BIBLIOGRAPHIE

1. Green A. E. and Adkins J. E. — *Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics*. Oxford, Clarendon Press, 1960.
2. Green A. E. and Naghdi P. M. — *A general theory of an elastic-plastic continuum*. Arch. rational Mech. Anal. 18, (1965), p. 251.
3. Green A. E. and Zerna W. — *Theoretical elasticity*. Oxford, Clarendon Press, 1954.
4. Hermann L. R. — *On a general theory of viscoelasticity*. J. Franklin Inst., vol. 280 (1965), p. 244.
5. Ieşan D. — *On the linear coupled thermoviscoelasticity (sous presse)*.
6. Voltera V. — *Theory of functionals and of integral and integro-differential equations*. London and Glasgow, 1930.

ASUPRA UNEI TEORII A TERMOVISCOELASTICITĂŢII

Rezumat

Se stabilesc relaţiile între tensiuni şi deformări pentru medii viscoelastice în prezenţa unui cîmp neuniform de temperatură.

PRINCIPES VARIATIONNELS DANS LA THÉORIE DE LA THERMOÉLASTICITÉ COUPLÉE

PAR

D. IEŞAN

Les équations de la thermoélasticité couplée ont été considérées pour la première fois par Duhamel [4] en 1837. Un progrès dans l'étude de ce problème a été fait en 1956 par M. A. Biot [2] et M. Lessen [13]. Dans la même année, J. H. Weiner démontre un théorème d'unicité pour le problème de la thermoélasticité couplée, géneralisé ultérieurement par V. Ionescu-Cazimir [10], [11].

En [2], Biot a formulé un principe variationnel pour le problème dynamique de la thermoélasticité couplée qui implique les équations du mouvement et l'équation de la propagation. G. Herrman [7], en 1960, étend les principes variationnels de l'élasticité isotherme au cas de la thermoélasticité quasistatique.

En [1] sont établis les principes variationnels dans le cas des milieux isotropes. Dans ce travail nous allons établir des principes variationnels qui caractérisent complètement la solution du problème dynamique de la thermoélasticité couplée dans le cas des milieux non-homogènes et anisotropes, en étendant ainsi à la thermoélasticité, les principes variationnels établis par Gurtin [6], pour l'élastodynamique. Nous utiliserons des notations et des résultats de [6] et [9].

1. *Notions préliminaires.* Nous noterons avec E l'espace euclidien tridimensionnel et par $\bar{V}$ une région fermée et bornée contenue dans E, dont la frontière Σ est formée d'un nombre fini de surfaces régulières au sens de Kellog [12], fermées et disjointes. Soit V l'intérieur de $\bar{V}$, $\mathbf{n}$ la normale unitaire extérieure à Σ et Σ_α $(\alpha=1,2,3,4)$ des parties de Σ telles que $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma_3 \cup \Sigma_4$, $(\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \Sigma_3 \cap \Sigma_4 = \emptyset)$. Par $\bar{\Sigma}_\alpha$ on note la fermeture de Σ_α. On note avec x le point dont les coordonnées par rapport à un repère *cartésien* rectangulaire sont x_i, et avec t le temps. On notera avec $\gamma_{ijk\ldots l}$ les composantes dans un système cartésien d'un tenseur d'ordre $N \geqslant 1$; si $N=2$ on note par $\gamma_{(ij)}$ la partie symétrique de γ_{ij}.

Dans l'étude dés équations de la thermoélasticité couplée nous avons à faire à des fonctions de la position et du temps dont le domaine de definition à quatre dimensions est le produit cartésien d'un domaine spatial et d'un intervalle de temps.

Par $\bar{V} \times [0,\infty)$ nous allons comprendre la totalité des couples ordonnés (x, t) tels que $x \in \bar{V}$, $t \in [0, \infty)$.

Si f est une fonction de la position et du temps définie sur $V \times (0, \infty)$ alors on note

$$f^{(n)}_{,ij\ldots k}(x, t) = \frac{\partial^{m+n} f(x, t)}{\partial x_i \, \partial x_j \ldots \partial x_k \, \partial t^n}, \quad (x, t) \in V \times (0, \infty), \tag{1.1}$$

si ces dérivées partielles existent.

La fonction f est de classe $C^{M,N}$ si et seulement si f est une fonction définie sur $\bar{V} \times [0, \infty)$ et les fonctions

$$\underbrace{f^{(n)}_{,ij\ldots k}}_{m \text{ indices}}, \quad (m = 0, 1, \ldots, M \,;\; n = 0, 1, \ldots, N), \tag{1.2}$$

existent et sont continues sur $V \times [0, \infty)$. Les fonction $f_{,ij\ldots k}$ s'appellent les derivées spatiales de f.

Un point $(x, t) \in \Sigma \times [0, \infty)$ s'appelle régulier quand $\bar{\mathbf{n}}$ est une fonction continue de x.

Une fonction f s'appelle partiellement régulière sur $\bar{\Sigma}_\alpha \times [0, \infty)$ si et seulement si f est continue par morceaux sur $\Sigma_\alpha \times [0, \infty)$ et chaque point régulier est un point de continuité pour f. Si f et $\tilde{f}$ sont partiellement régulières sur $\bar{\Sigma}_\alpha \times [0, \infty)$ alors $f = \tilde{f}$ sur $\bar{\Sigma}_\alpha \times [0, \infty)$ si et seulement si $f(x, t) = \tilde{f}(x, t)$ en chaque point régulier $(x, t) \in \bar{\Sigma}_\alpha \times [0, \infty)$.

Nous considérons un espace linéaire $\mathfrak{L}$ et un sous-espace linéaire $\mathfrak{K}$ de $\mathfrak{L}$. Soit Ω une fonctionnelle définie sur $\mathfrak{K}$. Si $y, \tilde{y} \in \mathfrak{L}$ et

$$y + \lambda \tilde{y} \in \mathfrak{K}; \tag{1.3}$$

pour chaque λ réel, on définit d'une manière formelle

$$\delta_{\tilde{y}} \Omega \{y\} = \frac{d}{d\lambda} \Omega \{y + \lambda \tilde{y}\} \big|_{\lambda=0}. \tag{1.4}$$

La variation de Ω est nulle et nous notons cela par

$$\delta \Omega \{y\} = 0, \quad y \in \mathfrak{K}, \tag{1.5}$$

si et seulement si $\delta_{\tilde{y}} \Omega \{y\}$ existe et devient nulle pour chaque $\tilde{y}$ qui vérifie (1.3).

Soit $\mathfrak{M}$ une région de E et φ, ψ des fonctions de la position et du temps définies sur $\mathfrak{M} \times [0, \infty)$ et continues sur $[0, \infty)$ pour chaque $x \in \mathfrak{M}$. Par $\varphi * \psi$ on désigne le produit de convolution des fonctions φ et ψ défini sur $\mathfrak{M} \times [0, \infty)$

$$[\varphi * \psi](x, t) = \int_0^t \varphi(x, t - t') \, \psi(x, t') \, dt', \quad (x, t) \in \mathfrak{M} \times [0, \infty). \tag{1.6}$$

Nous énoncerons les lemmes établis par Gurtin [6], que nous utiliserons dans la suite.

Lemme 1. Si φ est une fonction continue sur $\bar{V} \times [0, \infty)$ et

$$\int_V [\varphi * \psi](x, t) \, dx = 0, \quad t \in [0, \infty),$$

pour chaque $\psi \in C^{\infty,\infty}$ qui, avec les dérivées spatiales, s'annullent sur $\Sigma \times [0, \infty)$, alors $\varphi = 0$ sur $\bar{V} \times [0, \infty)$.

