7. Стельмашук Н. Т. — *О применении одного обобщения ареолярных производных*. Bul. Inst. Politehnic Bucureşti, t. XXIV, fasc. 2, 19—35 (1962).
8. Стельмашук Н. Т. — *О некоторых дифференциальных уравнениях в частных производных в дуальной и бикомплексной алгебрах*. Anal. ştiinţ. Univ. Iaşi, tom. IX, fasc. 1, 63—72, (1963).
9. Стельмашук М. Т. — *О некоторых линейных дифференциальных системах в частных производных*. Сибирский матем. журнал, том V, № 1, янв. —февр. 1964 г.
10. Павлов С. Д. — *Решение систем линейных дифференциальных уравнений с помощью F-моногенных функций*. Anal. ştiinţ. Univ. Iaşi, tom. IX, fasc. 2, (1962).

SOLUŢII GENERALIZATE ALE UNOR SISTEME DIFERENŢIALE LINIARE CU DERIVATE PARŢIALE DE ORDINUL I

Rezumat

Se găsesc condiţii necesare şi suficiente pentru care sistemul (5) de ecuaţii diferenţiale liniare cu derivate parţiale de ordinul I de două funcţii necunoscute (în general complecşi), de două variabile reale cu coeficienţi variabili (în general complecşi exprimă un criteriu de F-monogeneitate al unei funcţii bicomplexe sau duale în raport cu altă funcţie respectiv bicomplexă sau duală. Se găsesc soluţiile generale ale acestui sistem. În demonstraţie se utilizează derivatele formale introduse de V. A. Gusev.

OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS PARTIELLEMENT HYPOELLIPTIQUES

PAR

V. BARBU

Considérons l'équation

$$P(x, D)\, u = 0, \tag{1}$$

où $P(x, D) = \sum a(x) D^\alpha$ avec $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$; $D_j = -i\,\partial/\partial x_j$. On dira que l'opérateur différentiel $P(x,D)$ est partiellement hypoelliptique par rapport à $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n'})$ si toute solution $u \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ suffisamment régulière de l'équation (1) est indéfiniment dérivable par rapport à x'.

Pour les opérateurs différentiels à coefficients constants, cette définition de la hypoellipticité a été considérée par E. A. Gorin [4]. Dans ce travail nous allons établir quelques résultats concernant la régularité des solution de l'équation (1) suivant la méthode développée par L. Hörmander [3] pour les opérateurs différentiels à coefficients variables.

Soit $P(x, D)$ un opérateur différentiel à coefficients indéfiniment dérivables, non identiquement nul dans aucune composante connexe de $\Omega \subset R^n$.

On note

$$\widetilde{P}(x, \xi) = \Big(\sum_\alpha |P_\xi^\alpha(x, \xi)|^2\Big)^{1/2} \tag{2}$$

et

$$\xi' = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n'}); \quad |\alpha|' = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n'}; \quad 0 < n' \leqslant n. \tag{3}$$

On dira que $P(x, D)$ satisfait à la condition (H) s'il existe une famille de fonctions $M_j(x, \xi)$ définies sur $\{\Omega \times R^n\}$ telle que pour toute paire α, β,

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta P(x, \xi)| \leqslant C_x^{|\beta|+1} (1 + |\xi'|)^{-|\alpha|'/\delta} M^{\beta-\alpha}(x, \xi)\, \widetilde{P}(x, \xi) \tag{4}$$

$$1 \leqslant M_j(x, \xi) \leqslant C_x^1 (1 + |\xi|)^{1-1/\delta}, \tag{5}$$

où C_x et C_x^1 sont des fonctions localement bornées et

(6) $$M^{\beta-\alpha} = M_{\beta_1} M_{\beta_2} \dots M_{\alpha_1}^{-1} \dots M_{\alpha_\varepsilon}^{-1} \dots$$

Proposition 1. La condition (H) étant satisfaite, il existe une fonction A_x, localement bornée, telle que

(7) $$|D_\xi^\alpha D_x^\beta P(x, \xi)| \leqslant C_x^{|\beta|+1} (1 + |\xi'|)^{-|\alpha|'/\delta} M^{\beta-\alpha}(x, \xi) |P(x, \xi)|$$

pour $(x, \xi) \in \Omega \times \{\xi \in R^n ; |\xi'| \geqslant A_x\}$.

Corollaire. La condition (H) étant satisfaite, $P(x, \xi) \neq 0$ pour $(x, \xi) \in \Omega \times \{\xi \in R^n ; |\xi'| \geqslant A_x\}$.

