BIBLIOGRAPHIE

1. Albert A. A. — *Studies in modern algebra*, vol. II, 1963.
2. Красносельский М. А. — *Положительные решения операторных уравнений*. 1962.
3. Creangă Ion — *Sur une algèbre attachée à un opérateur dans un espace linéaire*. An. şt. Univ. Iaşi (s.n.), s. I, t. XI_A, 1965, p. 21–25.
4. Sadayuki Yamamura — *On the theory of some non linear operators*. Yokohama Math. Journ., 10, 1962, p. 11–17.

CONSIDERAŢII ASUPRA ECUAŢIEI FUNCŢIONALE:

$$F[F(x+y)-F(x)-F(y)+z]-F[F(x+y)-F(x)-F(y)]-F(z)=$$
$$=F[F(z+y)-F(z)-F(y)+x]-F[F(z+y)-F(z)-F(y)]-F(x)$$

ÎNTR-UN SPAŢIU LINIAR

Rezumat

În această Notă se prezintă cîteva consideraţii asupra ecuaţiei funcţionale (3) şi se dau soluţii algebrice.

Ecuaţia (3) este ecuaţia asociativităţii pentru o algebră A_F, ataşată unui operator $F(x)$ din spaţiul liniar R, care se transformă în A_F prin operaţia (1).

Se constată că în cazul din $R=1$, singurele soluţii algebrice sînt $F(x)=x$ şi $F(x)=x^2$, dar există soluţii neanalitice, de exemplu: $F(x)=[x]$, $F(x)=\{x\}$.

Se dau pentru operatorii algebrici ecuaţiile generale pentru ca A_F să fie asociativă. Se tratează cazul particular cînd dim $R=2$, iar coordonatele lui $F(x)$ sînt polinoame de gradul al treilea în coordonatele vectorilor x.

Se dă de asemenea o clasă de soluţii particulare pentru cazul cînd dim R este finită. Pentru toate aceste soluţii, algebrele corespunzătoare sînt nilpotente de indice trei. Se arată, prin exemplu, că există totuşi soluţii care conduc la algebre care nu-s nilpotente de indice trei. Se întrezăresc interpretări geometrice interesante pentru operatorii care conduc la algebre asociative.

O GENERALIZARE A FUNCŢIEI LUI MÖBIUS

DE

DORIAN SPULBER

În Nota de faţă se defineşte o funcţie numerică $\mu_k(n)$ şi i se studiază unele proprietăţi; această funcţie coincide pentru $k=2$ cu $\mu(n)$, cunoscuta funcţie a lui Möbius. Generalizări ale funcţiei lui Möbius au mai dat C. P. Popovici [2] şi K. P. R. Sastry [3].

1°. Pentru orice k şi n naturali definim

$$\mu_k(n)=\begin{cases}0 & \text{dacă un există } p \text{ aşa ca } p^k/n,\\ (-1)^{\nu(n)} & \text{în celelalte cazuri,}\end{cases} \tag{1}$$

unde $\nu(n)$ este numărul divizorilor primi ai numărului n.

2°. Funcţia $\mu_k(n)$ este multiplicativă, adică dacă $(n_1, n_2)=1$, $\mu_k(n_1 n_2)=\mu_k(n_1)\,\mu_k(n_2)$.

Deosebim cazurile:

— $p^k/n_1 n_2$: datorită ipotezei, sau p^k/n_1, sau p^k/n_2 şi deci $\mu_k(n_1 n_2)=\mu_k(n_1)\,\mu_k(n_2)=0$;

— $p_k/n_1 n_2$, deci p_k/n_1 şi p_k/n_2; după definiţie,

$$\mu_k(n_1 n_2)=(-1)^{\nu(n_1 n_2)},$$
$$\mu_k(n_1)=(-1)^{\nu(n_1)},$$
$$\mu_k(n_2)=(-1)^{\nu(n_2)};$$

deoarece $\nu(n_1 n_2)=\nu(n_1)+\nu(n_2)$, rezultă $\mu_k(n_1 n_2)=\mu_k(n_1)\,\mu_k(n_2)$.

Din 1° şi 2° rezultă

a) $\mu_1(n)=\sum_{d/n}\mu(d)$; în baza definiţiei, relaţia este evidentă.

Dacă $f(n)$ este o funcţie multiplicativă, se ştie [1] că

$$\sum_{d/n} f(d)=\prod_{i=1}^{h}[1+f(p_i)+f(p_i^2)+\dots], \tag{2}$$

$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_h^{\alpha_h}$ fiind descompunerea canonică a lui n. (Cînd $n = 1$, membrul al doilea se consideră egal cu 1).

b)

$$\sum_{d|n} \mu_k(d) = (2-k)^{h-r}(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\dots(1-\alpha_r), \tag{3}$$

(+) cu $\quad 0 < \alpha_1 \leqslant \dots \leqslant \alpha_r < k \leqslant \alpha_{r+1} \leqslant \dots \leqslant \alpha_h.$

Formula (3) se obţine din (2) considerînd $f(n) = \mu_k(n)$. Facem observaţia că pentru $\max\limits_i (\alpha_i) < k$, relaţia (3) devine

$$\sum_{d|n} \mu_k(d) = \prod_{i=1}^{h} (1-\alpha_i). \tag{3'}$$

c)

$$\sum_{d|n} \mu_k(d)\, \mu_{k_1}(d) = k^{h-r}(1+\alpha_1)\dots(1+\alpha_r), (k \leqslant k_1), \tag{4}$$

în condiţiile şirului de inegalităţi (+).

