3. Мусхелишвили Н. И. — *Сингулярные интегральные уравнения*. Издание второе. Москва 1962.
4. Nowinski J. şi Turski S. — *Studium nad stanami naprezenia w cialach niejednorodnych*. Arch. Mech. Stos., t. V, 3 (1953), p. 397—414.
5. Radu A. — *Asupra încovoierii şi torsiunii barelor izotrope neomogene*. Stud. şi cerc. şt. Acad. R. S. România Filiala Iaşi, Mat. An. XIII, f. 1, (1962), p. 203—212.
6. Solomon L. — *În legătură cu problema lui Saint-Venant. I*. Com. Acad. R. S. România, tom. XI (1961), nr. 7, p. 807—814.
7. Solomon L. — *În legătură cu problema lui Saint-Venant. II*. Com. Acad. R. S. România, tom. XI (1961), nr. 7, p. 815—820.
8. Teodorescu N. — *La dérivée aréolaire et les fonctions analytiques généralisées en dynamique des fluides compressibles*. Atti della 2a Riunione del Groupement des Mathématiciens d'expression latine, Firenze, 26—30 settembre 1961 — Bologna, 1—3 ottobre 1961, p. 226—257.
9. Векуа И. Н. — *Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек*. Математический сборник, Т. 31 (73), № 2 (1952), стр. 217—314.
10. Векуа И. Н. — *Обобщенные аналитические функции*. Москва 1959.

ЗАДАЧА СЕН-ВЕНАНА ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ БРУСОВ

Резюме

В настоящей заметке изучается задача Сен-Венана для цилиндрического бруса, в случае упругой среды с непрерывным модулем Юнга в поперечной сечении и с постоянным коэффициентом Пуассона.

Этот вопрос приводит к обобщенных задаче Римана-Гильберта.

Употребляя метод обобщенных аналитических функций одной комплексной переменной, доказывается существование и единственность решения соответствующей задачи.

SUR UNE THÉORIE DE LA THERMOVISCOÉLASTICITÉ

PAR

GH. CIOBANU et D. IEŞAN

En [4], L. R. Herrmann, partant des considérations énergétiques faites en [3], développe une théorie générale de la viscoélasticité des matériaux capables de déformations instantanées et qui ne sont pas capables d'énergie de dissipation instantanée. Les matériaux considérés ne présentent pas des effets de vieillissement.

Nous nous proposons d'étendre cette théorie dans les conditions de l'existence d'un champ de température qui n'est pas uniforme, partant des considérations thermodynamiques faites en [1], [2].

1. *Équations de base*

Notons avec x_i les coordonnées matérielles d'un point dans un repère cartésien orthogonal et avec y_i ses coordonnées spatiales par rapport au même repère. Si nous notons avec θ^i un système de coordonnées matérielles curvilignes, le mouvement est donné par

$$y_i = y_i(\theta^1, \theta^2, \theta^3, \tau), \quad (-\infty < \tau \leqslant t). \tag{1}$$

Les fonctions (1) satisfont aux conditions de régularité demandées habituellement et de plus

$$\left| \frac{\partial y_i(\tau)}{\partial \theta^s} \right| > 0. \tag{2}$$

Notons par $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ le vecteur de position du point de coordonnées x_i et avec $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ le vecteur de position du point de coordonnées y_i au moment τ.

On introduit les vecteurs de base et les tenseurs métriques dans le corps non-déformé et dans celui déformé par

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_i &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta^i}, \quad g_{ij} = \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j, \quad g = |g_{ij}|, \\ \mathbf{G}_i &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta^i}, \quad G_{ij} = \mathbf{G}_i \mathbf{G}_j, \quad G = |G_{ij}|. \end{aligned} \tag{3}$$

Le tenseur de déformation est donné par

$$2\gamma_{ij} = G_{ij} - g_{ij}. \tag{4}$$

Les invariants du tenseur de déformation sont

$$\begin{aligned} I_1 &= 3 + 2\gamma^r_r = g^{rs} G_{rs}, \\ I_2 &= 3 + 4\gamma^r_r + 2(\gamma^r_r \gamma^s_s - \gamma^r_s \gamma^s_r), \\ I_3 &= |\delta^r_s + 2\gamma^r_s| = \frac{G}{g}, \end{aligned} \tag{5}$$

où $\gamma^i_j = g^{ip}\gamma_{pj}$.