Proposition 2. Si l'opérateur $P(x, D)$ satisfait à la condition (H), alors l'opérateur adjoint ${}^tP(x, D)$ satisfait aussi à la condition (H).

La démonstration de ces propositions suit, sans modifications, la démonstration des résultats analogues établis dans [3].

Remarque. Il est aisé de voir que si pour $\xi_1, \xi_2 \in R^n$ arbitraires, $P(x, \xi_1)$ et $P(x, \xi_2)$ sont équivalents (au sens de Hörmander) et $P(x, D)$ vérifie la condition

(4') $$|P^\alpha(x, \xi)| \leqslant C(1 + |\xi'|)^{-|\alpha|'/\delta} \widetilde{P}(x, \xi) ; \ (x, \xi) \in \Omega \times R^n,$$

alors la condition (H) est satisfaite.

Dans les considérations suivantes nous admettons que l'opérateur $P(x, D)$ vérifie la condition (H) et désignons par $\Omega' \subset \Omega$ un domaine borné de R^n. Soit $A = \sup_{x \in \Omega'} A_x$ et $m = \sup_{x \in \Omega'} m_x$, où m_x est le degré de $P(x, \xi)$.

On note

(8) $$\Delta = \sum_{k=n}^{n} (D_k)^2,$$

(9) $$Q(x, D) = (1 - \Delta)^{n+l} P(x, D).$$

Suivant Hörmander [3], considérons une famille de noyaux $K_j(x, \xi)$ définis sur le domaine $\Omega' \times \{\xi \in R^n ; |\xi'| \geqslant A\}$, par les relations

(10) $$K_0(x, \xi) Q(x, \xi) = 1,$$

(11) $$K_{j+1}(x, \xi) Q(x, \xi) + \sum_{\gamma \neq 0} \frac{D_\xi^\gamma Q(x, \xi) \ D_x^\gamma K_j(x, \xi)}{\gamma!} = 0.$$

Soit

(12) $$K(x, \xi) = \sum_{j=0}^{\infty} K_j(x, \xi).$$

Proposition 3. Il existe $A_{p,\alpha}$; $C_{p,\alpha}$ telle que pour $(x, \xi) \in \Omega' \times \{\xi \in R^n ; |\xi'| \geqslant A_{p,\alpha}\}$ et $|\beta| \leqslant p - m$, on ait

(13) $$|D_\xi^\alpha D_x^\beta K(x, \xi)| \leqslant C_{p,\alpha} (1 + |\xi'|)^{-|\alpha|'/\delta} (1 + |\xi'|)^{(1-1/\delta)|\beta|} (1 + |\xi''|^2)^{-n-l} (1 + |\xi|)^m.$$

Démonstration. Des rélations (4), (9), il s'ensuit aisément

(14) $$|D_\xi^\alpha D_x^\beta Q(x, \xi)| \geqslant C^{|p|+1} (1 + |\xi'|)^{-|\alpha|'/\delta} M^{\beta-\alpha}(x, \xi) (1 + |\xi''|^2)^{n+l} |P(x, \xi)|$$

pour $x \in \Omega'$; $|\xi'| \geqslant A$ et $|\beta| \leqslant p - m$.

Par dérivation il résulte de (10)

(15) $$|D_\xi^\alpha D_x^\beta K_0(x, \xi)| \leqslant M^{|\alpha+p|+1} \alpha! \, p! \, (1 + |\xi'|)^{-|\alpha|'/\delta} M^{\beta-\alpha}(x, \xi) (1 + |\xi''|^2)^{-n-l} |P(x, \xi)|^{-1} ; \ x \in \Omega' ; \ |\xi'| \geqslant A.$$

L'induction par rapport a j donne alors

(16) $$|D_\xi^\alpha D_x^\beta K_j(x, \xi) \leqslant M^{(j+1)(|p|+1)+|\alpha|} |\alpha|^j \alpha! \, p! \, (1 + |\xi'|)^{-|\alpha|'+j/\delta} M^{\beta-\alpha}(x, \xi) (1 + |\xi''|^2)^{-n-l} |P(x, \xi)|^{-1} ; \ x \in \Omega' ; \ |\xi'| \geqslant A.$$

On note

(17) $$A_{\alpha,p} = 2 \max [M^{(|p|+1)\delta} |\alpha|^\delta, A].$$

De la rélation (16) il s'ensuit alors la convergence uniforme de la série (12) dans le domaine $\Omega' \times \{\xi \in R^n : |\xi'| \geqslant A_{p,\alpha}\}$ pour $|\beta| \leqslant p - m$.

