Omega x_1 \overset{0}{\sigma}_{33}\, d\omega = -M_2. \tag{2.6}$$

Considerăm porţiunea din bară cuprinsă între capătul liber $x_3 = 0$ şi o secţiune transversală arbitrară $x_3 = h$ $(h \leqslant l)$ şi notăm cu σ'_{33} valoarea lui σ_{33} pentru $x_3 = h$. Fie O' punctul în care axa Ox_3 intersectează planul $x_3 = h$ şi $O'x'_1$, $O'x'_2$ axele paralele şi de acelaşi sens cu Ox_1, Ox_2.

Porţiunea de bară cuprinsă între planele $x_3 = 0$ şi $x_3 = h$ fiind în echilibru, avem

$$\int_\Omega \sigma'_{33}\, d\omega = R_3, \tag{2.7}$$

$$\int_\Omega x_2 \sigma'_{33}\, d\omega = M_1 + hR_2, \quad \int_\Omega x_1 \sigma'_{33}\, d\omega = -M_2 + hR_1 \tag{2.8}$$

pentru orice h, $0 \leqslant h \leqslant l$.

Pe suprafaţa laterală avem

$$n_1 \sigma_{31} + n_2 \sigma_{23} = 0, \tag{2.9}$$

unde (n_1, n_2) sînt cosinusurile directoare ale normalei exterioare la conturul Γ.

Mai amintim unele noţiuni utile în continuare.

Punctul capătului liber de coordonate

$$x_1^* = \frac{1}{S}\int_\Omega E x_1\, d\omega, \quad x_2^* = \frac{1}{S}\int_\Omega E x_2\, d\omega, \tag{2.10}$$

unde

$$S = \int_\Omega E\, d\omega, \tag{2.11}$$

se numeşte centru de greutate redus al domeniului respectiv.

Integralele

$$\bar{I}_{11} = \int_\Omega E x_2^2\, d\omega, \quad \bar{I}_{22} = \int_\Omega E x_1^2\, d\omega, \quad \bar{I}_{12} = \int_\Omega E x_1 x_2\, d\omega, \tag{2.12}$$

se numesc momente de inerţie reduse ale domeniului Ω în raport cu axele Ox_1, Ox_2 şi moment centrifugal redus al aceluiaşi domeniu.

3. *Tensiunea normală* σ_{33}. În baza ipotezei (2.1) a lui Clebsch, legea generalizată a lui Hooke se reduce la ecuațiile

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -\nu \frac{\sigma_{33}}{E}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E}, \tag{3.1}$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{23}, \quad \varepsilon_{31} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{31}, \quad \varepsilon_{12} = 0, \tag{3.2}$$

cu

$$\nu = \text{const.}, \quad E = E(x_1, x_2), \quad E \in C^1(\overline{\Omega}).$$

Avînd în vedere relațiile (3.1), (3.2) și replica elastică a materialului, condițiile de compatibilitate ale lui Saint-Venant dau

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\sigma_{33}}{E}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\sigma_{33}}{E}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{\sigma_{33}}{E}\right) = 0, \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left[\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\sigma_{23}}{E}\right) - \dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{\sigma_{31}}{E}\right)\right] = \dfrac{\nu}{1+\nu}\dfrac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}\left(\dfrac{\sigma_{33}}{E}\right), \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial x_2}\left[\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\sigma_{23}}{E}\right) - \dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{\sigma_{31}}{E}\right)\right] = -\dfrac{\nu}{1+\nu}\dfrac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_1}\left(\dfrac{\sigma_{33}}{E}\right). \end{cases} \tag{3.4}$$

Deoarece σ_{33} depinde liniar de x_3, din ecuațiile (3.3) rezultă

$$\sigma_{33} = E[(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3) x_3 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3], \tag{3.5}$$

unde α_i și β_i $(i = 1,2,3)$ sînt constante care urmează să fie determinate.

Mai întîi, ecuațiile (2.5), (2.7) împreună cu (3.5) dau

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1^* + \alpha_2 x_2^* + \alpha_3 = 0, \\ \beta_1 x_1^* + \beta_2 x_2^* + \beta_3 = \dfrac{R_3}{S}, \end{cases} \tag{3.6}$$

unde x_1^*, x_2^*, S au expresiile (2.10), (2.11).