Plus convenables pour les calculs sont les invariants

$$\begin{aligned} J_1 &= I_1 - 3 = 2\delta^i_j \gamma^j_i, \\ J_2 &= I_2 - 2I_1 + 3 = 2\delta^{ij}_{lm} \gamma^l_i \gamma^m_j, \\ J_3 &= I_3 - I_2 + I_1 = \frac{4}{3} \delta^{ijk}_{lmn} \gamma^l_i \gamma^m_j \gamma^n_k. \end{aligned} \tag{6}$$

L'état de tension dans le corps déformé est déterminé à l'aide du tenseur de tension symétrique τ^{ij}, rapporté à l'unité de surface du corps déformé.

Considérons la loi de la conservation de l'énergie sous la forme

$$\frac{D}{Dt}\int_{\Omega}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt}\right)^2 + \frac{U}{\rho_0}\right\}\rho\, d\omega = \int_{\Sigma} \mathbf{P}\,\frac{D\mathbf{v}}{Dt}\, d\sigma + \int_{\Omega} \mathbf{F}\,\frac{D\mathbf{v}}{Dt}\, d\omega - \int_{\Sigma} \mathbf{Q}\mathbf{n}\, d\sigma \tag{7}$$

où $\mathbf{v}$ est le vecteur du déplacement, U — l'énergie interne sur l'unité du volume du corps non-déformé, ρ et ρ_0 — la densité du corps déformé, respectivement non-déformé, $\mathbf{P}$ — la force de surface rapportée à l'unité d'aire du corps déformé, $\mathbf{F}$ — la force massique, $\mathbf{Q}$ — le flux de chaleur sur l'unité d'aire du corps déformé. Par Ω on a noté un volume arbitraire du corps déformé, limité par la surface Σ et $\frac{D}{Dt}$ représente la dérivée par rapport au temps, en maintenant 0 constant.

Soit $\mathbf{q}$ le vecteur-flux sur l'unité d'aire du corps non-déformé. Ainsi

$$\mathbf{Q} = Q^i \mathbf{G}_i, \quad \mathbf{q} = q^i \mathbf{g}_i, \tag{8}$$

montre que [1]

$$q^i = \sqrt{I_3}\, Q^i, \quad q^i|_i = Q^i\|_i \sqrt{I_3}. \tag{9}$$

où par une ligne on a noté la dérivée covariante par rapport à la métrique g_{ij} et par deux lignes la dérivée covariante par rapport à la métrique G_{ij}.

De (7) on obtient, tenu compte des équations d'équilibre, des formules de Cauchy et de (9),

$$\frac{DU}{Dt} = \sqrt{I_3}\,\frac{\tau^{ij}\, D\gamma_{ij}}{Dt} - q^i|_i. \tag{10}$$

Notant avec T la température absolue du milieu et avec S l'entropie sur l'unité de volume du corps non-déformé l'équation d'équilibre de l'entropie s'écrit

$$\frac{D}{Dt}\int_{\Omega_0} S\, d\omega_0 = -\int_{\Sigma_0} \frac{\mathbf{q}\mathbf{n}_0}{T}\, d\sigma_0 + \int_{\Omega_0} \Theta\, d\omega_0, \tag{11}$$

où Θ représente la vitesse de la croissance de l'entropie sur l'unité de volume du corps non-déformé grâce au processus irreversible de la propagation de la chaleur, Ω_0 étant un volume arbitraire du corps non-déformé limité par la surface Σ_0 de normale $\mathbf{n}_0$. On postule le fait que $\Theta \geqslant 0$.