Am particularizat în (2), $f(n) = \mu_k(n)\, \mu_{k_1}(n)$. Dacă $\max\limits_i (\alpha_i) < k$, relaţia (4) devine

$$\sum_{d|n} \mu_k(d)\, \mu_{k_1}(d) = \tau(n), \tag{4'}$$

$\tau(n)$ fiind numărul divizorilor lui n.

d) Dacă $m_i \equiv \alpha_i \pmod k$, $(i = 1, 2, \dots, h)$, cu $0 \leqslant m_i < k$ şi

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 0 & \text{dacă } m_i = 0, \\ 1 & \text{dacă } m_i \neq 0, \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, h),$$

atunci

$$\sum_{d^k|n} \mu_k\left(\frac{n}{d^k}\right) = (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{h} \varepsilon_i}.$$

Demonstraţia este cu totul analogă celei date date de Sastry [3].

3°. Fie $\mu_n(n) = \bar{\mu}(n)$; $\bar{\mu}(n)$ este funcţie multiplicativă (facem observaţia că $\bar{\mu}(n) \neq 0$ pentru orice n natural).

Deoarece

$$\bar{\mu}(n_1 n_2) = (-1)^{\nu(n_1 \cdot n_2)},$$

$$\bar{\mu}(n_1) = (-1)^{\nu(n_1)},$$

$$\bar{\mu}(n_2) = (-1)^{\nu(n_2)},$$

în ipoteza că $(n_1, n_2) = 1$, urmează

$$\bar{\mu}(n_1 n_2) = \bar{\mu}(n_1)\, \bar{\mu}(n_2).$$

a)

$$\sum_{d|n} \bar{\mu}(n) = (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\cdots(1-\alpha_h).$$

Se deduce uşor din relaţia (2).

x fiind un număr real pozitiv, avem:

b)

$$\sum_{n \leqslant x} \bar{\mu}(n) \leqslant x - 2 \sum_{m=1}^{\left[\frac{\ln x}{\ln 2}\right]} \pi(x^{\frac{1}{m}}).$$

Deoarece există $\pi(x)$ numere $p \leqslant x$, $\pi(x^{1/2})$ numere $p^2 \leqslant x, \dots, \pi(x^{1/m})$ numere $p^m \leqslant x \left(m \text{ maxim obţinîndu-se pentru } 2^m \leqslant x, \text{ de unde } m \leqslant \frac{\ln x}{\ln 2}\right)$, înseamnă că din cei $[x]$ termeni ai sumei din primul membru, sînt cel puţin $\sum\limits_{m=1}^{\left[\frac{\ln x}{\ln 2}\right]} \pi(x^{1/m})$ termeni negativi (pentru că $\bar{\mu}(p^\alpha) = -1$); de unde rezultă inegalitatea.

4°. Dacă $\tau_1^*(n)$ este numărul divizorilor d ai numărului n pentru care $\nu(d)$ este impar, iar $\tau_2^*(n)$ este numărul acelor divizori pentru care $\nu(d)$ este par, atunci

$$\begin{aligned} \tau_1^*(n) &= \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{h} (1+\alpha_i) - \prod_{i=1}^{h} (1-\alpha_i), \\ \tau_2^*(n) &= \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{h} (1+\alpha_i) + \prod_{i=1}^{h} (1-\alpha_i). \end{aligned} \tag{5}$$

Într-adevăr, $\tau_1^*(n) + \tau_2^*(n) = \prod\limits_{i=1}^{h} (1+\alpha_i)$, iar din relaţia (3') deducem că $\tau_2^*(n) - \tau_1^*(n) = \prod\limits_{i=1}^{h} (1-\alpha_i)$, de unde găsim relaţiile (5).

5°. a)

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(ks)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu_k(n)|}{n^s} \quad (2 \leqslant k;\ \sigma > 1), \tag{7}$$

unde $\zeta(s)$ este funcţia lui Riemann definită astfel:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (s = \sigma + it) \tag{8}$$

sau

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

(seria Dirichlet (8) converge pentru $\sigma > 1$).

Membrul al doilea din (7) este o serie absolut convergentă pentru $\sigma > 1$; într-adevăr, $\left|\frac{|\mu_k(n)|}{n^s}\right| < \frac{1}{n^\sigma}$, iar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma}$ converge pentru $\sigma > 1$. Să dovedim egalitatea celor doi membri.