Din sistemul de ecuații (3.6) obținem

$$\begin{cases} \alpha_3 = -\alpha_1 x_1^* - \alpha_2 x_2^*, \\ \beta_3 = -\beta_1 x_1^* - \beta_2 x_2^* + \dfrac{R_3}{S}, \end{cases} \tag{3.7}$$

cu ajutorul cărora obținem pentru σ_{33} expresia:

$$\sigma_{33} = E\left\{[\alpha_1(x_1 - x_1^*) + \alpha_2(x_2 - x_2^*)]x_3 + \beta_1(x_1 - x_1^*) + \beta_2(x_2 - x_2^*) + \frac{R_3}{S}\right\}. \tag{3.8}$$

Pentru determinarea constantelor α_1, α_2, β_1, β_2 folosim condițiile (2.6) și (2.8). Din (2.6) deducem

$$\begin{cases} \beta_1 \displaystyle\int_\Omega x_2(x_1 - x_1^*) E\, d\omega + \beta_2 \int_\Omega x_2(x_2 - x_2^*) E\, d\omega = M_1 - R_3 x_2^*, \\ \beta_1 \displaystyle\int_\Omega x_1(x_1 - x_1^*) E\, d\omega + \beta_2 \int_\Omega x_1(x_2 - x_2^*) E\, d\omega = -M_2 - R_3 x_1^*, \end{cases} \tag{3.9}$$

iar din (2.8)

$$\begin{cases} \alpha_1 \displaystyle\int_\Omega x_2(x_1 - x_1^*) E\, d\omega + \alpha_2 \int_\Omega x_2(x_2 - x_2^*) E\, d\omega = R_2, \\ \alpha_1 \displaystyle\int_\Omega x_1(x_1 - x_1^*) E\, d\omega + \alpha_2 \int_\Omega x_1(x_2 - x_2^*) E\, d\omega = R_1. \end{cases} \tag{3.10}$$

Făcînd notațiile

$$I_{11}^* = \int_\Omega (x_2 - x_2^*)^2 E\, d\omega, \quad I_{22}^* = \int_\Omega (x_1 - x_1^*)^2 E\, d\omega,$$
$$I_{12}^* = \int_\Omega (x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*) E\, d\omega, \tag{3.11}$$

obținem următoarele valori pentru α_1, α_2, β_1, β_2 din sistemele (3.10) și (3.9):

$$\alpha_1 = \frac{I_{11}^* R_1 - I_{12}^* R_2}{I_{11}^* I_{22}^* - I_{12}^{*2}}, \quad \alpha_2 = \frac{I_{22}^* R_2 - I_{12}^* R_1}{I_{11}^* I_{22}^* - I_{12}^{*2}}, \tag{3.12}$$

$$\begin{cases} \beta_1 = -\dfrac{I_{12}^* M_1 + I_{11}^* M_2}{I_{11}^* I_{22}^* - I_{12}^{*2}} - \dfrac{I_{11}^* x_1^* - I_{12}^* x_2^*}{I_{11}^* I_{22}^* - I_{12}^{*2}} R_3, \\[2ex] \beta_2 = \dfrac{I_{22}^* M_1 + I_{12}^* M_2}{I_{11}^* I_{22}^* - I_{12}^{*2}} + \dfrac{I_{12}^* x_1^* - I_{22}^* x_2^*}{I_{11}^* I_{22}^* - I_{12}^{*2}} R_3, \end{cases} \tag{3.13}$$

Astfel σ_{33} este complet determinată.

Observația 1. Putem alege originea O în centrul de greutate redus al capătului liber și atunci $x_1^* = x_2^* = 0$, ceea ce simplifică calculele. De asemenea putem presupune că axele Ox_1, Ox_2 sînt axe centrale de inerție, deci trebuie să avem și $I_{12}^* = 0$. În cazul acesta

$$\alpha_1 = \frac{R_1}{I_{22}^*}, \quad \alpha_2 = \frac{R_2}{I_{11}^*}, \quad \beta_1 = -\frac{M_2}{I_{22}^*}, \quad \beta_2 = \frac{M_1}{I_{11}^*}. \tag{3.14}$$

În particular, pentru întindere și încovoiere pură, obținem rezultatele lui J. Nowinski și S. Turski [4].