En transformant en (11) l'intégrale de surface en intégrale de volume et compte tenu du fait que l'intégrande est supposé continu et Ω_0 arbitraire, on obtient

$$\frac{DS}{Dt} = \Theta - \frac{q^i|_i}{T} + \frac{q^i\, T|_i}{T^2}. \tag{12}$$

L'élimination de $q^i|_i$ de (10) et (12) conduit à

$$\sqrt{I_3}\,\tau^{ij}\frac{D\gamma_{ij}}{Dt} - \frac{DU}{Dt} + T\frac{DS}{Dt} - T\left(\Theta + \frac{q^i\, T|_i}{T^2}\right) = 0. \tag{13}$$

Introduisant la fonction de l'énergie libre de Helmholtz

$$A = U - TS, \tag{14}$$

la relation (13) devient

$$\sqrt{I_3}\,\tau^{ij}\frac{D\gamma_{ij}}{Dt} - \frac{DA}{Dt} - S\frac{DT}{Dt} - T\left(\Theta + \frac{q^i\, T|_i}{T^2}\right) = 0. \tag{15}$$

Dans ce qui suit, nous supposerons que l'énergie libre A au temps t est fonction de l'histoire de l'état de déformation, fait qui se reflète par l'histoire des déformations $\gamma_{ij}(\tau)$ et de la température $T(\tau)$, $(-\infty < \tau \leqslant t)$,

$$A = A\left(\overset{t}{\underset{-\infty}{\gamma}}_{ij}, \overset{t}{\underset{-\infty}{T}}\right). \tag{16}$$

Compte tenu de (16), l'équation (15) devient

$$\frac{1}{2}\sqrt{I_3}\,\tau_{ij} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{\partial A}{\partial \gamma_{ij}}\right)\left(\frac{D\gamma_{ij}}{Dt} + \frac{D\gamma_{ji}}{Dt}\right) - \tag{17}$$
$$-\left(S + \frac{\partial A}{\partial T}\right)\frac{DT}{Dt} - T\left(\Theta + \frac{q^i T|_i}{T^2}\right) = 0.$$

En supposant que τ^{ij}, S et q^i ne dépendent pas explicitement de $\frac{D\gamma_{ij}}{Dt}$ et $\frac{DT}{Dt}$, de (17) on obtient [1], [2]

$$\tau^{ij} = \frac{1}{2\sqrt{I_3}}\left(\frac{\partial A}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{\partial A}{\partial \gamma_{ji}}\right),$$
$$S = -\frac{\partial A}{\partial T}, \tag{18}$$
$$\Theta = -\frac{q^i T|_i}{T^2} = -\frac{Q^i T|_i}{T^2}\sqrt{I_3}.$$

2. *La théorie linéaire*

Nous expliciterons la fonction A pour les matériaux dont les propriétés ont été rappelées au début. Pour l'instant nous supposons que l'énergie libre est fonction seulement des états de déformation à N moments discrets τ_n $(\tau_n < \tau_{n+1},\ 1 \leqslant n < N,\ \tau_N = t)$ ainsi que

$$A = A(\gamma_{ij}(\tau_1),\ T(\tau_1);\ \gamma_{ij}(\tau_2),\ T(\tau_2);\ \ldots\ \gamma_{ij}(\tau_n),\ T(\tau_n)\ \ldots). \tag{19}$$