Lemme 2. Si φ est une fonction partiellement régulière sur $\bar{\Sigma}_2 \times [0, \infty)$ et

$$\int_{\Sigma_2} [\varphi * \psi](x, t) \, dx = 0, \quad t \in [0, \infty),$$

pour tout $\psi \in C^{\infty,\infty}$ qui s'annule sur $\Sigma_1 \times [0, \infty)$, alors $\varphi = 0$ sur $\bar{\Sigma}_2 \times [0, \infty)$.

Lemme 3. Si φ_i sont des fonctions continues sur $\bar{\Sigma}_1 \times [0, \infty)$ et

$$\int_{\Sigma_1} [\varphi_i * (\psi_{ij} n_j)](x, t) \, dx = 0, \quad t \in [0, \infty),$$

pour tout $\psi_{ij} \in C^{\infty,\infty}$ qui, avec les dérivées spatiales, s'annulent sur $\Sigma_2 \times [0, \infty)$ et $\psi_{ij} = \psi_{ji}$, alors

$$\varphi_i = 0 \text{ sur } \bar{\Sigma}_1 \times [0, \infty).$$

Lemme 4. Si φ_i sont des fonctions partiellement régulières sur $\bar{\Sigma}_2 \times [0, \infty)$ et

$$\int_{\Sigma_2} [\varphi_i * \psi_{ij,j}](x, t) \, dx = 0, \quad t \in [0, \infty),$$

pour chaque $\psi_{ij} \in C^{\infty,\infty}$ et si $\psi_{ij} = \psi_{ji}$, alors $\varphi_i = 0$ sur $\bar{\Sigma}_2 \times [0, \infty)$.

2. *Énoncé du problème de la thermoélasticité couplée.* Soit $\bar{V}$ une région de l'espace occupée par un milieu élastique non-homogène et anisotrope. Nous noterons par $u_i(x, t)$, $e_{ij}(x, t)$, $\tau_{ij}(x, t)$ et $F_i(x, t)$ respectivement, les composantes cartésiennes du vecteur déplacement, du

tenseur déformation, du tenseur tension et de la force massique, et avec $s_i(x, t)$, $S(x, t)$, $T(x, t)$, $T_0W(x, t)$ respectivement, les composantes du vecteur déplacement du flux de l'entropie [2], [5], l'entropie mesurée par unité de volume, la température mesurée à partir de la température T_0 de l'état initial, le débit des sources intérieures de chaleur par unité de volume et unité de temps.

Les relations entre déformations et déplacements sont

$$e_{ij} = u_{(i,j)}, \text{ sur } V\times[0, \infty), \tag{2.1}$$

et la relation entre S et s_i est

$$S^{(1)} = -s_{i,i} + W, \text{ sur } V\times[0, \infty). \tag{2.2}$$

Les équations de mouvement sont

$$\tau_{ij,j} + F_i = \rho u_i^{(2)}, \quad \tau_{ij} = \tau_{ji}, \text{ sur } V\times[0, \infty) \tag{2.3}$$

et la loi de propagation est

$$s_i + \frac{k_{ij}T_{,j}}{T_0} = 0, \text{ sur } V\times[0, \infty), \tag{2.4}$$

où $\rho(x)$ est la densité du milieu et $k_{ij}(x)$ sont les composantes du tenseur de la conductibilité thermique. $(k_{ij} = k_{ji})$.

Les relations entre tensions et déformations sont

$$\tau_{ij} = c_{ijkl}\, e_{kl} - \beta_{ij}\, T, \text{ sur } V\times[0, \infty), \tag{2.5}$$

respectivement

$$e_{ij} = \varkappa_{ijkl}\, \tau_{kl} - \alpha_{ij} T, \text{ sur } V\times[0, \infty). \tag{2.6}$$

Entre S et T nous avons la relation

$$S = \beta_{ij}\, e_{ij} + \frac{hT}{T_0} \text{ sur } V\times[0, \infty). \tag{2.7}$$

Les coefficients β_{ij}, h caractérisent les propriétés thermiques du milieu et c_{ijkl} et $\varkappa_{ijkl}$ sont les coefficients élastiques. Nous avons

$$\begin{cases} c_{ijkl}\,\varkappa_{klmn} = \delta_{im}\,\delta_{jn}, \\ c_{ijkl} = c_{ijkl} = c_{klij}, \\ \varkappa_{ijkl} = \varkappa_{ijkl} = \varkappa_{klij}, \\ \alpha_{ij} = -\varkappa_{ijkl}\,\beta_{kl}, \quad \beta_{ij} = \beta_{ji}, \text{ sur } V. \end{cases} \tag{2.8}$$

En notant avec λ_{ij} les composantes du tenseur de la résistivité thermique, nous avons:

$$k_{ij}\,\lambda_{jk} = \delta_{ik}, \quad \lambda_{ij} = \lambda_{ji}, \text{ sur } V. \tag{2.9}$$

Les conditions initiales sont

$$u_i(x, 0) = d_i(x), \quad u_i^{(1)}(x, 0) = v_i(x), \quad x\in\bar{V}, \tag{2.10}$$

$$T(x, 0) = \theta(x) \text{ ou } S(x, 0) = S_0(x) = \beta_{ij}\, d_{ij} + \frac{h\theta}{T}, \quad x\in\bar{V}. \tag{2.11}$$

Nous considérons les conditions sur la surface

$$u_i = \tilde{u}_i \text{ sur } \Sigma_1\times[0, \infty), \tag{2.12}$$

$$s_i n_i = \tilde{q} \text{ sur } \Sigma_3\times[0, \infty), \tag{2.13}$$

$$P_i \equiv \tau_{ij}\, n_j = \tilde{P}_i \text{ sur } \Sigma_2\times[0, \infty), \tag{2.14}$$

$$T = \tilde{T} \text{ sur } \Sigma_4\times[0, \infty). \tag{2.15}$$

Nous supposerons que

a) $\rho(x) > 0$ et ses dérivées du premier ordre sont continues sur V,

b) $c_{ijkl}(x)$, $\varkappa_{ijkl}(x)$, $k_{ij}(x)$, $\lambda_{ij}(x)$, $\beta_{ij}(x)$, $h(x)$ ont des dérivées du premier ordre continues sur $\bar{V}$ et vérifient (2.8) et (2.9),

c) $d_i(x)$ admet des dérivées du premier ordre, continues et $v_i(x)$, $\theta(x)$ sont continues sur V.

d) $\tilde{u}_i(x, t)$ et $\tilde{T}$ sont continues sur $\bar{\Sigma}_1\times[0, \infty)$ et $\bar{\Sigma}_4\times[0, \infty)$, respectivement,

e) $\tilde{P}_i(x, t)$ et $\tilde{\rho}$ sont partiellement régulières sur $\Sigma_2\times[0,\infty)$ et $\Sigma_3\times[0,t)$, respectivement.

Le problème est de trouver un ensemble de fonctions $\{u_i, s_i, e_{ij}, S, \tau_{ij}, T\}$ définies sur $\bar{V}\times[0, \infty)$ qui vérifient les équations (2.1)–(2.7), les conditions initiales (2.10), (2.11) et les conditions sur la frontière (2.12) – (2.15).

