(18) $$E^{(1)}_{\gamma\gamma'} = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{\gamma_n \gamma'}.$$

Il résulte $E^{(1)}_{\gamma\gamma'} \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$.

Du fait que la fonction d'ensemble m_1 est une mesure sur $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ et l'application $f : X \to R$ est isotone et continue sur les ensembles X_{γ_n}, on déduit

(19) $$m_1(E^{(1)}_{\gamma\gamma'}) = L^Q_f(d_\gamma) - L^P_f(d_{\gamma'}).$$

D'une manière analogue, on démontre aussi les autres relations (β).

Remarques. 1. La mesure introduite ne dépend pas du comportement de la fonction f sur une famille dénombrable d'ensembles X_γ.

2. A une fonction isotone $f : X \to R$ et à une famille d'ensembles D qui satisfait aux conditions (α), on peut associer une famille de mesures du type mentionné dans le théorème démontré plus haut.

BIBLIOGRAPHIE

1. Costinescu O. — *Asupra unei clase de aplicaţii dirijate*. An. şt. Univ. Iaşi, t. VI, 1960 p. 531—539.
2. Costinescu O. — *Extension d'un théorème de Young à une classe d'applications dirigées*. Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées, Bucureşti, t. IV, 1964 p. 357—361.
3. Dinculeanu N. — *Teoria măsurii şi funcţii reale*. Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1964.
4. Dinculeanu N. — *On regular vector mesures*. Acta scientiarum mathematicarum, t. XXIV, 1963 p. 236—243.

O MĂSURĂ ÎN PLAN ASOCIATĂ UNEI CLASE DE APLICAŢII IZOTONE

Rezumat

Lucrarea prezentă tratează în R^2, dotat cu topologia obişnuită, o problemă analogă aceleia în cadrul căreia se studiază legătura care există între măsurile Stieltjes şi funcţiile reale cu variaţie finită (vezi [3], p. 244—249). În acest scop, se introduce pe R^2 o relaţie de ordine prin procedeul indicat în [1], şi se consideră funcţii reale definite în R^2, izotone în sensul ordinii amintite; acestei clase de funcţii i se asociază o clasă de măsuri regulate.

Rezultatul principal este formulat în

Teorema: Oricare ar fi aplicaţia izotonă $f : (X, <) \to R$, şi oricare ar fi mulţimea $D \subset X$ care satisface condiţiile (α) există o măsură regulată unică

$$m_1 : \mathcal{S}(\mathcal{A}) \to R_+$$

astfel încît să fie îndeplinite condiţiile (β).

ŞIRURI SLAB APROAPE-PERIODICE

DE

N. GHEORGHIU

Luigi Amerio [1] a introdus noţiunea de funcţie slab aproape-periodică (s.a.-p.), noţiune care se arată fructuoasă, după cum se vede din lucrările [2], [3], [8].

În această Notă introducem noţiunea de şir s.a.-p., stabilim proprietăţile generale analoge cu cele ale funcţiilor s.a.-p. şi demonstrăm două teoreme V, VI, una de caracterizare a şirurilor s.a.-p. prin funcţii s.a.-p. cealaltă de caracterizare a funcţiilor s.a.-p. cu şiruri s.a.-p. Pentru informare asupra funcţiilor a.p. şi şirurilor a.p. în sensul lui Bohr, indicăm [4—7].

Notaţii: X spaţiu Banach complex cu elemente x de normă $\|x\|$, X^* dualul cu elemente x^* de normă $\|x^*\|$, I mulţimea numerelor reale întregi, J mulţimea numerelor reale, $x = \varphi(p)$, $(p \in I)$, un şir $\varphi : I \to X$, $x = f(t)$, $(t \in J)$, o funcţie $f : J \to X$.