Observația 2. Introducînd constantele complexe

$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \quad \beta = \beta_1 + i\beta_2, \quad z^* = x_1^* + ix_2^*, \tag{3.15}$$

expresia lui σ_{33} capătă forma

$$\sigma_{33} = \frac{1}{2} E \Big\{ [\alpha(\bar{z} - \bar{z}^*) + \bar{\alpha}(z - z^*)] x_3 + \beta(\bar{z} - \bar{z}^*) + \\ + \bar{\beta}(z - z^*) + 2\frac{R_3}{S} \Big\}. \tag{3.16}$$

4. *Tensiunile tangențiale* σ_{23} *și* σ_{31}. Înlocuind expresia lui σ_{33} din (3.8) în ecuațiile (3.4), după unele operații evidente obținem

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\sigma_{23}}{E}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\sigma_{31}}{E}\right) = \frac{\nu}{1+\nu}(\alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2 + \alpha_0), \tag{4.1}$$

unde α_0 e o constantă de integrare care va fi precizată ulterior.

Scriind ecuația (4.1) sub forma

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\sigma_{23}}{E} - \frac{\nu}{2(1+\nu)}(\alpha_2 x_1 + \alpha_0) x_1\right] = \\ = \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\sigma_{31}}{E} - \frac{\nu}{2(1+\nu)}(\alpha_1 x_2 - \alpha_0) x_2\right], \tag{4.2}$$

deducem că există o funcție de tensiune $F(x_1, x_2)$ astfel încît să avem

$$\begin{cases} \sigma_{23} = \dfrac{\nu E}{2(1+\nu)}\left[\dfrac{\partial F}{\partial x_2} + (\alpha_2 x_1 + \alpha_0) x_1\right], \\ \sigma_{31} = \dfrac{\nu E}{2(1+\nu)}\left[\dfrac{\partial F}{\partial x_1} + (\alpha_1 x_2 - \alpha_0) x_2\right], \end{cases} \tag{4.3}$$

funcția $F(x_1, x_2)$ este presupusă de clasă $C^2(\bar{\Omega})$.

Ținînd seama de expresia lui σ_{33} din (3.8), ecuațiile de echilibru se reduc la ecuația

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} = -E[\alpha_1(x_1 - x_1^*) + \alpha_2(x_2 - x_2^*)] \tag{4.4}$$

și introducînd aici valorile lui σ_{23} și σ_{31} din (4.3), obținem ecuația cu derivate parțiale pe care trebuie să o satisfacă funcția $F(x_1, x_2)$

$$\Delta F + \frac{\partial \ln E}{\partial x_1}\frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial \ln E}{\partial x_2}\frac{\partial F}{\partial x_2} = -(\alpha_1 x_2 - \alpha_0) x_2 \frac{\partial \ln E}{\partial x_1} - \\ - (\alpha_2 x_1 + \alpha_0) x_1 \frac{\partial \ln E}{\partial x_2} - \frac{2(1+\nu)}{\nu}[\alpha_1(x_1 - x_1^*) + \alpha_2(x_2 - x_2^*)], \tag{4.5}$$

unde Δ este operatorul lui Laplace pentru două dimensiuni.

Din (2.9) deducem următoarea condiție la limită pentru funcția $F(x_1, x_2)$

$$\frac{\partial F}{\partial n} = -(\alpha_1 x_2 - \alpha_0) x_2 n_1 - (\alpha_2 x_1 + \alpha_0) x_1 n_2, \text{ pe } \Gamma. \tag{4.6}$$

Am ajuns astfel la problema lui Neumann pentru ecuația (4.5), în cazul unui domeniu multiplu conex.

Constanta α_0 o determinăm din condiția (2.4) unde M_3 este cunoscut. Avem

$$\int_\Omega \left(x_1 \frac{\partial F}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial F}{\partial x_1}\right) E\, d\omega + \int_\Omega (\alpha_3 x_1^3 - \alpha_1 x_2^3) E\, d\omega + \\ + (\bar{I}_{11} + \bar{I}_{22}) \alpha_0 = \frac{1+\nu}{\nu} M_3, \tag{4.7}$$

de unde putem determina pe α_0 dacă F este cunoscut.