Un ensemble de fonctions $\mathcal{A} = \{u_i, s_i, e_{ij}, S, \tau_{ij}, T\}$ s'appelle un état admissible, si les fonctions de $\mathcal{A}$ sont définies sur $\bar{V}\times[0, \infty)$ et ont les propriétés

$$\begin{cases} u_i\in C^{1,2}, \; s_i\in C^{1,0}, \; e_{ij}\in C^{0,0}, \; S\in C^{0,1}, \\ \tau_{ij}\in C^{1,0}, \; T\in C^{1,0}, \\ e_{ij} = e_{ji}, \; \tau_{ij} = \tau_{ji} \text{ sur } \bar{V}\times[0, \infty). \end{cases} \tag{2.16}$$

L'addition des états admissibles et la multiplication d'un état par un scalaire sont définies par

$$\begin{aligned} \mathcal{A} + \mathring{\mathcal{A}} &= \{u_i + \mathring{u}_i, \; s_i + \mathring{s}_i, \; e_{ij} + \mathring{e}_{ij}, \; S + \mathring{S}, \; \tau_{ij} + \mathring{\tau}_{ij}, \; T + \mathring{T}\}, \\ \lambda\mathcal{A} &= \{\lambda u_i, \; \lambda s_i, \; \lambda e_{ij}, \; \lambda S, \; \lambda\tau_{ij}, \; \lambda T\}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

et l'ensemble des états admissibles est un espace linéaire. Nous appellerons une solution du problème mixte de la thermoélasticité couplée, un état admissible qui vérifie les équations (2.1)—(2.7), les conditions initiales (2.10), (2.11) et les conditions sur la frontière (2.12) — (2.15). Nous appelons premier problème fondamental de la thermoélasticité, le problème dans lequel $\Sigma_2 = \Sigma_4 = 0$ et second problème fondamental celui où $\Sigma_1 = \Sigma_3 = 0$.

Dans ce qui suit nous nous occuperons particulièrement du problème mixte de la thermoélasticité couplée.

L'ensemble des fonctions $\{u_i, s_i\}$, ayant la propriété qu'il existe des fonctions e_{ij}, S, τ_{ij}, T, telles que $\{u_i, s_i, e_{ij}, S, \tau_{ij}, T\}$ représentent une solution du problème posé, s'appelle un champ de déplacements qui correspond à la solution d'un problème de thermoélasticité couplée. Un tenseur symétrique du second ordre τ_{ij} et une fonction T avec la propriété qu'il existe les fonctions u_i, s_i, e_{ij}, S, telles que $\{u_i, s_i, e_{ij}, S, \tau_{ij}, T\}$ représente une solution du problème, s'appelle un champ de tensions qui correspond à une solution d'un problème de la thermoélasticité couplée.

3. *Un autre énoncé du problème.* Nous caractériserons la solution du problème de la thermoélasticité couplée par des équations dont certaines contiennent les conditions initiales. On note

$$l = 1,\ g(t) = t,\ t \in [0, \infty), \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} f_i(x, t) &= [g * F_i](x, t) + \rho(x)[tv_i(x) + d_i(x)], \\ r(x, t) &= [l * W](x, t) + S_0(x), \text{ sur } V \times [0, \infty). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Théorème 1. Les fonctions $u_i \in C^{0,2}$, $s_i \in C^{1,0}$, $S \in C^{0,1}$, $\tau_{ij} \in C^{1,0}$ $(\tau_{ij} = \tau_{ji})$ vérifient les équations (2.2) et (2.3) et les conditions initiales (2.10) si et seulement si

$$S = -l * s_{i,i} + r, \text{ sur } \bar{V}\ [0, \infty), \tag{3.3}$$

$$g * \tau_{ij,i} + f_i = \rho u_i, \text{ sur } \bar{V} \times [0, \infty). \tag{3.4}$$

[9]

Démonstration. De (2.2), (2.3), grâce aux conditions initiales et compte tenu de (3.1) nous obtenons

$$[l * (-s_{i,i} + W)](x, t) = \int_0^t S^{(1)}(x, t')\, dt' = S(x, t) - S_0(x),$$

$$\begin{aligned} [g * (\tau_{ij,j} + F_i)](x, t) &= \rho(x) \int_0^t (t - t')\, u_i^{(2)}(x, t')\, dt' = \\ &= \rho(x)\, u_i(x, t) - \rho(x)[tv_i(x) + d_i(x)]. \end{aligned}$$

En tenant compte de (3.2), nous obtenons (3.3) et (3.4). En procédant inversement, nous obtenons de (3.3) et de (3.4) les équations (2.2), (2.3) et les conditions initiales (2.10), (2.11), en utilisant les propriétés du produit de convolution.

Théorème 2. Un état admissible A est une solution du problème mixte si et seulement s'il vérifie (2.1), (2.4), (2.5), (2.7), (3.3), (3.4) et les conditions sur la frontière (2.12) — (2.15).

Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème 1. A l'aide de ce théorème, la solution du problème mixte de la thermoélasticité couplée est caractérisée par les équations qui contiennent les conditions initiales.

Théorème 3. Les fonctions $u_i \in C^{2,2}$, $s_i \in C^{2,0}$ constituent un champ de déplacements qui correspond à la solution d'un problème mixte de thermoélasticité si, et seulement si

$$\begin{aligned} g * [c_{ijkl} u_{k,l} - \beta_{ij} \frac{T_0}{h}(-l * s_{k,k} - \beta_{mn} u_{m,n} + r)]_{,j} + f_i = \\ = \rho u_i, \text{ sur } V \times [0, \infty), \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$s_i + k_{ij}\left[\frac{1}{h}(-l * s_{k,k} - \beta_{mn} u_{m,n} + r)\right]_{,j} = 0, \text{ sur } V \times [0, \infty), \tag{3.6}$$

$$u_i = \tilde{u}_i \text{ sur } \Sigma_1 \times [0, \infty), \tag{3.7}$$

$$[c_{ijkl} u_{k,l} - \beta_{ij} \frac{T_0}{h}(-l * s_{k,k} - \beta_{mn} u_{m,n} + r)] n_j = \tilde{P}_i, \text{ sur } \Sigma_2 \times [0, \infty), \tag{3.8}$$

$$s_i n_i = \tilde{q} \text{ sur } \Sigma_3 \times [0, \infty), \tag{3.9}$$

$$\frac{T_0}{h}\left[-l * s_{i,i} - \beta_{mn} u_{m,n} + r\right] = \tilde{T}, \text{ sur } \Sigma_4 \times [0, \infty). \tag{3.10}$$

Démonstration. Nous supposons que u_i, s_i vérifient (3.5) — (3.10). Nous définissons e_{ij} par (2.1) et S par (3.3). Vu (2.8), en définissant T à l'aide de (2.7), on obtient

$$T = \frac{T_0}{h}[-l * s_{i,i} - \beta_{mn} u_{m,n} + r], \text{ sur } V \times [0, \infty). \tag{3.11}$$

Nous définissons τ_{ij} par les relations (2.5), où T est donnée par (3.11) et e_{ij} est défini par (2.1). Vu (2.8), les conditions sur la frontière (2.12) — (2.15) sont vérifiées grâce aux relations (3.7) — (3.10). De (3.6), et de (3.11) il résulte (2.4).

Vu (2.5), (2.8), (3.11), nous avons par suite de la relation (3.5)

$$g * \tau_{ij,j} + f_i = \rho u_i, \text{ sur } V \times [0, \infty). \tag{3.12}$$

En vertu du théorème 2, l'ensemble $\{u_i, s_i, e_{ij}, S, \tau_{ij}, T\}$ représente la solution du problème mixte. Le théorème réciproque se démontre facilement. De (2.2), (2.3) et compte tenu des conditions initiales (2.10), (2.11) nous avons, grâce au théorème 1, les relations (3.3) et (3.4) où nous avons utilisé les notations (3.1) et (3.2).