Dacă $f(n)$ este o funcţie multiplicativă, atunci [1]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \left\{1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots\right\}; \tag{9}$$

în cazul considerat, $f(n) = |\mu_k(n)|$, deci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu_k(n)|}{n^s} = \prod_p \left\{1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots + \frac{1}{p^{(k-1)s}}\right\};$$

dar

$$1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots + \frac{1}{p^{(k-1)s}} = \frac{\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{p^{ks}}\right)^{-1}}, \text{ adică}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_k(n)}{n^s} = \prod_p \frac{\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{p^{ks}}\right)^{-1}} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(ks)}.$$

În cazul particular $k = 2$ se obţine relaţia cunoscută

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}.$$

b) $$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\mu}(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\sum_i^h \alpha_i}}{n^s} \quad (\sigma > 1;\ n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_h^{\alpha_h}).$$

Într-adevăr $\left(\text{seria } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\mu}(n)}{n^s} \text{ este convergentă, deoarece } \left|\frac{\bar{\mu}(n)}{n^s}\right| < \frac{1}{n^\sigma}\right)$, după relaţia (9)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\mu}(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^{2s}} - \dots\right);$$

însă

$$1 - \frac{1}{p^s} - \frac{1}{p^{2s}} - \dots = 2 - \left(1 - \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots\right) = 2 - \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \frac{1 - \frac{2}{p^s}}{1 - \frac{1}{p^s}};$$

dar

$$\frac{1}{1 - \frac{2}{p^s}} = 1 + \frac{2}{p^s} + \frac{2^2}{p^{2s}} + \dots$$

Deci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\mu}(n)}{n^s} = \prod_p \frac{\left(1 + \frac{2}{p^s} + \frac{2^2}{p^{2s}} + \dots\right)^{-1}}{1 - \frac{1}{p^s}} = \frac{\zeta(s)}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\sum_{i=1}^h \alpha_i}}{n^s}},$$

adică

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\mu}(n)}{n^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\sum_i^h \alpha_i}}{n^s} = \zeta(s).$$

Ca o consecinţă ([1], p. 59) obţinem formula

$$1 = \sum_{d|n} \bar{\mu}\left(\frac{n}{d}\right) 2^{\sum_i^h \beta_i} \quad (d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \dots p_h^{\beta_h};\ 0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i;\ i = 1, 2, \dots h).$$

BIBLIOGRAFIE

1. Creangă I. ş. a. — *Introducere în teoria numerelor*. Bucureşti 1965.
2. Popovici C. P. — *O generalizare a funcţiei lui Möbius*. Stud. şi cerc. şt., Mat., XIV, 3 (1963), p. 493.
3. Sastry K. P. R. — *On the generalized type Möbius functions*. The Mathematics Student, 31, 1–2 (1963), p. 85.

A GENERALIZATION OF THE MÖBIUS FUNCTION

Summary

In the present Note the author defines the arithmetical function $\mu_k(n)$ as follows:

$$\mu_k(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } p^k/n \\ (-1)^{\nu(n)} & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1}$$

($\nu(n)$ denotes the number of prime divisors of n) and shows some properties of $\mu_k(n)$; when $k = 2$, this function coincides with the well-known Möbius function $\mu(n)$.

COVARIANCE ANALYSIS IN UNBALANCED SCHEMES

BY

ELENA NENCIU

In the analysis of variance, covariance and regression, the observation data obtained as a result of the investigation performed on a statistic characteristic are being interpreted as independent random variables subject to one and the same distribution law and admitting the representation

$$y_i = \sum_{j=1}^{p} x_{ji}\beta_j + e_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{I}$$

where

$\{y_i\}$ — values obtained through observing the characteristic to be investigated Y.

$\{e_i\}$ — observation errors which we suppose to be independent random variables subject to the law $N(0, \sigma^2)$, i. e.

$$E(e_i) = 0, \ (i = 1, 2, \ldots, n), \ E(e_i e_j) = \sigma^2 \delta_{ij} \tag{II}$$

where σ^2 is an unknown constant and δ_{ij} is Kronecker's symbol.

$\{\beta_j\}$ — unknown parameters designing the action of various constant or random factors which act upon the Y-characteristic during observation time. The β_j parameters may be either unknown constants or random variables whose distribution law depends upon other unknown parameters.

$\{x_{ji}\}$ — characteristic variables which can take the values zero or one depending on the absence or presence of the action of the factor designed by β_j.

The analysis of variance can be obtained when all $\{x_{ji}\}$ are characteristic variables. When $\{x_{ji}\}$ are not characteristic variables, but they describe continuous sets of values [1], the $\{x_{ji}\}$ variables are called independent variables; the observation data y_i are the values of the dependent variable Y and we deal with analysis of regression. It may happen that among the $\{x_{ji}\}$ there exist characteristic variables as well as independent ones. Then we obtain covariance analysis.