En outre

(18) $$|D_\xi^\alpha D_x^\beta K(x, \xi)| \leqslant C_{p,\alpha} (1 + |\xi'|)^{-|\alpha|'/\delta} M^{\beta-\alpha}(x, \xi) (1 + |\xi''|^2)^{-n-l} |P(x, \xi)|^{-1}$$

où

(19) $$C_{p,\alpha} \leqslant C^{|p|} p! \, \alpha!$$

Corollaire 2. Pour tout $\varphi(x) \in \mathfrak{D}(\Omega')$ on a

(20) $$\varphi(x) = (2\pi)^{-n} P(x, D) (1 - \Delta)^{n+l} \int_{|\xi'| \geqslant A_{p,\alpha}} e^{i\langle x, \xi\rangle} K(x, \xi) \widehat{\varphi}(\xi) \, d\xi + (2\pi)^{-n} \int_{|\xi'| \leqslant A_{p,\alpha}} e^{i\langle x, \xi\rangle} \widehat{\varphi}(\xi) \, d\xi$$

où $\widehat{\varphi}(\xi)$ représente la transformée Fourier de $\varphi(x)$ et $|\alpha|, p > m + n + l$.

Démonstration. D'après (10), (11), à cause de la convergence uniforme de la série (12) il s'ensuit

(21) $$P(x, \xi) (1 + |\xi''|^2)^{n+l} K(x, \xi) + \sum_{\gamma \neq 0} \frac{D_x^\gamma P(x, \xi) (1 + |\xi''|^2)^{n+l} D_x^\gamma K(x, \xi)}{\gamma!} = 1$$

pour $(x, \xi) \in \Omega' \times \{\xi ; |\xi'| \geqslant A_{p,\alpha}\}$; $p, |\alpha| > m + n + l$.

Mais puisque

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int \widehat{\varphi}(\xi)\, e^{i\langle x, \xi\rangle}\, d\xi\,, \tag{22}$$

il résulte aisément la relation (21).

Dans ce qui suit nous admettons que $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n'}\, 0 \ldots 0)$. Donc

$$|\alpha| = |\alpha|'. \tag{23}$$

Pour obtenir le résultat principal de ce travail nous construirons une „parametrix" pour l'opérateur $P(x, D)$. Considérons $\chi_\alpha(\xi') \in \mathfrak{D}(R^{n'})$ telle que $\chi_\alpha(\xi') = 1$ pour $|\xi'| \leqslant A_{p,\alpha}$, où p est un nombre naturel fixe ; $p \geqslant m + n + l$.

On note

$$\psi_\alpha(\xi') = 1 - \chi_\alpha(\xi'). \tag{24}$$

Sur le domaine $\{\Omega' \times R^n\}$ définissons la distribution

$$E_\alpha(F) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi\rangle} K(x, \xi)\, \psi_\alpha(\xi')\, \widehat{F}(x, \xi)\, d\xi\, dx \tag{25}$$

où $F(x, y) \in \mathfrak{D}(\Omega' \times R^n)$ et $\widehat{F}(x, \xi)$ représente la transformation Fourier partielle de $F(x, y)$.

Proposition 4. Pour $|\alpha| \geqslant (m + n + k)\,\delta$ et $m \leqslant l$, la distribution $E_\alpha(x, y)$ est une fonction continue, k fois dérivable par rapport à y' dans le domaine $\{\Omega' \times R^n \setminus \Delta\}$, Δ étant la diagonale du domaine $\Omega' \times R^n$.

Pour toute $\varphi(x) \in \mathfrak{D}(R^n)$ et $x \overline{\in} \operatorname{supp} \varphi$ on a

$$\int E_\alpha(x, y)\, \varphi(y)\, dy = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi\rangle} K(x, \xi)\, \psi(\xi')\, \widehat{\varphi}(\xi)\, d\xi. \tag{26}$$

Démonstration. Considérons la distribution $(x - y)^\alpha E_\alpha$. Il est aisé de voir [3] que

$$(x - y)^\alpha E_\alpha(F) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi\rangle} \widehat{F}(x, \xi)\, (-D_\xi)^\alpha K(x, \xi)\, \psi_\alpha(\xi')\, d\xi\, dx. \tag{27}$$

D'après (13) il s'ensuit

$$|D_\xi^\alpha K(x, \xi)| \leqslant C_{p,\alpha}\, (1 + |\xi'|)^{-|\alpha|/\delta + m} (1 + |\xi''|^2)^{m-n-l}\,;\ |\xi'| \geqslant A_{p,\alpha}. \tag{28}$$

De (26) et (27) il résulte alors

$$(x - y)^\alpha E_\alpha(x, y) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x-y, \xi\rangle}\, (-D_\xi)^\alpha (K(x, \xi)\, \psi_\alpha(\xi'))\, d\xi, \tag{29}$$

l'intégrale étant uniformément convergente. Les relations (28), (29) nous montrent en outre que $(x - y)^\alpha E_\alpha(x, y)$ est k fois dérivable par rapport à y.

