$$F_A = \frac{S'^2_{y_A}}{S'^2_{y_R}} \text{ has } F\text{-distribution with } k_1 = v - 2, \quad k_2 = n_{..} - rv - 1 \text{ degrees of freedom,}$$

$$F_B = \frac{S'^2_{y_B}}{S'^2_{y_R}} \text{ has } F\text{-distribution with } k_1 = r - 2, \; k_2 = n_{..} - rv - 1 \text{ degrees of freedom,} \tag{64}$$

$$F_I = \frac{S'^2_{y_I}}{S'^2_{y_R}} \text{ has } F\text{-distribution with } k_1 = rv - r - v, \; k_2 = n_{..} - rv - 1 \text{ degrees of freedom,}$$

$$F_{ABIR} = \frac{S'^2_{y_{ABIR}}}{S'^2_{y_R}} \text{ has } F\text{-distribution with } k_1 = 1, \; k_2 = n_{..} - rv - 1 \text{ degrees of freedom.}$$

By means of (64) we may verify hypotheses concerning the A and B factor influence or their interaction over the random variable Y.

BIBLIOGRAPHY

1. Шеффе Г. — *Дисперсионный анализ*, Москва, 1963.
2. Романовский В. И. — *Математическая статистика*, Ташкент 1963.

ANALIZA COVARIAŢIONALĂ ÎN SCHEME NEECHILIBRATE

Rezumat

Analiza covariaţională creată de R. Fisher pune următoarea problemă: a studia simultan cîţiva indici, legaţi unul de altul şi aflaţi sub acţiunea mai multor factori.

În Nota de faţă, pornind de la ecuaţia unui model liniar, cu factori constanţi, aflată în [1], se arată o cale de efectuare a analizei covariaţionale într-o schemă neechilibrată în două cazuri:

a) cazul lipsei interacţiunii între factori,

b) cazul prezenţei interacţiunii între factori.

Mai întîi, în ambele cazuri, s-au găsit estimaţii pentru parametri necunoscuţi şi apoi s-au dat criterii de verificare a diferitelor ipoteze relativ la acţiunea factorilor ce acţionează asupra caracteristicii de cercetat. În cazul particular, cînd coeficientul de regresie γ este egal cu zero, se obţine analiza dispersională neechilibrată.

Considerarea analizei covariaţionale după o schemă neechilibrată este cerută de aplicaţiile practice în scopul economisirii numărului de experienţe.

UNE MESURE DANS LE PLAN ASSOCIÉE A UNE CLASSE D'APPLICATIONS ISOTONES

PAR

OLGA COSTINESCU

Dans le cas linéaire, on connaît le rapport qui existe entre les mesures Stieltjes et les fonctions réelles à variation finie (voir [3], p. 242 — 249).

Il est évident qu'en général on ne peut pas poser un tel problème dans R_n, $n > 1$; pourtant, si on introduit une relation d'ordre, „ $<$ ", par le procédé indiqué dans [1] et si on considère des fonctions définies sur $(R_n, <)$ à valeurs dans R, isotones dans le sens de l'ordre indiqué plus haut, alors on peut associer à une telle fonction une mesure régulière (voir [4]). Le but de cette Note est de résoudre ce problème.

Dans ce qui suit nous considérons le cas $n = 2$; naturellement, le procédé employé peut être utilisé en général pour R_n quel que soit $n \geqq 2$.

Soit X un domaine dans R_2; supposons que les ensembles $(X_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, $X_\gamma \subset X$, considérés dans la Note [1] satisfont aux conditions:

(a) $X_\gamma = \bar{X}_\gamma$, $\gamma \in \Gamma$.

(b) $\forall \gamma \in \Gamma$, X_γ est un ensemble connexe.

(c) Chaque ensemble X_γ détermine sur X deux sous-ensembles, P_γ et Q_γ, simplement connexes, de manière que

$$X = X_\gamma \cup P_\gamma \cup Q_\gamma, \quad P_\gamma \cap Q_\gamma = \emptyset, \quad X_\gamma \cap P_\gamma = \emptyset, \quad X_\gamma \cap Q_\gamma = \emptyset. \tag{1}$$

(d) Pour chaque $\gamma \in \Gamma$, $X_\gamma = \mathrm{Fr}\, P_\gamma$, $X_\gamma = \mathrm{Fr}\, Q_\gamma$.

(e) Quel que soit $x \in X$, il existe un ensemble unique X_γ, tel que $x \in X_\gamma$.