Observația 1. Condițiile (2.3) care nu au fost folosite pînă în prezent sînt satisfăcute identic. Într-adevăr, avem

$$\int_\Omega \sigma_{31}\, d\omega = \int_\Omega \left\{\sigma_{31} + x_1\left(\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2}\right) + E x_1 [\alpha_1(x_1 - x_1^*) + \alpha_2(x_2 - x_2^*)]\right\} dx_1\, dx_2 = \\ = \int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 \sigma_{31}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1 \sigma_{23})\right] dx_1\, dx_2 + \alpha_1 \int_\Omega x_1(x_1 - x_1^*) E\, d\omega + \\ + \alpha_2 \int_\Omega x_1(x_2 - x_2^*) E\, d\omega = \int_\Gamma x_1(\sigma_{31} n_1 + \sigma_{23} n_2)\, ds + R_1 = R_1,$$

unde am ținut seama și de relațiile (2.9), (4.4) și (3.10).

În mod analog se arată că este satisfăcută și a doua condiție (2.3).

Observația 2. Teorema lui R. Bredt asupra circulației tensiunii tangențiale se generalizează imediat pentru cazul neomogen:

Fie γ un contur simplu, închis și rectificabil, interior domeniului Ω și Ω_γ aria domeniului mărginit de curba γ. Se numește circulația tensiunii tangențiale următoarea integrală

$$J = 2(1+\nu)\int_\gamma \frac{1}{E} T_s\, ds, \tag{4.9}$$

unde

$$T_s\, ds = \sigma_{31}\, dx_1 + \sigma_{23}\, dx_2.$$

Din cele ce preced, rezultă

$$J = \nu \int_\gamma \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} + (\alpha_1 x_2 - \alpha_0)\, x_2\right) dx_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} + (\alpha_2 x_1 + \alpha_0)\, x_1\right) dx_2.$$

Presupunînd că funcția $F(x_1, x_2)$ este uniformă, obținem

$$J = 2\nu\, \Omega_\gamma (\alpha_2 x_{1G} - \alpha_1 x_{2G} + \alpha_0), \tag{4.10}$$

unde x_{1G}, x_{2G} sînt coordonatele centrului de greutate al domeniului mărginit de curba γ. Aceasta permite determinarea unor constante de integrare necunoscute.

5. *Existența soluției problemei la limită.* Studiul ecuației cu derivate parțiale de ordinul doi (4.5) este legat de teoria ecuațiilor cu derivate areolare inițiată de D. Pompeiu și dezvoltată de către N. Teodorescu, I. N. Vekua, L. Bers ș. a.

Pentru rezolvarea problemei la limită (4.5) cu (4.6) vom utiliza metoda lui I. N. Vekua [9], [10].

Aceeași metodă a fost aplicată la studiul mișcării plane, permanente și irotaționale a unui fluid compresibil de către N. Teodorescu [8].

În ipotezele făcute, coeficienții ecuației (4.5) sînt funcții continue.

Amintim că derivata areolară a unei funcții $f(z) \in C^1(\Omega)$, are expresia

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = f_{\bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + i\frac{\partial f}{\partial x_2}\right),$$

iar coderivata areolară sau derivata medie

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} - i\frac{\partial f}{\partial x_2}\right).$$

În raport cu operația de derivare areolară, funcțiile olomorfe în sens clasic joacă rolul de constante.

Introducînd tensiunea complexă

$$w^*(z) = \sigma_{23} + i\,\sigma_{31}, \tag{5.1}$$

ecuația (4.5) capătă forma

$$\begin{aligned} w^*_{\bar z} = \frac{1}{2}(\ln E)_{\bar z}\, w^* + \frac{1}{2}(\ln E)_z\, \bar w^* + \frac{\nu E i}{4(1+\nu)}(\bar\alpha z - \alpha \bar z - 2i\,\alpha_0) - \\ - \frac{Ei}{4}\left[\bar\alpha(z - z^*) + \alpha(\bar z - \bar z^*)\right]. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Din ecuația (2.9), sau din ecuația (4.6), deducem condiția la limită pentru w^*

$$\mathrm{Re}\,[t'(s)\, w^*(t)] = 0, \quad t \in \Gamma, \quad t' = \frac{dt}{ds}. \tag{5.3}$$