La relation (26) résulte d'après la définition du noyau $E_\alpha(x, y)$, en prenant $F(x, y) = g(x)\, \varphi(y)$; $g(x) \in \mathfrak{D}(\Omega')$ et $\operatorname{supp} g \cap \operatorname{supp} \varphi = \emptyset$.

Théorème. 1. Si l'opérateur $P(x, D)$ vérifie la condition (H), alors toute solution suffisamment régulière de l'équation (1) est indéfiniment dérivable par rapport à x'. (L'opérateur $P(x, D)$ est partiellement hypoelliptique par rapport à x').

Démonstration. Soit $\Omega' \subset \Omega$ un domaine borné de R^n et $\varphi(x) \in \mathfrak{D}(\Omega')$. Alors des relations (22), (25) il s'ensuit

$$\varphi(x) = P(x, D)\, (1 - \Delta)^{n+l} E_\alpha(\varphi) + (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi\rangle} \widehat{\varphi}(\xi)\, \chi_\alpha(\xi')\, d\xi \tag{30}$$

où

$$E_\alpha(\varphi) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi\rangle} \psi_\alpha(\xi')\, K(x, \xi)\, \widehat{\varphi}(\xi)\, d\xi \tag{31}$$

et $|\alpha|$, $p > m + n + l$.

Considérons la fonction

$$F_\alpha(x) = (2\pi)^{-n} \int \frac{e^{i\langle x, \xi\rangle}\, \chi_\alpha(\xi')}{(1 + |\xi''|^2)^{l+n}}\, d\xi. \tag{32}$$

Il est aisé de voir que $F_\alpha(x) \in C^l(\Omega')$ et elle est indéfiniment dérivable par rapport à x'.

Les relations (30) et (31) permettent d'écrire

$$\varphi(x) = P(x, D)\, (1 - \Delta)^{n+l} E_\alpha(\varphi) + (1 - \Delta)^{n+l} F_\alpha * \varphi\,;\ \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega'). \tag{33}$$

Soit $u \in C^{m+n+l}(\Omega)$ une solution de l'équation

$${}^t P(x, D) = 0 \tag{1'}$$

et $\rho(x) \in \mathfrak{D}(\Omega)$; $\rho(x) = 1$ pour $x \in \Omega'' \supset \Omega'$.

On note

$$g = {}^t P(x, D)\, (\rho u). \tag{34}$$

On aura évidemment

$$u(\varphi) = (1 - \Delta)^{n+l} g\, (E_\alpha(\varphi)) + ((1 - \Delta)^{n+l} \rho u * F_\alpha)\, \check{(\varphi)}\,;\ \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega') \tag{35}$$

en tenant compte de la définition de l'opérateur adjoint ${}^t P(x, D)$. Mais $(1 - \Delta)^{n+l} g$ est une fonction continue et $\operatorname{supp} g \cap \Omega' = 0$. Donc d'après (26) la relation (35) nous permet d'écrire

$$u(y) = \int (1 - \Delta)^{n+l} g(x)\, E_\alpha(x, y)\, dx + \int (1 - \Delta)^{n+l} \rho u(x)\, F_\alpha(x - y)\, dx. \tag{36}$$

Si l'on tient compte de la proposition (4) et du fait que $F_\alpha(y)$ est indéfini-

ment dérivable par rapport à y', il en résulte que $u(y)$ est k fois dérivable par rapport à y' pour $|\alpha| > (m+n+k)\,\delta$. Puisque α est arbitraire, il s'ensuit que $u(y)$ est indéfiniment dérivable par rapport à y'.

Le théorème résultera alors en remplaçant l'opérateur $P(x, D)$ par son adjoint ${}^tP(x, D)$, comme conséquence de la proposition 2.

