for all $t \in I$, where

$$\varepsilon(t) = \exp\left[-\int_a^t \left\{\int_a^s |K_n(s,\tau; V(x;\tau))|^q d\tau\right\}^{p/q} ds\right].$$

By combining the inequalities (3.12) and (3.11) we find

$$\|DV(x_1, h) - DV(x_2, h)\| \leq P.A(\|x_1 - x_2\|)$$

where $P$ is a constant which depends of $h$.

The affirmation is completely proved.

We remark that the operator $DV(x; h)$ will be uniformly continuous with regard to both the arguments (i.e. on the product space $L_p \times W$) if and only if the following conditions are satisfied:

1°. the family of mappings $x \to DV(x, h)$, $h \in L_p$ is uniformly equicontinuous, and

2°. the family of mappings $h \to DV(x, h)$, $x \in W$ is uniformly equicontinuous.

REFERENCES


1. Dunford N. and Schwarz J. — *Linear Operators*, part I. Intersc. Publish. New York 1958.
2. Erdélyi A. — *A Result on Non-linear Volterra Integral Equations*. Studies in Mathematical Analysis and Related Topics. Stanford University Press, 1962.
3. Nicolescu M. — *Analiză matematică*, vol. III. Ed. tehnică, București 1960.
4. Tricomi F. G. — *Integral Equations*. Intersc. Publish. New York, 1957.
5. Willet D. — *Nonlinear vector Integral equations as contraction mappings*. Archive for rational mechanics and analysis, vol. 15, nr. 1 (1965) p. 99 — 106.
6. Zaanen A. C. — *Linear Analysis*. Van Nostrand 1948.


ASUPRA $F$-DIFERENȚIABILITĂȚII SOLUȚIEI OPERATORULUI INTEGRAL NELINIAR VOLTERRA


Rezumat

Se consideră problema diferențiabilității în sens Fréchet a soluției ecuației integrale neliniare Volterra (2.1) în raport cu termenul liber, de care depinde soluția.

Diferențiabilitatea operatorului $V(t; x)$ este studiată în spațiul $L_p(X; \mu)$, $p \geq 1$.


# SUR L'ÉVALUATION DE L'ERREUR DANS LA RÉSOLUTION DES SYSTÈMES LINÉAIRES


PAR

C. ILIOI


Soit $Ax = f$ un système algébrique d'équations linéaires avec $\det(A) \neq 0$. Il s'agit souvent de connaître l'effet du changement des éléments de la matrice $A$ sur la solution du système. La variation de la solution du système à une perturbation de la matrice $A$ dépend de la variation de la matrice inverse. Pour caractériser cette dépendance on a introduit dans [4], [5] les nombres de conditionnement des matrices. En général, le nombre de conditionnement de la matrice $A$ este $n(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$, et le fait qu'il est une mesure du conditionnement de la matrice est une conséquence de l'inégalité

$$(1) \qquad \frac{\|A^{-1} - (A+E)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq \frac{n(A)\varepsilon}{1 - n(A)\varepsilon}, \text{ avec } \varepsilon = \frac{\|E\|}{\|A\|}, \; n(A)\varepsilon < 1,$$

où $E$ est la variation de la matrice $A$ (v. [3], p. 141). Il est évident que l'erreur relative de la matrice inverse est proportionnelle au nombre de conditionnement $n$ de la matrice.

Le problème que nous étudierons est plus particulier que celui énoncé ci-dessus, mais il n'est pas résolu d'une manière satisfaisante par cette théorie générale. C'est pourquoi nous allons trouver d'autres méthodes pour évaluer l'erreur, plus convenables pour notre problème.

§. 1. Soit le système

$$(2) \qquad \mathcal{A}\mathcal{X} = \mathcal{F} \text{ avec } \det(\mathcal{A}) \neq 0,$$

où la matrice quadratique $\mathcal{A}$ d'ordre $N$ peut être considérée partageé en quatre sous-matrices:

$$(3) \qquad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

$A$ et $D$ étant des matrices quadratiques d'ordre $n$, respectivement $m$, $n + m = N$;

nous supposons que les éléments de la matrice $B$ sont suffisamment petits relativement aux éléments de la matrice $A$ ; plus précisément, soit $\frac{\|B\|}{\|A\|} < \eta$. Nous nous proposons d'évaluer l'erreur commise si on résout, au lieu du système (2), le système :

$$\bar{\mathcal{A}}\mathfrak{X} = \mathfrak{F}, \text{ où } \bar{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} A & O_{n,m} \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$O_{n,m}$ étant la matrice nulle à $n$ lignes et $m$ colonnes.

Un tel problème apparaît par exemple dans le calcul du prix de revient d'un produit, dans lequel entrent les prix de certains matières premières, les salaires des ouvriers etc. et où on néglige les prix des certains matériels qui entrent dans une quantité plus petite en comparaison avec les premières.