De (2.1), (2.4), (2.7), (2.8) et (3.3) nous obtenons (3.6). Les relations (2.5), (2.7), (2.8), (3.3), (3.4) donnent (3.5), (3.8) et (3.10).

Théorème 4. Les fonctions $\tau_{ij} \in C^{2,0}$, $\tau_{ij} = \tau_{ji}$, $T \in C^{0,1}$ constituent un champ de tensions qui correspond à la solution d'un problème mixte de la thermoélasticité si, et seulement si

$$[g' * \tau_{(im,m)}]_{,j)} + f'_{(i,j)} = \varkappa_{ijkl}\tau_{kl} - \alpha_{ij}T, \text{ sur } V \times [0, \infty) \tag{3.13}$$

$$l * (k_{ij}T_{,j})_{,i} - T_0\beta_{ij}(\varkappa_{ijkl}\tau_{kl} - \alpha_{ij}T) - hT = -rT_0, \text{ sur } V \times [0, \infty), \tag{3.14}$$

$$g' * \tau_{ij,j} = \tilde{u}_i - f'_i, \text{ sur } \Sigma_1 \times [0, \infty), \tag{3.15}$$

$$-\frac{k_{ij}T_{,j}n_i}{T_0} = \tilde{\rho}, \text{ sur } \Sigma_3 \times [0, \infty), \tag{3.16}$$

$$\tau_{ij}n_j = \tilde{P}_i, \text{ sur } \Sigma_2 \times [0, \infty), \tag{3.17}$$

$$T = \tilde{T}, \text{ sur } \Sigma_4 \times [0, \infty), \tag{3.18}$$

où

$$g' = \rho^{-1}(x)\, g(t), \quad f'_i(x, t) = \rho^{-1}(x) f_i(x, t). \tag{3.19}$$

Démonstration. Nous supposons que τ_{ij} et T vérifient (3.13) — (3.18) avec (3.19). Nous définissons e_{ij} par (2.6) et u_i par (3.4). Alors (3.13), (3.15) et (3.19) impliquent (2.1) et (2.12). Compte tenu de (2.8) et à l'aide de la relation (2.6) nous obtenons (2.5). Nous définissons s_i par (2.4) et S par (2.7), c_{ij} étant définis par (2.6), on voit que par suite des relations (3.14) et (3.16) on vérifie les relations (3.3) et (2.13). Les conditions du théorème 2 étant verifiées, l'ensemble $\{u_i, s_i, c_{ij}, S, \tau_{ij}, T\}$ représente la solution du problème mixte de la thermoélasticité couplée. Pour démontrer le théorème réciproque, on prouve facilement que (2.1), (2.4), (2.5), (2.7), (2.8), (3.3), (3.4) et les conditions sur la surface (2.12) — (2.15) impliquent les relations (3.13) — (3.18), avec la notation (3.19).

4. *Principes variationnels.*

Théorème 5. Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des états admissibles et $\mathfrak{A} = \{u_i, s_i, e_{ij}, S, \tau_{ij}, T\} \in \mathfrak{M}$. Si, pour chaque $t \in [0, \infty)$, nous définissons la fonctionnelle Φ_t sur $\mathfrak{M}$ par

$$\begin{aligned}
\Phi_t\{\mathfrak{A}\} = {} & \frac{1}{2}\int_V c_{ijkl}(x)\,[g * e_{ij} * e_{kl}](x, t)\,dx + \\
& + \frac{T_0}{2}\int_V \frac{1}{h(x)}[g * (S - \beta_{mn}e_{mn}) * (S - \beta_{kl}e_{kl})](x, t)\,dx + \\
& + \frac{1}{2}\int_V \rho(x)\,[u_i * u_i](x, t),\ dx + \frac{T_0}{2}\int_V \lambda_{ij}(x)\,[g * l * s_i * s_j](x, t)\,dx - \\
& - \int_V [g * \tau_{ij} * e_{ij}](x, t)\,dx - \int_V [g * S * T](x, t)\,dx + \\
& + \int_V [g * l * T_{,i} * s_i](x, t)\,dx - \int_V [(g * \tau_{ij,j} + f_i) * u_i](x, t)\,dx + \\
& + \int_V [g * T * r](x, t)\,dx + \int_{\Sigma_1} [g * P_i * \tilde{u}_i](x, t)\,dx - \\
& - \int_{\Sigma_3} [g * l * T * \tilde{q}](x, t)\,dx + \int_{\Sigma_2} [g * (P_i - \tilde{P}_i) * u_i](x, t)\,dx - \\
& - \int_{\Sigma_4} [g * l * (T - \tilde{T}) * s_i n_i](x, t)\,dx,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

alors

$$\delta\Phi_t(\mathfrak{A}) = 0, \text{ sur } \mathfrak{M}, \ t \in [0, \infty) \tag{4.2}$$

si, et seulement si $\mathfrak{A}$ est une solution du problème mixte.

Démonstration. Nous considérons $\mathring{\mathfrak{A}} = \{\mathring{u}_i, \mathring{s}_i, \mathring{e}_{ij}, \mathring{S}, \mathring{\tau}_{ij}, \mathring{T}\} \in \mathfrak{M}$. Il résulte que $\mathfrak{A} + \lambda\mathring{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{M}$ pour tout scalaire λ. Par suite de (1.4), (1.5), des relations (2.8), des propriétés du produit de convolution et des états admissibles et du théorème de la divergence, on obtient de (4.1)

$$\delta_{\mathring{\mathcal{A}}} \Phi_t \{\mathcal{A}\} = \int_V \{g * [c_{ijkl} e_{kl} - \frac{T_0}{h} \beta_{ij} (S - \beta_{mn} e_{mn}) - \tau_{ij}] *$$

$$* e_{ij}\} (x, t)\, dx + \int_V \left\{ g * \left[\frac{T_0}{h} (S - \beta_{mn} e_{mn}) - T \right] * \mathring{S} \right\} (x, t)\, dx -$$

$$- \int_V [(g * \tau_{ij,j} + f_i - \rho u_i) * \mathring{u}_i] (x, t)\, dx +$$

$$+ \int_V \{g * l * [T_0 \lambda_{ij} s_j + T_{,i}] * \mathring{s}_i\} (x, t)\, dx +$$

$$(4.3) \qquad + \int_V [g * (u_{(i,j)} - e_{ij}) * \mathring{\tau}_{ij}] (x, t)\, dx -$$

$$- \int_V [g * (S + l * s_{i,i} - r) * \mathring{T}] (x, t) dx - \int_{\Sigma_1} [g * (u_i - \tilde{u}_i) * \mathring{P}_i] (x, t)\, dx +$$

$$+ \int_{\Sigma_2} [g * l * (s_i n_i - \tilde{q}) * \mathring{T}] (x, t)\, dx + \int_{\Sigma_2} [g * (P_i - \tilde{P}_i) * \mathring{u}_i] (x, t)\, dx -$$

$$- \int_{\Sigma_4} [g * l * (T - \tilde{T}) * n_i \mathring{s}_i] (x, t)\, dx, \quad t \in [0, \infty).$$

Si $\mathcal{A}$ est la solution du problème mixte, en vertu du théorème 2, la relation (4.3) nous conduit à

$$(4.4) \qquad \delta_{\mathcal{A}} \Phi_t \{\mathcal{A}\} = 0, \qquad t \in [0, \infty) \text{ pour chaque } \mathring{\mathcal{A}} \in \mathfrak{M},$$

ce qui prouve (4.2).