Nous allons établir maintenant quelques résultats concernant l'appartenance des solutions de l'équation (1) à la classe de Gevrey $\Gamma^\delta(\Omega)$. Dans ce but nous admettons dans ce qui suit que l'opérateur $P(x, D)$ vérifie la condition (H) avec $\delta \geqslant 1$.

Théorème 2. Toute solution suffisamment régulière de l'équation (1) appartient à la classe de Gevrey $\Gamma^\delta(\Omega)$ par rapport à x'.

Démonstration. Il s'agit de démontrer pour tout $\beta' = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n'})$ la relation

$$\sup_{x \in K \subset \Omega} |D^{\beta'} u(x)| \leqslant C_k^{|\beta'|+1}\, \Gamma(|\beta'|\,\delta), \tag{37}$$

où K est un compact arbitraire et $\Gamma(\alpha)$ est la fonction d'Euler.

Considérons le noyau $E_\alpha(x, y)$ avec $|\alpha| > (m + |\beta'| + n)\,\delta$. Il est aisé de voir que

$$(x-y)^\alpha D^{\beta'} E_\alpha(F) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi\rangle} \widehat{F}(x, \xi)\, (-D_\xi)^\alpha (\xi^{\beta'} K(x, \xi)\, \psi_\alpha(\xi')\, d\xi\, dx. \tag{38}$$

Alors d'après la formule de Leibniz on a

$$(x-y)^\alpha D^{\beta'} E_\alpha(F) =$$

$$= (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi\rangle} \widehat{F}(x, \xi)\, \psi_\alpha(\xi')\, (-D_\xi)^\alpha (\xi^{\beta'} K(x, \xi))\, d\xi\, dx + \tag{39}$$

$$+ (2\pi)^{-n} \sum_{\alpha \neq \alpha'} \frac{1}{\alpha'!} \int e^{i\langle x, \xi\rangle} \widehat{F}(x, \xi)\, (-D_\xi)^{\alpha'} (\xi^{\beta'} K(x, \xi)\, (-D_\xi)^{\alpha-\alpha'} \psi_\alpha(\xi')\, d\xi\, dx.$$

On note

$$I_1 = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi\rangle} \widehat{F}(x, \xi)\, \psi_\alpha(\xi')\, (-D_\xi)^\alpha (\xi^{\beta'} K(x, \xi))\, d\xi\, dx, \tag{40}$$

et

$$I_2 = (2\pi)^{-n} \sum_{\alpha' \neq \alpha} \frac{1}{\alpha'!} \int e^{i(x, \xi)} \widehat{F}(x, \xi)\, (-D_\xi)^{\alpha'} (\xi^{\beta'} K(x, \xi)) \tag{41}$$

$$(-D_\xi)^{\alpha-\alpha'} \psi_\alpha(\xi')\, d\xi\, dx.$$

D'après la formule de Leibniz, il en résulte

$$D_\xi^\gamma (\xi^{\beta'} K(x, \xi)) = \gamma! \sum_{\gamma'} \frac{D^{\gamma'}(\xi^{\beta'}) D_\xi^{\gamma-\gamma'} K(x, \xi)}{\gamma'!\,(\gamma-\gamma')!}. \tag{42}$$

Si l'on tient compte de la proposition 3 et de la relation (20) il s'ensuit

$$|D^\gamma (\xi^{\beta'} K(x, \xi))| \leqslant$$

$$\leqslant 2^{|\beta'|+1} M^{|\gamma|+1} \gamma!\, |\gamma|\, (1 + |\xi'|)^{|\beta'|-|\gamma|/\delta} (1 + |\xi''|^2)^{-n-l} (1 + |\xi|)^m. \tag{43}$$

Puisque $|\alpha| > (m + |\beta'| + n)$, des relations (39), (42) il s'ensuit

$$|I_1| \leqslant \alpha!\, |\alpha|\, M_1^{|\alpha+\beta'|+1} \int |F(x, y)|\, dx\, dy. \tag{44}$$

D'une manière analogue il résulte

$$I_2| \leqslant \alpha!\, M_2^{|\alpha+\beta'|+1} \int |F(x, y)|\, dx\, dy. \tag{45}$$

Donc

$$|(x-y)^\alpha D_y^{\beta'} E_\alpha(F)| \leqslant \alpha!\, M^{|\alpha+\beta'|+1} \int |F(x, y)|\, dx\, dy : \; F \in \mathcal{D}(\Omega' \times R^n). \tag{46}$$

La relation (46) permet d'écrire

$$|D_y^{\beta'} E_\alpha(x, y)| \leqslant \alpha!\, M^{|\alpha+\beta'|+1}\, |x-y|^{-|\alpha|}. \tag{47}$$

On note

$$h_\alpha(y) = \int (1-\Delta)^{n+l} g(x)\, E_\alpha(x, y)\, dy\, ; \; y \in \Omega' \tag{48}$$

où la fonction $g(x)$ est donnée par (34).