Dans le cadre de la théorie linéaire nous supposerons que A est un polynôme du deuxième degré de ses arguments. Notons ensuite avec T la variation de la température par rapport à l'état non-déformé et en la considérant du même ordre de grandeur que γ_{ij}, nous avons

$$A(t) = A_0(t) + \sum_{n=1}^{N} B_0^{ij}(t, \tau_n)\,\gamma_{ij}(\tau_n) + \sum_{n=1}^{N} C_0(t, \tau_n)\,T(\tau_n) + \tag{20}$$
$$+ \sum_{n,m=1}^{N} D_0^{ij}(t, \tau_n, \tau_m)\,\gamma_{ij}(\tau_n)\,T(\tau_m) + \sum_{n,m=1}^{N} F_0^{ijkl}(t, \tau_n, \tau_m)\,\gamma_{ij}(\tau_n)\,\gamma_{kl}(\tau_m) +$$
$$+ \sum_{n,m=1}^{N} G_0(t, \tau_n, \tau_m)\,T(\tau_n)\,T(\tau_m).$$

Parce qu'un changement instantané de l'état de déformation au temps t mène à un changement instantané de l'énergie libre, il faut avoir [4], [6],

$$B_0^{ij}(t, \tau_n) = B_1^{ij}(t, \tau_n) + \delta_n^N B_2^{ij}(t),$$
$$C_0(t, \tau_n) = C_1(t, \tau_n) + \delta_n^N C_2(t),$$

$$D_0^{ij}(t, \tau_n, \tau_m) = D_1^{ij}(t, \tau_n, \tau_m) + \delta_n^N D_2^{ij}(t, \tau_m) + \delta_m^N D_3^{ij}(t, \tau_n) + \delta_n^N \delta_m^N D_4^{ij}(t),$$
$$F_0^{ijkl}(t, \tau_n, \tau_m) = F_1^{ijkl}(t, \tau_n, \tau_m) + \delta_n^N F_2^{ijkl}(t, \tau_m) + \tag{21}$$
$$+ \delta_m^N F_3^{ijkl}(t, \tau_n) + \delta_n^N \delta_m^N F_4^{ijkl}(t),$$
$$G_0(t, \tau_n, \tau_m) = G_1(t, \tau_n, \tau_m) + \delta_n^N G_2(t, \tau_m) + \delta_m^N G_3(t, \tau_n) +$$
$$+ \delta_n^N \delta_m^N G_4(t),$$

où B_1^{ij}, C_1, D_1^{ij}, D_2^{ij}, D_3^{ij}, F_1^{ijkl}, F_2^{ijkl}, G_1, G_2, G_3 sont des fonctions continues pour $-\infty < \tau_n, \tau_m \leqslant t$ quand la dépendance des temps discrets est remplacée par une dépendance continue. Avec cela, (20) devient

$$A(t) = A_0(t) + B_2^{ij}(t)\,\gamma_{ij}(t) + C_2(t)\,T(t) + F_4^{ijkl}(t)\,\gamma_{ij}(t)\,\gamma_{kl}(t) +$$
$$+ G_4(t)\,T^2(t) + D_4^{ij}(t)\,\gamma_{ij}(t)\,T(t) + \sum_{n=1}^{N} B_1^{ij}(t, \tau_n)\,\gamma_{ij}(\tau_n) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{N} C_1(t, \tau_n)\,T(\tau_n) + \sum_{n,m=1}^{N} D_1^{ij}(t, \tau_n, \tau_m)\,\gamma_{ij}(\tau_n)\,T(\tau_m) +$$
$$+ \gamma_{ij}(t)\sum_{m=1}^{N} D_2^{ij}(t, \tau_m)\,T(\tau_m) + T(t)\sum_{n=1}^{N} D_3^{ij}(t, \tau_n)\,\gamma_{ij}(\tau_n) + \tag{22}$$
$$+ \sum_{n,m=1}^{N} F_1^{ijkl}(t, \tau_n, \tau_m)\,\gamma_{ij}(\tau_n)\,\gamma_{kl}(\tau_m) +$$
$$+ \gamma_{ij}(t)\sum_{m=1}^{N} [F_2^{ijkl}(t, \tau_m) + F_3^{klij}(t, \tau_m)]\,\gamma_{kl}(\tau_m) +$$
$$+ \sum_{n,m=1}^{N} G_1(t, \tau_n, \tau_m)\,T(\tau_n)\,T(\tau_m) + T(t)\sum_{m=1}^{N} G_2(t, \tau_m) + G_3(t, \tau_m)\,T(\tau_m).$$