Făcînd schimbarea de funcție

$$w^*(z) = \sqrt{E}\, w(z), \tag{5.4}$$

ecuația (5.2) se reduce la forma normală

$$w_{\bar z} = \frac{1}{2}(\ln E)_z\, \bar w + f(z), \tag{5.5}$$

unde

$$f(z) = \frac{i\sqrt{E}}{4}\left[\frac{\nu}{1+\nu}(\bar\alpha z - \alpha \bar z - 2i\,\alpha_0) - \bar\alpha(z - z^*) - \alpha(\bar z - \bar z^*)\right], \tag{5.6}$$

iar condiția la limită (5.3) devine

$$Re\,[t'(s)\, w(t)] = 0, \quad t \in \Gamma. \tag{5.7}$$

Problema la limită (5.5) și (5.7) se numește problema generalizată a lui Riemann-Hilbert.

Prin urmare, studiul problemei lui Saint-Venant pentru o bară cilindrică cu profil multiplu conex, formată din material elastic izotrop cu neomogenitate continuă transversală, se reduce la o problemă Riemann-Hilbert generalizată.

Soluțiile unei ecuații de forma (5.5) au fost numite de N. Teodorescu funcții olomorfe (α), de I. N. Vekua funcții de clasă $C_{\bar z}(\Omega)$ și de L. Bers funcții pseudo-analitice. Soluțiile în sens clasic ale ecuației (5.5), adică de clasă $C^1(\Omega)$, au fost studiate prima dată de către D. Pompeiu care le-a numit funcții poligene.

Utilizînd formula de reprezentare integrală a funcțiilor poligene dată de D. Pompeiu și extinsă de N. Teodorescu la cazul funcțiilor olomorfe (α), ecuația (5.5) conduce la ecuația integrală

$$w(z) + \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega} \frac{(\ln E)_\zeta \overline{w(\zeta)}}{\zeta - z}\, d\omega = \Phi(z) - \frac{1}{\pi}\int_{\Omega} \frac{f(\zeta)\, d\omega}{\zeta - z}, \tag{5.8}$$

funcţia olomorfă $\Phi(z)$ fiind unic determinată prin integrala de tip Cauchy

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{w(t)\, dt}{t - z}. \tag{5.9}$$

Ecuaţia (5.8) are soluţie pentru orice membru drept, deoarece ecuaţia omogenă asociată are numai soluţia banală.

Aplicînd metoda aproximaţiilor succesive din (5.8) obţinem

$$w(z) = \Phi(z) + \int_{\Omega} \Gamma_1(z, \zeta)\Phi(\zeta)\, d\omega + \int_{\Omega} \Gamma_1(z, \zeta)\Phi(\zeta)\, d\omega + N(z), \tag{5.10}$$

unde

$$N(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{\Omega} \Omega_1(z, \zeta) f(\zeta)\, d\omega - \frac{1}{\pi}\int_{\Omega} \Omega_2(z, \zeta)\overline{f(\zeta)}\, d\omega. \tag{5.11}$$

Funcţiile $\Gamma_1(z, \zeta)$ şi $\Gamma_2(z, \zeta)$ numite rezolventele ecuaţiei (5.8), au următoarele expresii în funcţie de coeficienţii ecuaţiei (5.5) şi domeniul Ω

$$\Gamma_1(z, \zeta) = \sum_{1}^{\infty} K_{2j}(z, \zeta), \quad \Gamma_2(z, \zeta) = \sum_{0}^{\infty} K_{2j+1}(z, \zeta), \tag{5.12}$$

$$K_1(z, \zeta) = -\frac{(\ln E)_\zeta}{2\pi(\zeta - z)}, \quad K_n(z, \zeta) = \int_{\Omega} K_1(z, \sigma)\overline{K_{n-1}(\sigma, \zeta)}\, d\omega, \tag{5.13}$$

$$(n = 2, 3, \ldots,).$$

Funcţiile $\Omega_1(z, \zeta)$ şi $\Omega_2(z, \zeta)$ se numesc nucleele ecuaţiei (5.5) corespunzătoare domeniulni Ω şi au următoarele expresii:

$$\Omega_1(z, \zeta) = \frac{1}{\zeta - z} + \int_{\Omega} \frac{\Gamma_1(z, \sigma)}{\zeta - \sigma}\, dw, \quad \Omega_2(z, \zeta) = \int_{\Omega} \frac{\Gamma_2(z, \sigma)}{\zeta - \sigma}\, dw. \tag{5.14}$$