Parce que la distance entre supp g et Ω' est strictement positive, il résulte d'après (47)

$$|D^{\beta'} h_\alpha(y)| \leqslant \alpha!\, M_3^{|\alpha+\beta'|+1} : \; y \in \Omega'. \tag{49}$$

Soit la fonction

$$f_\alpha(y) = \int (1-\Delta)^{n+l} (\rho u)(x)\, F_\alpha(x-y)\, dx. \tag{50}$$

Des relations (17), (32) il s'ensuit alors

$$|D^{\beta'} f_\alpha(y)| \leqslant M^{|\beta'|\delta}\, |\alpha|^{|\beta'|\delta}. \tag{51}$$

D'après (17), (48), (49), (50) il résulte donc

$$|D^{\beta'} u(y)| \leqslant \alpha!\, M_3^{|\alpha+\beta'|+1} + M^{|\beta'|\delta}\, |\alpha|^{|\beta'|\delta}, \tag{52}$$

où M_3 et M sont des constantes indépendantes par rapport à α.

Choisissant $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n'}, 0, \ldots, 0)$ telle que

(53) $$(|\beta'| + n + m)\,\delta \leqslant |\alpha| < (|\beta'| + n + m)\,\delta + 1.$$

la formule de Stirling permet d'écrire

(54) $$|D^{\beta'} u(y)| \leqslant \Gamma((|\beta'| + m + n)\,\delta + 1)\, A^{|\beta'|+1}\; y \in \Omega'.$$

Ainsi le théorème (2) est démontré.

Remarque. Le théorème (1) est vrai en remplaçant la condition (4) par la condition plus faible

(4') $$|D_\xi^\alpha D_x^\beta P(x, \xi)| \leqslant C_{x,\beta}(1 + |\xi'|)^{-|\alpha'|/\delta} M^{\beta-\alpha}(x, \xi)\, \widetilde{P}(x, \xi)$$

où $C_{\beta,x}$ sont de fonctions localement bornées.

Exemple. L'opérateur différentiel

(55) $$P(x, D) = (x_1^2 + x_2^2)^p \frac{\partial^{2m}}{\partial x_1^{2m}} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + 1$$

est hypoelliptique par rapport à x_1 si $p > m$.

Démonstration. Considérons

(57) $$P(x, \xi) = |x|^{2p} |\xi_1|^{2m} + \xi_2^2 + 1$$

et la fonction

58) $$M(x, \xi) = \frac{(\xi_1^{2m} + \xi_2^2 + 1)^{1/2p}}{(|x|^{2p} \xi_1^{2m} + \xi_2^2 + 1)^{1/2p}}.$$

Il est aisé de voir que les fonctions $M_j(x, \xi) = M(x, \xi)$ vérifient l'inégalité (5), où $\delta = \dfrac{p}{p - m}$.

On obtient sans difficulté pour $|\xi_1| > A$

(59) $$|x|^{2p-|\beta|} \xi_1^{2m-|\alpha|'} (\xi_1^{2m} + \xi_2^2 + 1)^{|\alpha-\beta|/2p} (|x|^{2p} + \xi_1^{2m} + \xi_2^2 + 1)^{-\left(1 + \frac{|\alpha-\beta|}{2p}\right)} \leqslant C_{\beta,x}.$$

ce qui démontre la condition (H).

BIBLIOGRAPHIE

1. Schwartz L. — *Théorie des distributions.* Paris, 1950.
2. Hörmander L. — *Linear partial differential operators.* Springer-Verlag, Berlin 1963.
3. Hörmander L. — *Hypoelliptic differential operators.* An. de l'Inst. Fourier, T. XI, 1961. p. 477—492.

4. Горин Е. А. — Частично гипоэллиптические дифференциальные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами. Sibirskij Mat. Zurnal T. III 1962. p. 500—526.
5. Treves I. F. — *Lectures on linear partial differential equations with constant coefficients.* Rio de Janeiro 1961.

OPERATORI DIFERENŢIALI PARŢIAL HIPOELIPTICI

Rezumat

În această Notă se stabilesc cîteva rezultate asupra hipoelipticităţii parţiale a operatorilor diferenţiali cu coeficienţi variabili.