Compte tenu de toute l'histoire de l'état de déformation, nous avons :

$$A(t) = A_0(t) + B_2^{ij}(t)\,\gamma_{ij}(t) + C_2(t)\,T(t) + D_4^{ij}(t)\,\gamma_{ij}(t)\,T(t) +$$
$$+ F_4^{ijkl}(t)\,\gamma_{ij}(t)\,\gamma_{kl}(t) + G_4(t)\,T^2(t) + \int_{-\infty}^{t} B_1^{ij}(t, \tau)\,\gamma_{ij}(\tau)\,d\tau + \tag{23}$$
$$+ \int_{-\infty}^{t} C_1(t, \tau)\,T(\tau)\,d\tau + \iint_{-\infty}^{t} D_1^{ij}(t, \tau, \theta)\,\gamma_{ij}(\tau)\,T(\theta)\,d\tau\,d\theta +$$

$$+ \gamma_{ij}(t) \int_{-\infty}^{t} D_2^{ij}(t,\tau)\, T(\tau)\, d\tau + T(t) \int_{-\infty}^{t} D_3^{ij}(t,\tau)\, \gamma_{ij}(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_{-\infty}^{t} F_1^{ijkl}(t,\tau,\theta)\, \gamma_{ij}(\tau)\, \gamma_{kl}(\theta)\, d\tau\, d\theta +$$

$$+ \gamma_{ij}(t) \int_{-\infty}^{t} H_1^{ijkl}(t,\tau)\, \gamma_{kl}(\tau)\, d\tau + \int_{-\infty}^{t} G_1(t,\tau,\theta)\, T(\tau)\, T(\theta)\, d\tau\, d\theta +$$

$$+ T(t) \int_{-\infty}^{t} H_2(t,\tau)\, T(\tau)\, d\tau,$$

où nous avons noté

$$H_1^{ijkl}(t,\tau) = F_2^{ijkl}(t,\tau) + F_3^{klij}(t,\tau).$$

$$H_2(t,\tau) = G_2(t,\tau) + G_3(t,\tau).$$

Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer $A_0(t) = 0$. Vu que l'énergie interne est positive ou nulle, il faut que

$$B_1^{ij} = B_2^{ij} = 0.$$

Nous nous limiterons aux matériaux qui ne „vieillissent" pas: ils continuent pendant leur déformation toujours la même voie, s'ils passent successivement par les mêmes conditions, quelle que soit la position de ces conditions au cours du temps. Pour tels matériaux on montre que [4], C_2, D_4^{ij}, F_4^{ijkl} G_1 sont des constantes et

$$C_1(t,\tau) = C_1(t-\tau),\ H_2(t,\tau) = H_2(t-\tau),$$

$$D_2^{ij}(t,\tau) = D_2^{ij}(t-\tau),\ D_1^{ij}(t,\tau,\theta) = D_1^{ij}(t-\tau, t-\theta),$$

$$D_3^{ij}(t,\tau) = D_3^{ije}(t-\tau),\ F_1^{ijkl}(t,\tau,\theta) = F_1^{ijkl}(t-\tau, t-\theta),$$

$$H_1^{ijkl}(t,\tau) = H_1^{ijkl}(t-\tau),\ G_1(t,\tau,\theta) = G_1(t-\tau, t-\theta).$$