On considère l'ensemble X doué de la topologie τ induite par la topologie habituelle τ donnée sur R_2, et on introduit dans l'espace (X, τ) les P-voisinages et les Q-voisinages (voir [1]); en utilisant les mêmes notations que celles employées dans cette Note, on a

$$\begin{cases} \mathfrak{P}_\gamma = P_\gamma \cup X_\gamma \quad \mathfrak{Q}_\gamma = Q_\gamma \cup X_\gamma, \quad \mathfrak{P}_x = \bigcap\limits_{\gamma : x \in P_\gamma} \mathfrak{P}_\gamma, \quad \mathfrak{Q}_x = \bigcap\limits_{\gamma : x \in Q_\gamma} \mathfrak{Q}_\gamma, \\ W_x^P = (\complement \mathfrak{Q}_x) \cap W_x, \quad W_x^Q = (\complement \mathfrak{P}_x) \cap W_x, \quad W_x \in \mathcal{V}(x). \end{cases} \tag{2}$$

Si pour deux points $x_1, x_2 \in X$, on a

$$\mathfrak{A}_{x_1} \subset \mathfrak{A}_{x_2},$$

alors on dit que ces deux points se trouvent dans la relation

$$x_1 < x_2. \tag{3}$$

Évidemment cette relation dirige l'ensemble X.

De même, soit $D \subset X$ un ensemble qui satisfait aux conditions

$$(\alpha) \quad \begin{cases} D \text{ est connexe et fermé en } X, \\ \text{cet ensemble rencontre chaque } X_\gamma \text{ en un seul point } d_\gamma, \text{ donc} \\ \forall \gamma \in \Gamma, \quad D \cap X_\gamma = \{d_\gamma\}. \end{cases}$$

On associe à chaque élément d_γ, $\gamma \in \Gamma$, les ensembles $X_{d_\gamma} = X_\gamma$, $P_{d_\gamma} = P_\gamma$, $Q_{d_\gamma} = Q_\gamma$, et quel que soit $d_{\gamma'}$ $\gamma' \in \Gamma$, tel que $d_{\gamma'} \in P_\gamma$, on considère l'ensemble

$$E_{\gamma\gamma'} = P_\gamma - P_{\gamma'}. \tag{4}$$

Si $\mathcal{A}$ est la famille $\{E_{\gamma\gamma'}\} \cup \{\emptyset\}$, $\gamma, \gamma' \in \Gamma$, $d_{\gamma'} \in P_\gamma$, alors on voit aisément que cette famille est un sémi-clan.

Soit $f: X \to R$ une application isotone, bornée et définie sur l'ensemble dirigé X. Du fait que f est isotone, il résulte que pour chaque $x \in X$, cette application admet une P-limite (et une Q-limite) unique, notée par $L_f^P(x)$ (resp. $L_f^Q(x)$) (voir [1], théorème 3).

Alors, on définit une fonction d'ensemble, $m: \mathcal{A} \to R$, par les relations:

$$m(E_{\gamma\gamma'}) = L_f^P(d_\gamma) - L_f^P(d_{\gamma'}), \tag{5}$$

$$m(\emptyset) = 0. \tag{6}$$

Il résulte immédiatement que la fonction m est additive et positive, donc elle peut être prolongée d'une manière unique à une fonction d'ensemble m, additive, définie sur le clan $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ engendré par la classe $\mathcal{A}$,

$$m: \mathcal{C}(\mathcal{A}) \to R.$$

Compte tenu du fait que f est isotone, et des propriétés de la variation d'une fonction d'ensemble définie sur un clan, il résulte que m est une fonction à variation finie (voir [3], p. 39—42).

Soit $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ tels que $d_{\gamma'} \in P_\gamma$ et $E_{\gamma\gamma'}^{(1)}$, $E_{\gamma\gamma'}^{(2)}$, $E_{\gamma\gamma'}^{(3)}$ les ensembles introduits par les relations

$$\begin{cases} E_{\gamma\gamma'}^{(1)} = \mathfrak{A}_\gamma - P_{\gamma'}, \\ E_{\gamma\gamma'}^{(2)} = P_\gamma - \mathfrak{A}_{\gamma'}, \\ E_{\gamma\gamma'}^{(3)} = \mathfrak{A}_\gamma - \mathfrak{A}_{\gamma'}. \end{cases} \tag{6}$$

On peut formuler maintenant le résultat principal de ce travail:

Théorème. *Quelle que soit l'application isotone $f: (X, <) \to R$, et quel que soit l'ensemble $D \subset X$ satisfaisant aux conditions (α) il existe une mesure régulière unique*

$$m_1: \mathcal{S}(\mathcal{A}) \to R_+$$

définie sur la semi-tribu $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ engendrée par la classe $\mathcal{A}$ telle qu'on ait

$$(\beta) \quad \begin{cases} m_1(E_{\gamma\gamma'}^{(1)}) = L_f^Q(d_\gamma) - L_f^P(d_{\gamma'}), \\ m_1(E_{\gamma\gamma'}^{(2)}) = L_f^P(d_\gamma) - L_f^Q(d_{\gamma'}), \\ m\ (E_{\gamma\gamma'}^{(3)}) = L_f^Q(d_\gamma) - L_f^Q(d_{\gamma'}). \end{cases}$$

Pour établir ce résultat il faut démontrer les deux propositions suivantes:

Proposition 1. *La fonction $m: \mathcal{C} \to R$ est régulière à gauche sur le clan $\mathcal{C}(\mathcal{A})$.*

Démonstration. Nous démontrons que quel que soit $A \in \mathcal{C}$ et quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, il existe un compact K en X tel que $K \subset A$ et pour chaque $B \in \mathcal{C}$, $B \subset A - K$ on a

$$m(B) < \varepsilon. \tag{7}$$

Soit $A \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$, alors $A = \bigcup_{\gamma=1}^{n} E_{\gamma\gamma'}$, $E_{\gamma\gamma'} \in \mathcal{A}$ et $E_{\gamma\gamma'} \cap E_{\alpha\alpha'} = 0$, quel que soit $(\gamma, \gamma') \neq (\alpha, \alpha')$.

Vu que l'application f est isotone, et compte tenu du théorème 4 démontré dans [2], il résulte que quel que soit $\varepsilon > 0$ et d_γ, il existe $\gamma'' \in \Gamma$, $d_{\gamma''} \in P_\gamma$, tel que f soit P-continu sur l'ensemble $X_{\gamma''}$ et

$$L_f^P(d_\gamma) - f(d_{\gamma''}) < \frac{\varepsilon}{n}. \tag{8}$$

A chaque ensemble $E_{\gamma\gamma'}$, $1 \leqq \gamma \leqq n$, on associe un compact $K_{\gamma\gamma'} \subset E_{\gamma\gamma'}$, en considérant

$$K_{\gamma\gamma'} = \mathfrak{A}_{\gamma''} - P_{\gamma'}. \tag{9}$$

La réunion $\bigcup_{\gamma=1}^{n} K_{\gamma\gamma'} = K$ est un ensemble compact et

$$K \subset A, \quad A - K = \bigcup_{\gamma=1}^{n} (P_\gamma - \mathfrak{A}_{\gamma''}). \tag{10}$$

Si B est un ensemble quelconque du clan $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ satisfaisant à la condition $B \subset A - K$, alors

$$(11) \qquad m(B) \leqq \sum_{\gamma=1}^{n} m(E_{\gamma\gamma'}) = \sum_{\gamma=1}^{n} [L_f^P(d_\gamma) - L_f^P(d_{\gamma'})] = \sum_{\gamma=1}^{n} [L_f^P(d_\gamma) - f(d_{\gamma'})].$$

Des relations (8) et (11) il résulte

$$(12) \qquad m(B) < \varepsilon;$$

l'ensemble considéré A est donc régulier à gauche par rapport à la fonction m (voir [3], p. 204), et vu que A est un ensemble arbitraire en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, il suit que m est régulière à gauche sur le clan $\mathcal{C}(\mathcal{A})$.

De cette propriété de la fonction m et du fait que $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ satisfait à la condition

(i) quel que soit $A \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$ il existe $A' \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$ de manière que $A \subset \mathring{A}'$,

il résulte que m est régulière sur $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, (voir [3], p. 201).

Proposition 2. *La fonction d'ensemble* $m: \mathcal{C}(\mathcal{A}) \to R$ *est une mesure sur le clan* $\mathcal{C}(\mathcal{A})$.

Démonstration. Soit $(A_n)_{n \in N}$ une suite d'ensembles telle que

$$A_n \in \mathcal{C}(\mathcal{A}), \quad A_i \cap A_j = 0, \quad i \neq j, \quad \text{et} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \in \mathcal{C}(\mathcal{A}); \text{ donc}$$

$$A = \bigcup_{\gamma=1}^{h} E_{\gamma\gamma'}, \quad E_{\gamma\gamma'} \in \mathcal{C}, \quad E_{\gamma\gamma'} \cap E_{\alpha\alpha'} = 0, \quad (\gamma, \gamma') \neq (\alpha, \alpha'), \quad 1 \leqq \gamma, \ \alpha \leqq h.$$