Funcţia $\Phi(z)$ olomorfă în Ω şi continuă în $\bar{\Omega}$ poate fi pusă sub forma

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)\, dt}{t - z} + iC, \tag{5.15}$$

unde $\varphi(t)$ este o funcţie reală de punctul $t \in \Gamma$, iar C o constantă reală.

Introducînd expresia (5.15) a lui $\Phi(z)$ în ecuaţia (5.10), obţinem

$$w(z) = \int_{\Gamma} M(z, t)\varphi(t)\, ds + Cw_1(z) + N(z), \tag{5.16}$$

unde

$$M(z, t) = \frac{t'(s)}{\pi i}\Omega_1(z, t) - \frac{\overline{t'(s)}}{\pi i}\Omega_2(z, t), \tag{5.17}$$

$$w_1(z) = i + i\int_{\Omega} \Gamma_1(z, \zeta)\, d\omega - i\int_{\Omega} \Gamma_2(z, \zeta)\, d\omega. \tag{5.18}$$

Primul termen din membrul secund al ecuaţiei (5.16) este o integrală generalizată de tip Cauchy, cu ponderea $2\varphi(t)$. După cum observă I. N. Vekua [9], valorile la limită ale unei integrale generalizate de tip Cauchy se obţin ca şi valorile la limită ale unei integrale obişnuite de tip Cauchy (pentru aceasta este suficient ca funcţia $\varphi(t)$ să fie hölderiană pe Γ).

Trecînd la limită în ecuaţia (5.16), cînd punctul z din domeniul Ω tinde către un punct $t_0 \in \Gamma$, obţinem

$$w(t_0) = \varphi(t_0) + \int_{\Gamma} M(t_0, t)\varphi(t)\, ds + Cw_1(t_0) + N(t_0). \tag{5.19}$$

Introducînd această expresie în condiţia la limită (5.7), obţinem următoarea ecuaţie integrală singulară

$$A\varphi \equiv -n_2(t_0)\varphi(t_0) + \int_{\Gamma} K(t_0, t)\varphi(t)\, ds = Ch_1(t_0) + h_2(t_0), \tag{5.20}$$

unde

$$\begin{cases} K(t_0, t) = \operatorname{Re}[t_0'(s_0) M(t_0, t)], \\ h_1(t_0) = \operatorname{Re}[t_0'(s_0) w_1(t_0)], \\ h_2(t_0) = \operatorname{Re}[t_0'(s_0) N(t_0)]. \end{cases} \tag{5.21}$$

Operatorul $A\varphi$ fiind de tip normal, putem aplica ecuaţiei (5.20) teoria corespunzătoare a ecuaţiilor integrale singulare [3].

Ecuaţia (5.5) cu condiţia (5.7) este echivalentă cu ecuaţia (5.20). Dacă prima problemă are soluţie, atunci există o funcţie reală $\varphi(t)$ şi o constantă reală C, care satisfac ecuaţia (5.20). Dacă $\varphi(t)$ şi C satisfac ecuaţia (5.20), introducînd valorile lor în (5.16), obţinem soluţia problemei lui Saint-Venant.

În cazul domeniului multiplu-conex ($m \geqslant 1$) constanta C poate fi luată sub forma

$$C = \int_{\Gamma_1} \varphi(t)\, ds.$$

Deoarece ecuația (5.7) este omogenă, condiția necesară și suficientă de existență și unicitate a soluției problemei (5.5) — (5.7) deci și a ecuației integrale singulare (5.20), este satisfăcută identic [8], [9], în cazurile $m = 0$ și $m = 1$.