Démontrons que si $\mathcal{A} \in \mathfrak{M}$ et si la relations (4.4) est vérifiée, alors $\mathcal{A}$ est la solution du problème mixte. Nous supposons que $\mathring{\mathcal{A}} = \{\mathring{u}_i, 0, \ldots, 0\}$, ainsi que $\mathring{u}_i$ et ses dérviées spatiales s'annulent sur $\Sigma \times [0, \infty)$. De (4.3), (4.4) nous obtenons

$$(4.5) \qquad \int_V [g * \tau_{ij,j} + f_i - \rho u_i) * \mathring{u}_i] (x, t)\, dx = 0, \quad t \in [0, \infty),$$

et par suite (4.5) est vraie pour chaque $\mathring{u}_i \in C^{1,2}$. De (4.5) et du lemme 1 nous obtenons (3.4). Soit $\mathring{\mathcal{A}} = \{\mathring{u}_i, 0, \ldots, 0\}$, où $\mathring{u}_i$ s'annule sur $\Sigma_1 \times [0, \infty)$. De (4.3) compte tenu de (3.4) et du lemme 2, nous obtenons

$$(4.6) \qquad g * (P_i - \tilde{P}_i) = 0 \text{ sur } \Sigma_2 \times [0, \infty).$$

Compte tenu de (3.1) et des propriétés du produit de convolution, la relation (4.6) est équivalente à (2.14). Si $\mathring{\mathcal{A}} = \{0, \mathring{s}_i, 0, \ldots, 0\}$, où s_i et ses dérivées spatiales s'annulent sur $\Sigma \times [0, \infty)$, nous obtenons, à l'aide de (4.3), la relation

$$(4.7) \qquad \int_V [g * l * (T_0 \lambda_{ij} s_j + T_{,i}) * \mathring{s}_i] (x, t)\, dx = 0, \quad t \in [0, \infty)$$

pour chaque $\mathring{s}_i \in C^{1,0}$. Vu le lemme 1, les propriétés du produit de convolution et la relation (3.1), nous obtenons de (4.7), la relation

$$(4.8) \qquad T_0 \lambda_{ij} s_j + T_{,i} = 0, \text{ sur } V \times [0, \infty).$$

Compte tenu de (2.9), la relation (4.8) est équivalente à (2.4). Si nous supposons $\mathring{\mathcal{A}} = \{0, \mathring{s}_i, 0, \ldots, 0\}$, où $\mathring{s}_i$ et ses dérivées spatiales s'annulent sur $\Sigma_3 \times [0, \infty)$ en tenant compte de (4.8) et du lemme 3, nous obtenons, de la même manière, la condition sur la frontière (2.15). Nous supposons que $\mathring{\mathcal{A}} = \{0, \ldots, 0, \mathring{S}, 0, 0\}$ où $\mathring{S}$ avec ses dérivées spatiales s'annulent sur $\Sigma \times [0, \infty)$. De (4.3) nous obtenons

$$(4.9) \qquad \int_V \left\{ g * \left[\frac{T_0}{h} (S - \beta_{mn} e_{mn}) - T \right] * \mathring{S} \right\} (x, t)\, dx = 0, \quad t \in [0, \infty),$$

pour chaque $\mathring{S} \in C^{0,1}$. De (3.1), (4.9) et compte tenu du lemme 1, nous obtenons (2.7). Si $\mathring{\mathcal{A}} = \{0, \mathring{e}_{ij}, 0, \ldots, 0\}$ où $\mathring{e}_{ij}$ et ses dérivées spatiales s'annulent sur $\Sigma \times [0, \infty)$, en tenant compte de (2.8), (4.3) et des propriétés des états admissibles, nous obtenons

$$(4.10) \qquad g * \left[c_{ijkl} e_{kl} - \frac{T_0}{h} \beta_{ij} (S - \beta_{mn} e_{mn}) - \tau_{ij} \right] = 0, \text{ sur } V \times [0, \infty).$$

En tenant compte de (3.1), des propriétés du produit de convolution et de la relation (2.7) déjà trouvée, de (4.10) nous obtenons (2.5). Soit $\mathring{\mathcal{A}} = \{0, \ldots, 0, \mathring{\tau}_{ij}, 0\}$, où $\mathring{\tau}_{ij}$ et ses dérivées spatiales s'annulent sur $\Sigma \times [0, \infty)$.

De (4.3), (3.1), des propriétés de symétrie de $\mathring{\tau}_{ij}$ et e_{ij}, du lem me 1, nous obtenons (2.1). Si $\mathring{\mathcal{A}} = \{0, \ldots, 0, \mathring{\tau}_{ij}, 0\}$, où $\mathring{\tau}_{ij}$ et ses dérivées spatiales s'annulent sur $\Sigma_2 \times [0, \infty)$, alors à l'aide de (4.3), (2.1), (3.1) et du lemme 3, nous obtenons (2.12). Nous considérons $\mathring{\mathcal{A}} = \{0, \ldots, 0, \mathring{T}\}$ où $\mathring{T}$ et ses dérivées spatiales s'annulent sur $\Sigma \times [0, \infty)$. De (4.3) et du lemme 1 nous obtenons

$$g * (S + l * s_{i,i} - r) = 0, \text{ sur } V \times [0, \infty), \tag{4.11}$$

relation qui implique (3.3). Soit $\mathring{\mathcal{A}} = \{0, \ldots, 0, \mathring{T}\}$, où $\mathring{T}$ et ses dérivées spatiales s'annulent sur $\Sigma_4 \times [0, \infty)$. Par suite de (3.3), du lemme 2 et de (3.1), nous obtenons (2.13). Nous avons montré que $\mathcal{A}$ vérifie (2.1), (2.4), (2.5), (2.7), (3.3), (3.4) et les conditions sur la frontière (2.12) — (2.15). En vertu du théorème 2, $\mathcal{A}$ est la solution du problème mixte de la thermoélasticité couplée.

Théorème 6. Soit $\mathfrak{N}$ la totalité des états admissibles qui satisfont aux relations (2.1), (3.3) et $\mathcal{A} = \{u_i, s_i, e_{ij}, S, \tau_{ij}, T\} \in \mathfrak{N}$. Si nous définissons la fonctionnelle Ψ_t sur $\mathfrak{N}$, pour chaque $t \in [0, \infty)$ par

$$\begin{aligned}
\Psi_t\{\mathcal{A}\} = & \int_V [g * \tau_{ij} * e_{ij}](x, t)\, dx + \int_V [g * S * T](x, t)\, dx - \\
& - \frac{1}{2} \int_V [g * \varkappa_{ijkl} \tau_{kl} * \tau_{ij}](x, t)\, dx + \frac{1}{2} \int_V \{g * [2\alpha_{ij} \tau_{ij} + \\
& + \left(\alpha_{ij} \beta_{ij} - \frac{h}{T_0}\right) T] * T\}(x, t)\, dx + \frac{1}{2} \int_V \rho [u_i * u_i](x, t)\, dx + \\
& + \frac{T_0}{2} \int_V [g * l * \lambda_{ij} s_j * s_i](x, t)\, dx - \int_V [f_i * u_i](x, t)\, dx - \\
& - \int_{\Sigma_1} [g * P_i * (u_i - \tilde{u}_i)](x, t)\, dx + \int_{\Sigma_2} [g * l * (s_i n_i - \tilde{q}) * T](x, t)\, dx - \\
& - \int_{\Sigma_3} [g * \tilde{P}_i * u_i](x, t)\, dx + \int_{\Sigma_4} [g * l * \tilde{T} * s_i n_i](x, t)\, dx,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

alors

$$\delta \Psi_t\{\mathcal{A}\} = 0 \text{ sur } \mathfrak{N}, \ t \in [0, \infty), \tag{4.13}$$

si et seulement si $\mathcal{A}$ est la solution du problème mixte.