Avec cela (23) devient

$$A(t) = C_2\, T(t) + D_4^{ij}\, \gamma_{ij}(t)\, T(t) + F_4^{ijkl} \gamma_{ij}(t)\, \gamma_{kl}(t) +$$

$$+ G_1\, T^2(t) + \int_{-\infty}^{t} C_1(t-\tau)\, T(\tau)\, d\tau + \iint_{-\infty}^{t} D_1^{ij}(t-\tau, t-\theta)\, \gamma_{ij}(\tau)\, T(\theta)\, d\tau\, d\theta +$$

$$+ \gamma_{ij}(t) \int_{-\infty}^{t} D_2^{ij}(t-\tau)\, T(\tau)\, d\tau + T(t) \int_{-\infty}^{t} D_3^{ij}(t-\tau)\, \gamma_{ij}(\tau)\, d\tau +$$

(24)

$$+ \int_{-\infty}^{t} F_1^{ijkl}(t-\tau, t-\theta)\, \gamma_{ij}(\tau)\, \gamma_{kl}(\theta)\, d\tau\, d\theta +$$

$$+ \gamma_{ij}(t) \int_{-\infty}^{t} H_1^{ijkl}(t-\tau)\, \gamma_{kl}(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \iint_{-\infty}^{t} G_1(t-\tau, t-\theta)\, T(\tau)\, T(\theta)\, d\tau\, d\theta + T(t) \int_{-\infty}^{t} H_2(t-\tau)\, T(\tau)\, d\tau.$$

Parce que l'énergie libre A est invariable à toute transformation de coordonnées et les coefficients du développement (20) ne dépendent pas de γ_{ij}, on constate que ces coefficients doivent être des tenseurs.

De (18) nous obtenons la liaison entre les tensions et les déformations sous la forme

(25)

$$\tau^{ij}(t) = C^{ijkl}\, \gamma_{kl}(t) + \alpha^{ij}\, T(t) + \int_{-\infty}^{t} C_1^{ijkl}(t-\tau)\, \gamma_{kl}(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_{-\infty}^{t} \alpha_1^{ij}(t-\tau)\, T(\tau)\, d\tau.$$

Pour établir la relation (25) nous avons tenu compte de tout ce qu'on a établi en ce qui concerne la dérivation par rapport à $\gamma_{ij}(t)$ en [4] et nous avons noté

$$C^{ijkl} = F_4^{ijkl} + F_4^{klij},\ \alpha^{ij} = D_4^{ij},$$

$$C_1^{ijkl}(t-\tau) = H_1^{ijkl}(t-\tau),\ \alpha_1^{ij}(t-\tau) = D_2^{ij}(t-\tau).$$

Les relations (25) représentent la liaison entre les tensions et les déformations dans la théorie linéaire de la thermoviscoélasticité des corps aniso-

tropes. De la manière dont elles ont été introduites, on peut supposer que

$$\alpha^{ij} = \alpha^{ji}, \quad C^{ijkl} = C^{klij} = C^{jikl}$$

$$\alpha_1^{ij}(t-\tau) = \alpha_1^{ji}(t-\tau), \quad C_1^{ijkl}(t-\tau) = C_1^{klij}(t-\tau) = \tag{26}$$
$$= C_1^{jikl}(t-\tau).$$

Les fonctions $C_1^{ijkl}(t-\tau)$ et $\alpha_1^{ij}(t-\tau)$ sont des fonctions de relaxation caractéristiques au matériel.

Dans l'absence des effets héréditaires, la loi (25) décrit la liaison entre les tensions et les déformations pour un corps anisotrope dans la théorie linéaire de la thermoélasticité. Donc C^{ijkl} représente les constantes élastiques du matériel et α^{ij} les constantes qui caractérisent les propriétés thermiques. Dans le cas $T = 0$, nous obtenons les relations entre les tensions et les déformations de la théorie linéaire de la viscoélasticité.