Observație. Pentru necesități practice se poate deduce o soluție aproximativă, prin metoda aproximațiilor succesive. Alegem ca aproximație de ordin zero funcția

$$w_0(z) = \Phi(z) - \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\omega. \tag{5.23}$$

Din ecuația (5.8) deducem următoarea schemă pentru aproximațiile succesive

$$w_{n+1}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{(\ln E)_\zeta\, \overline{w_n(\zeta)}}{\zeta - z}\, dw + w_0(z), \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5.24}$$

6. *Deplasările.* Pentru determinarea deplasărilor vom folosi ecuațiile (3.1) și (3.2) care reprezintă legea lui Hooke în cazul considerat, precum și ecuațiile (3.16), (5.1) și (5.4).

Introducînd deplasarea complexă

$$u(z, x_3) = u_1 + i u_2, \tag{6.1}$$

obținem următorul sistem de ecuații

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial \bar z} = 0,\\
&\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \bar u}{\partial \bar z} = -\nu \Big\{ [\alpha(\bar z - \bar z^*) + \bar\alpha(z - z^*)]\, x_3 + \beta(\bar z - \bar z^*) +\\
&\qquad + \bar\beta(z - z^*) + 2\frac{R_3}{S} \Big\},\\
&\frac{\partial \bar u}{\partial x_3} + 2\frac{\partial u_3}{\partial z} = -\frac{2i(1+\nu)}{\sqrt{E}}\, w(z),\\
&\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{1}{2}\Big\{ [\alpha(\bar z - \bar z^*) + \bar\alpha(z - z^*)]\, x_3 + \beta(\bar z - \bar z^*) + \bar\beta(z - z^*) + 2\frac{R_3}{S} \Big\}.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Prima dintre aceste ecuații arată că u nu depinde de $\bar z$. Avînd în vedere acest fapt, din a doua ecuație a sistemului (6.2) deducem

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial z} + \nu\Big[\bar\alpha(z - z^*)\, x_3 + \bar\beta(z - z^*) + \frac{R_3}{S}\Big] = -\frac{\partial \bar u}{\partial \bar z} -\\
&\qquad - \nu\Big[\alpha(\bar z - \bar z^*)\, x_3 + \beta(\bar z - \bar z^*) + \frac{R_3}{S}\Big] = iG(x_3),
\end{aligned} \tag{6.3}$$

unde $G(x_3)$ este o funcție reală de x_3.

Eliminînd pe $\dfrac{\partial^2 \bar u}{\partial x_3\, \partial \bar z}$ din (6.3) și a treia ecuație (6.2), obținem

$$2\frac{\partial^2 u_3}{\partial z\, \partial \bar z} = -2i(1+\nu)\left(\frac{w(z)}{\sqrt{E}}\right)_{\bar z} + \nu\alpha(\bar z - \bar z^*) + iG'(x_3). \tag{6.4}$$

Exprimînd că membrul drept al acestei ecuații este real, ca și membrul stîng, obținem

$$G'(x_3) = \nu\alpha_0 + \frac{\nu i}{2}(\bar\alpha z^* - \alpha \bar z^*). \tag{6.5}$$

După unele calcule, avem:

$$\begin{aligned}
u = u_1 + i u_2 = &-\frac{\alpha}{6} x_3^3 - \frac{\beta}{2} x_3^2 -\\
&-\frac{\nu}{2}\Big[(\bar\alpha x_3 + \bar\beta)(z - z^*)^2 + (\bar\alpha z^* - \alpha \bar z^* - 2i\alpha_0)(z - z^*)\, x_3 + 2\frac{R_3}{S}(z - z^*)\Big],
\end{aligned} \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned}
2u_3 = {}& 2\nu F - \frac{\nu}{12}(\alpha z^3 + \bar\alpha \bar z^3) + \frac{\nu}{2}(z - z^*)(\bar z - \bar z^*)[\alpha(\bar z - \bar z^*) + \bar\alpha(z - z^*)] +\\
&+ \frac{x_3^2}{2}\Big[\alpha(\bar z - \bar z^*) + \bar\alpha(z - z^*)\Big] + \Big[\beta(\bar z - \bar z^*) + \bar\beta(z - z^*) + 2\frac{R_3}{S}\Big] x_3,
\end{aligned} \tag{6.7}$$

unde am neglijat o deplasare rigidă.