Alors, quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, il existe (conformément à ce que nous avons précisé dans la démonstration de la proposition 1), pour chaque γ, $1 \leqq \gamma \leqq h$, un ensemble compact $K_{\gamma\gamma'}$, tel que $d_{\gamma'} \in P_\gamma$,

$$K_{\gamma\gamma'} = \mathfrak{A}_{\gamma'} - P_\gamma, \quad K_{\gamma\gamma'} \subset E_{\gamma\gamma'}, \quad \text{et} \quad L_f^P(d_\gamma) - f(d_{\gamma'}) < \frac{\varepsilon}{2^h}.$$

Il résulte alors que l'ensemble $K = \bigcup_{\gamma=1}^{h} K_{\gamma\gamma'}$ est un ensemble compact, $K \subset A$ et

$$(13) \qquad m[(A - K) \cup (\bigcup_{\gamma'=1}^{h} X_{\gamma'})] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour chaque A_n de la suite considérée, il existe un ensemble $A'_n \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$ de façon que $A_n \subset \mathring{A}'_n$ et

$$(14) \qquad m[A'_n - A_n] < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

L'existence d'un tel ensemble A'_n résulte du fait que l'application f est P-continue et Q-continue en X à l'exception des points qui appartiennent

à une famille dénombrable d'ensembles X_γ (voir [2] théorème 4). L'idée utilisée dans la démonstration est calquée sur celle qui a été utilisée pour prouver l'existence des ensembles $K_{\gamma\gamma'}$ (proposition 1). Du fait que l'ensemble K est compact et $K \subset A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathring{A}'_n$, il résulte qu'il existe $n_0 \in N$, de manière que

$$(15) \qquad K \subset \bigcup_{n=1}^{n_0} \mathring{A}'_n,$$

donc

$$(16) \qquad \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) &\geqq \sum_{n=1}^{\infty} m(A'_n) - \frac{\varepsilon}{2} \geqq \sum_{n=1}^{n_0} m(A'_n) - \frac{\varepsilon}{2} \geqq \\ &\geqq m(K - \bigcup_{\gamma'=1}^{h} X_{\gamma'}) - \frac{\varepsilon}{2}; \end{aligned}$$

d'ici et de la relation (13), on obtient

$$(17) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \geqq m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) - \varepsilon,$$

et donc, parce que ε est un nombre positif arbitraire, on a

$$(17') \qquad \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \geqq m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n).$$

Compte tenu du fait que m est aussi suradditive, on conclut que

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n),$$

donc la fonction $m: \mathcal{C}(\mathcal{A}) \to R_+$ est une mesure sur $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, q.e.d.

Si m^* est la mesure extérieure engendrée par m, alors $m^*/\mathcal{S}(\mathcal{A})$ est une mesure sur $\mathcal{S}(\mathcal{A})$, notée par m_1.

Il reste à démontrer que cette fonction satisfait aux conditions (β).

Étant donnés les points d_γ, $d_{\gamma'}$ tels que $d_{\gamma'} \in P_\gamma$, on considère l'ensemble $E^{(1)}_{\gamma\gamma'} = \mathfrak{A}_\gamma - P_{\gamma'}$; du théorème 4 de [2], il résulte qu'il y a une suite $(\gamma_n)_{n \in N}$ formée des indices $\gamma_n \in \Gamma$ telle que

a) les ensembles correspondants, P_γ, satisfont aux conditions

$$P_{\gamma_n} \supset P_{\gamma_{n+1}} \supset \mathfrak{A}_\gamma,$$

quel que soit $n \in N$,

b) sur chaque ensemble X_{γ_n}, la fonction f est continue,

c) $\lim_n d_{\gamma_n} = d_\gamma$.

Alors la suite $(E_{\gamma_n\gamma'})_{n \in N}$ est une suite décroissante et

(18) $$E^{(1)}_{\gamma\gamma'} = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{\gamma_n \gamma'}.$$

Il résulte $E^{(1)}_{\gamma\gamma'} \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$.

Du fait que la fonction d'ensemble m_1 est une mesure sur $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ et l'application $f : X \to R$ est isotone et continue sur les ensembles X_{γ_n}, on déduit

(19) $$m_1(E^{(1)}_{\gamma\gamma'}) = L^Q_f(d_\gamma) - L^P_f(d_{\gamma'}).$$

D'une manière analogue, on démontre aussi les autres relations (β).

Remarques. 1. La mesure introduite ne dépend pas du comportement de la fonction f sur une famille dénombrable d'ensembles X_γ.