Definiţii: Funcţia f se numeşte s.a.-p. dacă[1]) $x^* \circ f$ este a. p. în sensul lui Bohr pentru orice $x^* \in X^*$. Şirul φ se numeşte s.a.-p. dacă $x^* \circ \varphi$ este şir a. p. [7] pentru orice $x^* \in X^*$.

Teoria şirurilor s.a.-p. poate fi dezvoltată independent de teoria funcţiilor s.a.-p. Dar întrucît vom stabili teoreme de caracterizare ale unora prin celelalte şi cum este şi mai comod, vom utiliza rezultatele de la funcţii s.a.-p. stabilite în [1].

Dacă φ este un şir, atunci cu $\bar{\varphi}$ vom nota funcţia poligonală definită prin

(1) $$\bar{\varphi}(t) = \varphi(p) + (t - p)(\varphi(p+1) - \varphi(p)), \quad t \in [p, p+1], \quad p \in I.$$

I. *Dacă φ este şir s.a.-p., atunci $\bar{\varphi}$ este funcţie s.a.-p.*

Fie τ o $\varepsilon/3$ aproape-perioadă pentru şirul $x^* \circ \varphi$. Din $p \leq t < p+1$, urmează $p + \tau \leq t + \tau < p + 1 + \tau$ şi $x^*(\bar{\varphi}(t+\tau)) - x^*(\bar{\varphi}(t)) = \{x^*(\varphi(p + \tau)) - x^*(\varphi(p))\} + (t - p)[\{x^*(\varphi(p + 1 + \tau)) - x^*(\varphi(p+1))\} -$

1) Semnul „$\circ$" indică compunerea obişnuită a două funcţii.

$-\{x^*(\varphi(p+\tau)) - x^*(\varphi(p))\}]$, iar de aici $|x^*(\bar{\varphi}(t+\tau)) - x^*(\bar{\varphi}(t))| < \varepsilon$, pentru orice $t \in J$.

II. *Dacă φ este s. a. -p., atunci φ este mărginit în normă.*

Deoarece $\bar{\varphi}$ este s. a. -p., ea este mărginită în normă [1], § 2, şi deci φ este mărginit.

III. *Dacă $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(p) = \varphi(p)$, slab uniform în I, şi φ_n sînt s. a. -p., atunci φ este s. a. -p.*

Aceasta rezultă din faptul că limita unui şir uniform convergent de şiruri a.p. este un şir a.p. [7].

IV. *Dacă f este funcţie s. a. -p., atunci, pentru orice δ real, şirul $\varphi(p) = f(p\delta)$ este s. a. -p.*

Aceasta rezultă din faptul că dacă f este o funcţie a.p. cu valori complexe, atunci şirul $f(p\delta)$ este a.p. [7].

V. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca şirul φ să fie s. a. -p. este să existe o funcţie f s. a. -p. încît $f(p) = \varphi(p)$ pe I.*

Necesitatea urmează din I, iar suficienţa din IV, cu $\delta = 1$.

VI. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca funcţia f să fie s. a. -p. este ca ea să fie slab uniform continuă, ($x^* \circ f$ uniform continuă pentru orice $x^* \in X^*$), şi să existe un şir de numere pozitive δ_n cu $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$, încît şirurile $\varphi_n(p) = f(p\delta_n)$ sînt s. a. -p.*