Démonstration. Soit $\mathring{\mathcal{A}} = \{\mathring{u}_i, \mathring{s}_i, \mathring{e}_{ij}, \mathring{S}, \mathring{\tau}_{ij}, \mathring{T}\}$ un état admissible et supposons que

$$\mathcal{A} + \lambda \mathring{\mathcal{A}} \in \mathfrak{N} \text{ pour chaque scalaire } \lambda. \tag{4.14}$$

La condition (4.14) implique que $\mathring{\mathcal{A}}$ vérifie (2.1) et

$$\mathring{S} = -l * s_{i,i} \text{ sur } V \times [0, \infty).$$

De (4.12), (1.4), (2.1), (3.3) des propriétés du produit de convolution et du théorème de la divergence, on obtient

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathring{\mathcal{A}}} \Psi_t\{\mathcal{A}\} = & \int_V [g * (e_{ij} - \varkappa_{ijkl} \tau_{kl} + \alpha_{ij} T) * \mathring{\tau}_{ij}](x, t)\, dx + \\
& + \int_V \left\{g * \left[S + \varkappa_{ij} \tau_{ij} + \left(\alpha_{ij} \beta_{ij} - \frac{h}{T_0}\right) T\right] * \mathring{T}\right\}(x, t)\, dx - \\
& - \int_V [(g * \tau_{ij,i} + f_i - \rho u_i) * \mathring{u}_i](x, t)\, dx + \\
& + \int_V [g * l * (T_0 \lambda_{ij} s_j + T_{,i}) * \mathring{s}_i](x, t)\, dx - \\
& - \int_{\Sigma_1} [g * (u_i - \tilde{u}_i) * \mathring{P}_i](x, t)\, dx + \int_{\Sigma_2} [g * l * (s_i n_i - \tilde{q}) * \mathring{T}](x, t)\, dx + \\
& + \int_{\Sigma_3} [g * (P_i - \tilde{P}_i) * \mathring{u}_i](x, t)\, dx - \int_{\Sigma_4} [g * l * (T - \tilde{T}) * \mathring{s}_i n_i](x, t)\, dx,
\end{aligned} \tag{4.15}$$

pour $t \in [0, \infty)$.

Si $\mathcal{A}$ est la solution du problème mixte alors, grâce au théorème 2, la relation (4.15) implique

$$\delta_{\mathring{\mathcal{A}}} \Psi_t\{\mathcal{A}\} = 0, \quad t \in [0, \infty), \tag{4.16}$$

pour chaque $\mathring{\mathcal{A}}$ qui vérifie (4.14). Ainsi nous obtenons la relation (4.13). Nous supposons que $\mathcal{A} \in \mathfrak{N}$ et vérifie (4.13) et par conséquent la relation (4.15). Vu les lemmes 1, 2, 3 — en utilisant un procédé analogue à celui du théorème antérieur — nous obtenons les relations (2.6), (3.4), (2.4), (2.12) — (2.15) et

$$S = -\alpha_{ij}\tau_{ij} - \alpha_{ij}\beta_{ij}T + \frac{hT}{T_0}, \text{ sur } V \times [0,\infty). \tag{4.17}$$

Vu (2.8), de (4.17) on obtient (2.7). En tenant compte des propriétés de $\mathfrak{R}$ et en vertu du théorème 2, il résulte que $\mathcal{A}$ est la solution du problème mixte.

Si nous demandons aux états admissibles de vérifier encore d'autres équations ou des conditions sur la frontière, on peut déduire aussi d'autres principes variationnels. Ainsi, si nous appelons état admissible cinématique un état admissible qui vérifie les relations (2.1), (3.3), (2.5), (2.7) et les conditions sur la frontière (2.12) et (2.13), alors la fonctionnelle $\Phi_t\{\mathcal{A}\}$ se réduit à $\Lambda_t\{\mathcal{A}\}$, où

$$\begin{aligned}\Lambda_t\{\mathcal{A}\} = {} & \frac{1}{2}\int_V [g * c_{ijkl}e_{kl} * e_{ij}](x,t)\,dx + \\ & + \frac{1}{2T_0}\int_V h[g * T * T](x,t)\,dx + \frac{1}{2}\int_V \rho[u_i * u_i](x,t)\,dx + \\ & + \frac{T_0}{2}\int_V [g * l * \lambda_{ij}s_j * s_i](x,t)\,dx - \int_V [f_i * u_i](x,t)\,dx - \\ & - \int_{\Sigma_2} [g * \widetilde{P}_i * u_i](x,t)\,dx + \int_{\Sigma_4} [g * l * \widetilde{T} * n_i s_i](x,t)\,dx, \quad t \in [0,\infty).\end{aligned} \tag{4.18}$$

Dans ce cas nous avons le

Théorème 7. Si $\mathcal{C}$ est l'ensemble des états admissibles cinématiques et $\mathcal{A} = \{u_i, s_i, e_{ij}, S, \tau_{ij}, T\} \in \mathcal{C}$, alors

$$\delta\Lambda_t\{\mathcal{A}\} = 0 \text{ sur } \mathcal{C},\ t \in [0,\infty), \tag{4.19}$$

si, et seulement si $\mathcal{A}$ est la solution du problème mixte.

Démonstration. Nous considérons un état admissible $\mathring{\mathcal{A}} = \{\mathring{u}_i, \mathring{s}_i, \mathring{e}_{ij}, \mathring{S}, \mathring{\tau}_{ij}, \mathring{T}\}$ ainsi que

$$\mathcal{A} + \lambda\mathring{\mathcal{A}} \in \mathcal{C} \text{ pour } \lambda \text{ arbitraire}. \tag{4.20}$$

La condition (4.20) implique que $\mathring{\mathcal{A}}$ vérifie les relations (2.1), (2.5), (2.7), la relation

$$\mathring{S} = -l * \mathring{s}_{i,i} \quad \text{sur} \quad V \times [0,\infty), \tag{4.21}$$

et les conditions sur la frontière

$$\mathring{u}_i = 0 \text{ sur } \Sigma_1 \times [0,\infty),\ \mathring{s}_i n_i = 0 \text{ sur } \Sigma_3 \times [0,\infty). \tag{4.22}$$

De (2.1), (2.5), (2.7), (3.3), (2.8), (4.21), (4.22), (1.4), (4.18), à l'aide du théorème de la divergence on obtient

$$\begin{aligned}\delta_{\mathring{\mathcal{A}}}\Lambda_t\{\mathcal{A}\} = {} & -\int_V [(g * \tau_{ij,j} + f_i - \rho u_i) * \mathring{u}_i](x,t)\,dx + \\ & + \int_V [g * l * (T_0\lambda_{ij}s_j + T_{,i}) * \mathring{s}_i](x,t)\,dx + \int_{\Sigma_2} [(g * (P_i - \widetilde{P}_i) * \mathring{u}_i](x,t)\,dx - \\ & - \int_{\Sigma_4} [g * l * (T - \widetilde{T}) * n_i\mathring{s}_i](x,t)\,dx, \quad t \in [0,\infty),\end{aligned} \tag{4.23}$$

pour chaque $\mathring{u}_i \in C^{1,2}$ et $\mathring{s}_i \in C^{1,0}$ qui vérifient (4.22). Si $\mathcal{A}$ est la solution du problème mixte, grâce au théorème 2 et à l'aide de la relation (4.23) nous obtenons (4.19). Pour démontrer le théorème réciproque nous observons qu'à l'aide des relations (4.23) et (4.19), en utilisant les lemmes 1 et 2, en tenant compte du fait que $\mathcal{A} \in C$ et en vertu du théorème 2, nous obtenons que $\mathcal{A}$ est la solution du problème mixte.