2. A une fonction isotone $f : X \to R$ et à une famille d'ensembles D qui satisfait aux conditions (α), on peut associer une famille de mesures du type mentionné dans le théorème démontré plus haut.

BIBLIOGRAPHIE

1. Costinescu O. — *Asupra unei clase de aplicaţii dirijate.* An. şt. Univ. Iaşi, t. VI, 1960 p. 531—539.
2. Costinescu O. — *Extension d'un théorème de Young à une classe d'applications dirigées.* Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées, Bucureşti, t. IV, 1964 p. 357—361.
3. Dinculeanu N. — *Teoria măsurii şi funcţii reale.* Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1964.
4. Dinculeanu N. — *On regular vector mesures.* Acta scientiarum mathematicarum, t. XXIV, 1963 p. 236—243.

O MĂSURĂ ÎN PLAN ASOCIATĂ UNEI CLASE DE APLICAŢII IZOTONE

Rezumat

Lucrarea prezentă tratează în R^2, dotat cu topologia obişnuită, o problemă analogă aceleia în cadrul căreia se studiază legătura care există între măsurile Stieltjes şi funcţiile reale cu variaţie finită (vezi [3], p. 244—249). În acest scop, se introduce pe R^2 o relaţie de ordine prin procedeul indicat în [1], şi se consideră funcţii reale definite în R^2, izotone în sensul ordinii amintite; acestei clase de funcţii i se asociază o clasă de măsuri regulate.

Rezultatul principal este formulat în

Teorema: Oricare ar fi aplicaţia izotonă $f : (X, <) \to R$, şi oricare ar fi mulţimea $D \subset X$ care satisface condiţiile (α) există o măsură regulată unică

$$m_1 : \mathcal{S}(\mathcal{A}) \to R_+$$

astfel încît să fie îndeplinite condiţiile (β).

ŞIRURI SLAB APROAPE-PERIODICE

DE

N. GHEORGHIU

Luigi Amerio [1] a introdus noţiunea de funcţie slab aproape-periodică (s.a.-p.), noţiune care se arată fructuoasă, după cum se vede din lucrările [2], [3], [8].

În această Notă introducem noţiunea de şir s.a.-p., stabilim proprietăţile generale analoge cu cele ale funcţiilor s.a.-p. şi demonstrăm două teoreme V, VI, una de caracterizare a şirurilor s.a.-p. prin funcţii s.a.-p. cealaltă de caracterizare a funcţiilor s.a.-p. cu şiruri s.a.-p. Pentru informare asupra funcţiilor a.p. şi şirurilor a.p. în sensul lui Bohr, indicăm [4—7].

Notaţii: X spaţiu Banach complex cu elemente x de normă $\|x\|$, X^* dualul cu elemente x^* de normă $\|x^*\|$, I mulţimea numerelor reale întregi, J mulţimea numerelor reale, $x = \varphi(p)$, $(p \in I)$, un şir $\varphi : I \to X$, $x = f(t)$, $(t \in J)$, o funcţie $f : J \to X$.

Definiţii: Funcţia f se numeşte s.a.-p. dacă[1]) $x^* \circ f$ este a. p. în sensul lui Bohr pentru orice $x^* \in X^*$. Şirul φ se numeşte s.a.-p. dacă $x^* \circ \varphi$ este şir a. p. [7] pentru orice $x^* \in X^*$.

Teoria şirurilor s.a.-p. poate fi dezvoltată independent de teoria funcţiilor s.a.-p. Dar întrucît vom stabili teoreme de caracterizare ale unora prin celelalte şi cum este şi mai comod, vom utiliza rezultatele de la funcţii s.a.-p. stabilite în [1].

Dacă φ este un şir, atunci cu $\bar{\varphi}$ vom nota funcţia poligonală definită prin

(1) $$\bar{\varphi}(t) = \varphi(p) + (t - p)(\varphi(p+1) - \varphi(p)), \quad t \in [p, p+1], \ p \in I.$$

I. *Dacă φ este şir s.a.-p., atunci $\bar{\varphi}$ este funcţie s.a.-p.*

Fie τ o $\varepsilon/3$ aproape-perioadă pentru şirul $x^* \circ \varphi$. Din $p \leqslant t < p+1$, urmează $p + \tau \leqslant t + \tau < p + 1 + \tau$ şi $x^*(\bar{\varphi}(t+\tau)) - x^*(\bar{\varphi}(t)) = \{x^*(\varphi(p + \tau)) - x^*(\varphi(p))\} + (t - p)[\{x^*(\varphi(p+1+\tau)) - x^*(\varphi(p+1))\} -$

1) Semnul „$\circ$" indică compunerea obişnuită a două funcţii.