Necesitatea rezultă din faptul că o funcţie a.p. cu valori complexe este uniform continuă şi din IV. Fie acum pentru un $x^* \in X^*$, $\delta(\varepsilon/3) > 0$ determinat prin uniforma continuitate a lui $x^* \circ f$, δ_k fixat cu $\delta_k < \delta(\varepsilon/3)$ şi $\tau \circ \varepsilon/3$ — aproape-perioadă a lui $x^*(\varphi_k(p))$. Pentru fiecare t există un singur p încît $p\delta_k \leqslant t < (p+1)\delta_k$. Din identitatea $x^*(f(t+\tau\delta_k)) - x^*(f(t)) = \{x^*(f(t+\tau\delta_k)) - x^*(f(p\delta_k))\} + \{x^*(f(p\delta_k + \tau\delta_k)) - x^*(f(p\delta_k))\} + \{x^*(f(p\delta_k)) - x^*(f(t))\}$, obţinem $|x^*(f(t+\tau\delta_k)) - x^*(f(t))| < \varepsilon$ cu $t \in J$, ceea ce arată că $\tau\delta_k$ este o ε-aproape-perioadă pentru $x^*(f(t))$. Se vede din această demonstraţie că $l(\varepsilon)$ din definiţia funcţiei a. p. $x^*(f(t))$ este $l_k(\varepsilon/3)\,\delta_k$, unde $l_k(\varepsilon/3)$ se determină prin definiţia şirului a. p. $x^*(\varphi_k(p))$.

VII. *Fie spaţiul X slab complet. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca şirul φ să fie s. a. -p. este ca din orice şir de numere întregi k_n să se poată extrage un subşir l_n încît şirul $\varphi(p+l_n)$ să conveargă slab uniform pe I.*

Cum $\bar{\varphi}$ este funcţie s.a.-p., atunci din [1], IV, urmează că se poate extrage şirul l_n cu $\bar{\varphi}(t+l_n)$ convergent slab uniform pe J şi deci are loc condiţia cerută în [7]. Dacă are loc condiţia teoremei, aceasta înseamnă că pentru fiecare $x^* \in X^*$, şirul $x^* \circ \varphi$ este a.p. [7] şi deci φ este şir s. a. -p.

VIII. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca şirul φ s. a. -p. să fie a.p. este ca traiectoria H_φ (mulţimea valorilor şirului) să fie relativ compactă în X.*

Dacă φ este şir a.p., φ este funcţie a.p. şi traiectoria $H_{\bar{\varphi}}$ este relativ compactă [1], V, şi deci şi $H_\varphi \subset H_{\bar{\varphi}}$ este relativ compactă (orice submulţime a unei mulţimi relativ compactă dintr-un spaţiu Banach este relativ

compactă). Pentru suficienţă arătăm că din H_φ relativ compactă urmează $H_{\bar{\varphi}}$ relativ compactă, se aplică [1], V şi faptul evident că din $\bar{\varphi}$ a. p. urmează φ a. p.

BIBLIOGRAFIE

1. Amerio Luigi — *Funzioni debolmente quasi-periodiche.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, XXX (1960), p. 288—301.
2. — *Sulle equazioni differenziali quasi-periodiche astratte.* Ricerche di Matematica, 9 (1960), p. 255—274.
3. — *Solutions presque périodiques d'équations fonctionnelles dans les espaces de Hilbert.* Coll. sur l'A. fonct. Liege, 1964, p. 11—35.
4. Corduneanu C. — *Funcţii aproape-periodice.* Ed. Acad. R.S. România Bucureşti, 1961.
5. Favard J. — *Leçons sur les fonctions presque-périodiques.* Paris, Gauthier-Villars, 1933.
6. Левитан Б. М. — Почти периодические функции. Москва, 1963.
7. Ky Fan — *Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques d'une variable entière et leur application à l'étude de l'itération des transformations continues.* Math. Zts., 48 (1942/3), p. 685—711.
8. Ricci M. L. e Rizzonelli P. — *Alcuni complementi alla teoria delle funzioni quasi-periodiche astratte.* Rend. Ist. Lomb. Sci. Lett., 95 (1961), p. 525—534.

SUITES FAIBLEMENT PRESQUE-PÉRIODIQUES

Résumé

On introduit la notion de suite f.p.p. au sens d' Amerio [1] et on établit les propriétés générales des ces suites dont nous rappellons : l'ensemble des valeurs est borné en norme ; la notion est fermée par rapport à la convergence faible uniforme sur l'axe entier ; on peut caractériser la notion à l'aide de la faible normalité etc.