Nous donnerons dans la suite des principes variationnels qui impliquent seulement des déplacements ou seulement des tensions.

Nous appelons champ de déplacements thermoélastiques admissible, l'ensemble $\mathfrak{D} = \{u_i, s_i\}$ ainsi que $u_i \in C^{1,0}$, $s_i \in C^{1,0}$.

Le champ de déplacements admissible qui vérifie les conditions sur la frontière (2.12), (2.13) s'appelle champ de déplacements thermoélastiques admissible cinématique.

Si $\mathcal{A} = \{u_i, s_i, e_{ij}, S, \tau_{ij}, T\}$ est un état admissible cinématique, alors $\mathfrak{D} = \{u_i, s_i\}$ représente un champ de déplacements admissible cinematique. Si $\mathfrak{D} = \{u_i, s_i\}$ représente un champ de déplacements admissible cinématique, il suit que $\{u_i, s_i, e_{ij}, S, \tau_{ij}, T\}$ représente un état admissible cinématique si e_{ij}, S, τ_{ij}, T sont définies par (2.1), (3.3), (2.5), (2.7). La fonctionnelle (4.18) se réduit à $\varphi_t\{\mathfrak{D}\}$, où

$$\begin{aligned}\varphi_t\{\mathfrak{D}\} = {} & \frac{1}{2}\int_V [g * c_{ijkl}u_{k,l} * u_{i,j}](x,t)\,dx + \frac{T_0}{2}\int_V [g * (-l * s_{i,i} - \beta_{mn}u_{m,n} + \\ & + r) * (-l * s_{k,k} - \beta_{ij}u_{i,j} + r)](x,t)\,dx + \frac{1}{2}\int_V \rho[u_i * u_i](x,t)\,dx + \\ & + \frac{T_0}{2}\int_V [g * l * \lambda_{ij}s_j * s_i](x,t)\,dx - \int_V [f_i * u_i](x,t)\,dx - \\ & - \int_{\Sigma_2} [g * \widetilde{P}_i * u_i](x,t)\,dx + \int_{\Sigma_4} [g * l * \widetilde{T} * s_i n_i](x,t)\,dx, \quad t \in [0,\infty).\end{aligned} \tag{4.24}$$

Ainsi on peut énoncer le

Théorème 8. Soit $\mathfrak{K}$ la totalité des champs de déplacements thermoélastiques admissibles cinématiques et soit $\mathfrak{D} = \{u_i, s_i\} \in \mathfrak{K}$. Si nous définissons pour chaque $t \in [0, \infty)$, la fonctionnelle $\varphi_t\{\mathfrak{D}\}$ sur $\mathfrak{K}$, donnée par (4.24), alors

$$\delta\varphi_t\{\mathfrak{D}\} = 0 \quad \text{sur } \mathfrak{K}, \quad t \in [0, \infty), \tag{4.25}$$

si, et seulement si $\mathfrak{D}$ est un champ de déplacements qui correspond à la solution du problème mixte.

L'ensemble $\tau = \{\tau_{ij}, T\}$, ainsi que $\tau_{ij} \in C^{0,0}$, $\tau_{ij} = \tau_{ji}$, $T \in C^{2,1}$, s'appelle champ de tensions thermoélastiques admissible.

Théorème 9. Soit Π la totalité des champs de tensions thermoélastiques admissibles et $\tau = \{\tau_{ij}, T\} \in \Pi$. Si nous définissons pour chaque $t \in [0, \infty)$ la fonctionelle Ω_t sur Π par

$$\begin{aligned}
\Omega_t\{\tau\} = {} & \frac{1}{2}\int_V [g' * \tau_{im,m} * \tau_{ij,j}](x,t)\,dx + \frac{1}{2T_0}\int_V [l * k_{ij}T_{,j} * T_{,i}](x,t)\,dx + \\
& + \frac{1}{2}\int_V \left[\varkappa_{ijkl}\tau_{kl} * \tau_{ij} - 2\alpha_{ij}\tau_{ij} * T - \left(\alpha_{ij}\beta_{ij} - \frac{h}{T_0}\right) T * T\right](x,t)\,dx - \\
& - \int_V [f'_{i,j} * \tau_{ij}](x,t)\,dx - \int_V [T * r](x,t)\,dx + \int_{\Sigma_1} [(f_i - \tilde{u}_i) * P_i](x,t)\,dx + \\
& + \int_{\Sigma_3} [l * T * \tilde{q}](x,t)\,dx + \int_{\Sigma_2} [g' * (\tilde{P}_i - P_i) * \tau_{ij,j}](x,t)\,dx + \\
& + \frac{1}{T_0}\int_{\Sigma_4} [l * (\tilde{T} - T) n_i * k_{ij} T_{,j}](x,t)\,dx, \qquad t \in [0, \infty),
\end{aligned} \tag{4.26}$$

avec g' et f'_i donnés par (3.19), alors

$$\delta\Omega_t\{\tau\} = 0 \quad \text{sur } \Pi, \quad t \in [0, \infty), \tag{4.27}$$

si et seulement si τ est un champ de tensions qui correspond à la solution du problème mixte.

Démonstration. Nous considérons $\mathring{\tau} \in \Pi$ d'où résulte que $\tau + \lambda\mathring{\tau} \in \Pi$ pour tout scalaire λ. En tenant compte de (1.5), (2.8) des propriétés de τ et du théorème de la divergence et, par suite de la relation (4.26), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathring{\tau}}\Omega_t\{\tau\} = {} & -\int_V \{(g' * \tau_{(im,m)})_{,j} + f'_{(i,j)} - \varkappa_{ijkl}\tau_{kl} + \alpha_{ij}T] * \mathring{\tau}_{ij}\}(x,t)\,dx - \\
& - \frac{1}{T_0}\int_V \{l * (k_{ij}T_{,j})_{,i} + T_0\alpha_{ij}\tau_{ij} + (T_0\alpha_{ij}\beta_{ij} - h)T + r] * \mathring{T}\}(x,t)\,dx + \\
& + \int_{\Sigma_1} [(g' * \tau_{ij,j} + f'_i - \tilde{u}_i) * \mathring{P}_i](x,t)\,dx + \\
& + \int_{\Sigma_3} \left[l * \left(\frac{k_{ij}T_{,j}n_i}{T_0} + \tilde{q}\right) * \mathring{T}\right](x,t)\,dx + \int_{\Sigma_2} [g' * (\tilde{P}_i - P_i) * \mathring{\tau}_{ij,j}](x,t)\,dx + \\
& + \frac{1}{T_0}\int_{\Sigma_4} [l * (\tilde{T} - T) n_i * k_{ij}\mathring{T}_{,j}](x,t)\,dx, \qquad t \in [0, \infty),
\end{aligned} \tag{4.28}$$

pour chaque $\mathring{\tau} \in \Pi$.