Observația 1. Formulele și expresiile obținute pînă acum se scriu mai simplu, dacă ținem seama de observația 1 de la sfîrșitul paragrafului 3.

Observația 2. Dacă se cunoaște funcția $w(z)$, atunci funcția $F(x_1, x_2)$ se determină fără dificultăți.

BIBLIOGRAFIE

1. Milne-Thomson L. M. — *Flexure.* Trans. of the American Math. Soc., vol. 90, nr. 1 1959, p. 143—160.
2. Milne-Thomson L. M. — *Antiplane elastic systems.* Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1962.

3. Мусхелишвили Н. И. — *Сингулярные интегральные уравнения*. Издание второе. Москва 1962.
4. Nowinski J. şi Turski S. — *Studium nad stanami naprezenia w cialach niejednorodnych*. Arch. Mech. Stos., t. V, 3 (1953), p. 397—414.
5. Radu A. — *Asupra încovoierii şi torsiunii barelor izotrope neomogene*. Stud. şi cerc. şt. Acad. R. S. România Filiala Iaşi, Mat. An. XIII, f. 1, (1962), p. 203—212.
6. Solomon L. — *În legătură cu problema lui Saint-Venant. I*. Com. Acad. R. S. România, tom. XI (1961), nr. 7, p. 807—814.
7. Solomon L. — *În legătură cu problema lui Saint-Venant. II*. Com. Acad. R. S. România, tom. XI (1961), nr. 7, p. 815—820.
8. Teodorescu N. — *La dérivée aréolaire et lesfonctions analytiques généralisées en dynamique des fluides compressibles*. Atti della 2a Riunione del Groupement des Mathématiciens d'expression latine, Firenze, 26—30 settembre 1961 — Bologna, 1—3 ottobre 1961, p. 226—257.
9. Векуа И. Н. — *Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек*. Математический сборник, Т. 31 (73), № 2 (1952), стр. 217—314.
10. Векуа И. Н. — *Обобщенные аналитические функции*. Москва 1959.

ЗАДАЧА СЕН-ВЕНАНА ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ БРУСОВ

Резюме

В настоящей заметке изучается задача Сен-Венана для цилиндрического бруса, в случае упругой среды с непрерывным модулем Юнга в поперечной сечении и с постоянным коэффициентом Пуассона.

Этот вопрос приводит к обобщенных задаче Римана-Гильберта.

Употребляя метод обобщенных аналитических функций одной комплексной переменной, доказывается существование и единственность решения соответствующей задачи.

SUR UNE THÉORIE DE LA THERMOVISCOÉLASTICITÉ

PAR

GH. CIOBANU et D. IEŞAN

En [4], L. R. Herrmann, partant des considérations énergétiques faites en [3], développe une théorie générale de la viscoélasticité des matériaux capables de déformations instantanées et qui ne sont pas capables d'énergie de dissipation instantanée. Les matériaux considérés ne présentent pas des effets de vieillissement.

Nous nous proposons d'étendre cette théorie dans les conditions de l'existence d'un champ de température qui n'est pas uniforme, partant des considérations thermodynamiques faites en [1], [2].

1. *Équations de base*

Notons avec x_i les coordonnées matérielles d'un point dans un repère cartésien orthogonal et avec y_i ses coordonnées spatiales par rapport au même repère. Si nous notons avec θ^i un système de coordonnées matérielles curvilignes, le mouvement est donné par

$$y_i = y_i(\theta^1, \theta^2, \theta^3, \tau), \quad (-\infty < \tau \leqslant t). \tag{1}$$

Les fonctions (1) satisfont aux conditions de régularité demandées habituellement et de plus

$$\left.\frac{\partial y_i(\tau)}{\partial \theta^s}\right| > 0. \tag{2}$$

Notons par $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ le vecteur de position du point de coordonnées x_i et avec $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ le vecteur de position du point de coordonnées y_i au moment τ.

On introduit les vecteurs de base et les tenseurs métriques dans le corps non-déformé et dans celui déformé par

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_i &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta^i}, \quad g_{ij} = \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j, \quad g = |g_{ij}|, \\ \mathbf{G}_i &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta^i}, \quad G_{ij} = \mathbf{G}_i \mathbf{G}_j, \quad G = |G_{ij}|. \end{aligned} \tag{3}$$