Dans la suite nous allons déduire les relations entre les tensions et les déformations dans le cas isotrope. Supposons que l'énergie libre A est fonction des déformations par l'intermédiaire des invariants de la déformation. Nous précisons la forme de cette fonction en considérant d'abord une répartition discrète de τ_n ($\tau_n < \tau_{n+1}$, $1 \leqslant n \leqslant N$, $\tau_N = t$), ainsi que

$$A = A\,(J_1(\tau_l),\ J_2(\tau_n, \tau_m),\ T(\tau_k)).$$

où

$$J_1(\tau_l) = 2\,\delta_j^i\,\gamma_i^j(\tau_l),$$

$$J_2(\tau_n, \tau_m) = 2\,\delta_{lp}^{ij}\,\gamma_i^l(\tau_n)\,\gamma_j^p(\tau_m).$$

En procédant comme dans la déduction de l'expression (24), nous obtenons, après les calculs, la forme suivante de la fonction A :

$$\begin{aligned} A(t) &= a_1[J_1(t)]^2 + a_2 J_2(t) + a_3 J_1(t)\,T(t) + a_4 T(t) + a_5 T^2(t) + \\ &+ J_1(t)\int_{-\infty}^{t} b_1(t-\tau)\,J_1(\tau)\,d\tau + \int_{-\infty}^{t} b_2(t-\tau)\,J_2(t,\tau)\,d\tau + \\ &+ J_1(t)\int_{-\infty}^{t} b_3(t-\tau)\,T(\tau)\,d\tau + T(t)\int_{-\infty}^{t} b_4(t-\tau)\,J_1(\tau)\,d\tau + \\ &+ \int_{-\infty}^{t} b_5(t-\tau)\,T(\tau)\,d\tau + T(t)\int_{-\infty}^{t} b_6(t-\tau)\,T(\tau)\,d\tau + \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} &+ \iint_{-\infty}^{t} C_1(t-\tau, t-\theta)\,J_1(\tau)\,J_1(\theta)\,d\tau\,d\theta + \iint_{-\infty}^{t} C_2(t-\tau, t-\theta)\,J_2(\tau,\theta)\,d\tau d\theta + \\ &+ \iint_{-\infty}^{t} C_3(t-\tau, t-\theta)\,J_1(\tau)\,T(\theta)\,d\tau\,d\theta + \iint_{-\infty}^{t} C_4(t-\tau, t-\theta)\,T(\tau)\,T(\theta)\,d\tau\,d\theta. \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que

$$\begin{aligned} &\frac{\partial J_1(t)}{\partial \gamma_{ij}(t)} = 2g^{ij}, \\ &\frac{\partial J_2(t)}{\partial \gamma_{ij}(t)} = 4\,[g^{ij}\,\gamma_k^k(t) - \gamma^{ij}(t)], \\ &\frac{\partial J_2(t,\tau)}{\partial \gamma_{ij}(t)} = 2\,[g^{ij}\,\gamma_k^k(\tau) - \gamma^{ij}(\tau)] + 2\,\delta_{lm}^{rs}(t)\,\gamma_r^l\,\frac{\partial \gamma_s^m(\tau)}{\partial \gamma_{ij}(t)}, \end{aligned} \tag{28}$$

et du mode de dérivation des intégrales par rapport à $\gamma_{ij}(t)$ on obtient

$$\begin{aligned} \tau^{ij}(t) &= \lambda g^{ij}\,\gamma_l^l(t) + 2\mu\gamma^{ij}(t) + g^{ij}\,\alpha\,T(t) + \\ &+ g^{ij}\int_{-\infty}^{t} \lambda_1(t-\tau)\,\gamma_l^l(\tau)\,d\tau + 2\int_{-\infty}^{t} \mu_1(t-\tau)\gamma^{ij}(\tau)\,d\tau + \\ &+ g^{ij}\int_{-\infty}^{t} \alpha_1(t-\tau)\,T(\tau)\,d\tau, \end{aligned} \tag{29}$$

où

$$\begin{aligned} &\lambda = 8a_1 + 4a_2, && \lambda_1(t-\tau) = 2\,[2b_1(t-\tau) + b_2(t-\tau)], \\ &\mu = -2a_2, && \mu_1(t-\tau) = -2b_2(t-\tau), \\ &\alpha = 2a_3, && \alpha_1(t-\tau) = 2b_3(t-\tau). \end{aligned}$$

Les constantes λ et μ sont les constantes de Lamé, α caractérise les propriétés thermiques du matériel et les noyaux des intégrales représentent les fonctions de relaxation.