Si τ correspond à la solution du problème mixte, alors (4.28) et le théorème 4 impliquent (4.27). D'autre part, en utilisant (4.27) et (4.28) vu (2.8), les lemmes 1—4, les propriétés du produit de convolution et la symétrie de τ_{ij}, en vertu du théorème 4, il résulte que τ est un champ de tensions thermoélastiques qui correspond à la solution du problème mixte.

Un champ de tensions thermoélastiques admissible qui vérifie les conditions sur la frontière s'appelle thermodynamique admissible.

Si $\Sigma_1 = \Sigma_3 = 0$ et τ est un champ de tensions admissible thermodynamique, alors la fonctionelle (4.26) se réduit à $\omega_t\{\tau\}$, où

$$\begin{aligned}
\omega_t\{\tau\} = {} & \frac{1}{2}\int_V [g' * \tau_{im,m} * \tau_{ij,j}](x,t)\,dx + \frac{1}{2T_0}\int_V [l * k_{ij}T_{,j} * T_{,i}](x,t)\,dx + \\
& + \frac{1}{2}\int_V \left[\varkappa_{ijkl}\tau_{kl} * \tau_{ij} - 2\alpha_{ij}\tau_{ij} * T - \left(\alpha_{ij}\beta_{ij} - \frac{h}{T_0}\right) T * T\right](x,t)\,dx - \\
& - \int_V [f'_{i,j} * \tau_{ij}](x,t)\,dx - \int_V [T * r](x,t)\,dx.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Théorème 10. Soit $\mathfrak{L}$ la totalité des champs de tensions thermoélastiques admissibles, thermodynamiques. Si $\tau = \{\tau_{ij}, T\} \in \mathfrak{L}$, $\Sigma_2 = \Sigma_4 = \Sigma$ et si pour chaque $t \in [0, \infty)$ nous définissons la fonctionelle ω_t sur $\mathfrak{L}$ par (4.29), alors

$$\delta\omega_t\{\tau\} = 0 \quad \text{sur } \mathfrak{L}, \quad t \in [0, \infty), \tag{4.30}$$

si et seulement si τ est un champ de tensions qui correspond à la solution du deuxième problème fondamental de la thermoélasticité couplée.

Démonstration. Soit $\overset{\circ}{\tau}$ un champ de tensions thermoélastiques admissible et supposons que

$$\tau + \lambda \overset{\circ}{\tau} \in \mathcal{E}, \text{ pour chaque } \lambda \text{ réel.} \tag{4.31}$$

De (4.31) nous obtenons

$$\overset{\circ}{P}_i = 0, \quad \overset{\circ}{T} = 0 \text{ sur } \Sigma \times [0, \infty). \tag{4.32}$$

Si τ correspond à la solution du problème, la relation (4.30) est vérifiée par suite du théorème 9.

D'autre part, vu (1.4), (2.8), (4.32), (4.30), le théorème de la divergence, le lemme I et le théorème 4, il résulte que τ est un champ de tensions thermoélastiques qui correspond à la solution du deuxième problème fondamental de la thermoélasticité couplée.

BIBLIOGRAPHIE

1. Балабух, Л. И., Шаповалов, Л. А.—*О вариационных уравнениях термоупругости.* ПММ, 24 (1960), стр. 703.
2. Biot, M.A. — *Thermoelasticity and irreversible thermodynamics*, J. Appl. Phys., 27 (1956), p. 240.
3. Chadwick, P. — *Thermoelasticity. The dynamical theory.* Progress in Solid Mechanics, vol. I (1960), p. 265.
4. Duhamel, J. M. C. — *Second Mémoire sur les phénomènes thermomécaniques*, J. de l'École Polyt., 15 (1837), p. 1 — 57.
5. Freudental, A. M. and Geiringer, H. — *The mathematical theories of the inelastic continuum.* In *Handbuch der Physik*, Band VI, Springer-Verlag, 1958.
6. Gurtin M. E. — *Variational Principles for Linear Elastodynamics.* Arch. Rational Mech. Anal., 16 (1964), p. 34.
7. Herrmann, G. — *On variational principles in thermoelasticity and heat conduction.* Quart. Appl. Math. 21 (1963), p. 151.
8. Hai-Changu Hu — *On some variational principles in the theory of elasticity and the theory of plasticity.* Scientia Sinica 4 (1955), p. 33.
9. Ignaczak J. — *A completenes problem for stress equations of motion in the linear elasticity theory.* Arch. Mech. Stos. 15 (1963), 2, p. 225.
10. Ionescu-Cazimir, V. — *Problem of linear coupled thermoelasticity.* III. *Uniqueness theorem.* Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci techn., 12 (1964), p. 565.
11. Ionescu-Cazimir, V. — *Problem of linear coupled thermoelasticity.* IV. *Uniqueness theorem.* Bull., Acad. Polon. Sci., Sér. sci. thehn., 12 (1964), p. 575.
12. Kellog, O. D. — *Foundations of potential theory*, Berlin, 1929.
13. Lessen M. — *The motion of a thermoelastic solid.* Quart. Appl. Math., 15 (1957), p. 105.
14. Mikusinski, J. — *Operational Calculus.* New York, Pergamon, 1959.
15. Reissner E. — *On variational theorems in elasticity.* J. of Math. and Phys., 29 (1950), 2, p. 90.
16. Weiner, J. H. — *A uniqueness theorem for the coupled thermoelastic problem.* Quart. Appl. Math., 15 (1957), p. 102.

PRINCIPII VARIAŢIONALE ÎN TEORIA TERMOELASTICITĂŢII CUPLATE

Rezumat

Se extind principiile variaţionale stabilite de M. E. Gurtin în [6] a cazul termoelasticităţii cuplate.

TRANSFORMĂRI DE SISTEME FOTOMETRICE (I). EXPRIMAREA MAGNITUDINILOR STELELOR DIN BD ÎN SISTEMELE FOTOMETRICE ALE CATALOGULUI KIEV—1962

DE

V. NADOLSCHI, D. DOROHOI şi ŞT. GURIŢĂ

1. Se ştie că între magnitudinile m_1 şi m_2 ale unei stele din două sisteme heterocromatice există relaţia:

$$m_1 = \left(K_1 - \frac{S_1}{S_2} K_2\right) + \frac{S_1}{S_2} m_2 - s_1 \log \frac{\int_0^\infty I(\lambda)\, \varphi_1(\lambda)\, d\lambda}{\int_0^\infty I(\lambda)\, \varphi_2(\lambda)\, d\lambda}, \tag{1}$$

în care K_1, K_2, s_1, s_2 sînt constante, $I(\lambda)$ = intensitatea specifică a stelei, φ_i = produsele dintre coeficienţii caracteristici (funcţii de λ) p_i, q_i, r_i şi coeficienţii $z_i(\lambda)$ de sensibilitate a receptorului de radiaţie.

Dacă se dezvoltă $I(\lambda)$ în serie Taylor în vecinătatea lui

$$\lambda_1 = \frac{\int_0^\infty \lambda \varphi_1(\lambda)\, d\lambda}{\int_0^\infty \varphi_1(\lambda)\, d\lambda}$$ (la numărător) şi în vecinătatea lui

$$\lambda_2 = \frac{\int_0^\infty \lambda \varphi_2(\lambda)\, d\lambda}{\int_0^\infty \varphi_2(\lambda)\, d\lambda}$$ (la numitor) atunci, dacă se pot neglija valorile deri-