En absence de la température, on obtient la loi établie en [4].

Les équations de la thermoviscoélasticité couplée sont établies en [5].

BIBLIOGRAPHIE

1. Green A. E. and Adkins J. E. — *Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics*. Oxford, Clarendon Press, 1960.
2. Green A. E. and Naghdi P. M. — *A general theory of an elastic-plastic continuum*. Arch. rational Mech. Anal. 18, (1965), p. 251.
3. Green A. E. and Zerna W. — *Theoretical elasticity*. Oxford, Clarendon Press, 1954.
4. Hermann L. R. — *On a general theory of viscoelasticity*. J. Franklin Inst., vol. 280 (1965), p. 244.
5. Ieşan D. — *On the linear coupled thermoviscoelasticity (sous presse)*.
6. Voltera V. — *Theory of functionals and of integral and integro-differential equations*. London and Glasgow, 1930.

ASUPRA UNEI TEORII A TERMOVISCOELASTICITĂŢII

Rezumat

Se stabilesc relaţiile între tensiuni şi deformări pentru medii viscoelastice în prezenţa unui cîmp neuniform de temperatură.

PRINCIPES VARIATIONNELS DANS LA THÉORIE DE LA THERMOÉLASTICITÉ COUPLÉE

PAR

D. IEŞAN

Les équations de la thermoélasticité couplée ont été considérées pour la première fois par Duhamel [4] en 1837. Un progrès dans l'étude de ce problème a été fait en 1956 par M. A. Biot [2] et M. Lessen [13]. Dans la même année, J. H. Weiner démontre un théorème d'unicité pour le problème de la thermoélasticité couplée, géneralisé ultérieurement par V. Ionescu-Cazimir [10], [11].

En [2], Biot a formulé un principe variationnel pour le problème dynamique de la thermoélasticité couplée qui implique les équations du mouvement et l'équation de la propagation. G. Herrman [7], en 1960, étend les principes variationnels de l'élasticité isotherme au cas de la thermoélasticité quasistatique.

En [1] sont établis les principes variationnels dans le cas des milieux isotropes. Dans ce travail nous allons établir des principes variationnels qui caractérisent complètement la solution du problème dynamique de la thermoélasticité couplée dans le cas des milieux non-homogènes et anisotropes, en étendant ainsi à la thermoélasticité, les principes variationnels établis par Gurtin [6], pour l'élastodynamique. Nous utiliserons des notations et des résultats de [6] et [9].

1. *Notions préliminaires.* Nous noterons avec E l'espace euclidien tridimensionnel et par $\bar{V}$ une région fermée et bornée contenue dans E, dont la frontière Σ est formée d'un nombre fini de surfaces régulières au sens de Kellog [12], fermées et disjointes. Soit V l'intérieur de $\bar{V}$, $\mathbf{n}$ la normale unitaire extérieure à Σ et Σ_α $(\alpha=1,2,3,4)$ des parties de Σ telles que $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma_3 \cup \Sigma_4$, $(\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \Sigma_3 \cap \Sigma_4 = \emptyset)$. Par $\bar{\Sigma}_\alpha$ on note la fermeture de Σ_α. On note avec x le point dont les coordonnées par rapport à un repère *cartésien* rectangulaire sont x_i, et avec t le temps. On notera avec $\gamma_{ijk\ldots l}$ les composantes dans un système cartésien d'un tenseur d'ordre $N \geqslant 1$; si $N=2$ on note par $\gamma_{(ij)}$ la partie symétrique de γ_{ij}.