Ce problème peut être inclus dans la théorie générale de plus haut, dans laquelle la matrice non-perturbée est $\bar{\mathcal{A}}$ et sa perturbation est

$$E = \begin{pmatrix} O_{n,m} & B \\ O_{m,n} & O_{m,m} \end{pmatrix}.$$

Une évaluation de l'erreur relative peut être obtenue par (1) mais, dans ce cas, elle est dépendante de $\varepsilon = \frac{\|B\|}{\|\mathcal{A}\|}$, ce qui n'est pas convenable pour notre problème, l'évaluation étant trop grossière.

§ 2. La méthode que nous proposons permet des évaluations de l'erreur relative en fonction du quotient $\frac{\|B\|}{\|A\|}$ qui correspond à la manière dont nous avons posé le problème.

Une première évaluation s'obtient de la façon suivante. Le système perturbé s'écrit avec nos notations :

$$\begin{cases} Ax + By = v, \\ Cx + Dy = w, \end{cases} \tag{5}$$

où $\mathfrak{X} = \binom{x}{y}$, $\mathfrak{F} = \binom{v}{w}$, avec $x, v \in R^n$ et $y, w \in R^m$. Si nous désignons par $\bar{\mathfrak{X}} = \binom{\bar{x}}{\bar{y}}$ la solution du système non-perturbé

$$\begin{cases} A\bar{x} = v, \\ C\bar{x} + D\bar{y} = w, \end{cases} \tag{6}$$

alors de (5) et (6) on obtient

$$\bar{x} - x = A^{-1} By, \tag{7}$$



$$\bar{y} - y = -D^{-1} CA^{-1} By, \tag{8}$$

qu'on peut écrire encore sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \bar{x} - x \\ \bar{y} - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_{n,n} & A^{-1} B \\ O_{m,n} & -D^{-1} CA^{-1} B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

En passant aux normes, nous avons :

$$\left\| \begin{pmatrix} O_{n,n} & A^{-1} B \\ O_{m,n} & -D^{-1} C \; A^{1-} B \end{pmatrix} \right\| \leqslant \| A^{-1} B \| + \| D^{-1} C A^{-1} B \| \leqslant$$

$$\leqslant n(A) \frac{\|B\|}{\|A\|} + n(D)\, n(A) \frac{\|B\|}{\|A\|} \frac{\|C\|}{\|D\|},$$

d'où

$$\frac{\|\bar{\mathfrak{X}} - \mathfrak{X}\|}{\|\mathfrak{X}\|} \leqslant n(A) \left[ 1 + n(D) \frac{\|C\|}{\|D\|} \right] \eta. \tag{9}$$

L'évaluation (9) n'est pas satisfaisante à cause du fait qu'elle englobe les erreurs relatives (7) et (8) dans une relation matricielle unique.

3. Nous donnerons une évaluation meilleure, en imposant des conditions supplémentaires. En préalable nous démontrerons le résultat suivant :

Théorème. *Soit $\mathcal{A} = (a_{ij})$ une matrice quadratique d'ordre $N$ qui peut être écrite sous la forme* (3). *Si les conditions suivantes sont remplies :*

1°. $a_{ij} \leqslant 0$ *(pour $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, N$) ;*

2°. *tous les mineurs principaux de* det $\mathcal{A}$, *qui ne contiennent pas la cellule $D$ sont positifs ;*

*alors tous les éléments qui se trouvent dans les dernières $m$ lignes de la matrice adjointe $\tilde{\mathcal{A}}$ sont positifs.*

La démonstration s'effectue par induction. Soit $m = 1$, c'est-à-dire supposons que la cellule $D$ est formée d'un seul élément $a_{NN}$. La conclusion est évidemment vraie pour une matrice d'ordre 2. Supposons-la vraie aussi pour une matrice d'ordre $N$, qui satisfait aux conditions 1° et 2°, c'est-à-dire, supposons que tous les compléments algébriques des éléments qui se trouvent dans la dernière colonne de la matrice $\mathcal{A}$ (donc les éléments de la dernière ligne de la matrice adjointe $\tilde{\mathcal{A}}$) sont positifs. Démontrons que la même chose est valable pour une matrice d'ordre $N + 1$ qui satisfait aux mêmes conditions 1° et 2°.

À ce but considérons la matrice

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} p_{22}\, p_{23} \cdots p_{2,N+1} \\ p_{32}\, p_{33} \cdots p_{3,N+1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ p_{N+1,2}\; p_{N+1,3} \cdots p_{N+1,N+1} \end{pmatrix}$$

où

$$p_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}\, a_{1j}}{a_{11}} \quad (i, j = 2,3,\ldots, N+1).$$

La matrice $\mathfrak{P}$ satisfait aux conditions 1° et 2°. En effet

$$p_{ij} = \frac{a_{ij}\, a_{11} - a_{i1}\, a_{1j}}{a_{11}} \leqslant 0 \text{ pour tout } i \neq j,$$

puisque $a_{ij} \leqslant 0$ et $a_{11} > 0$; d'autre part soit:

$$\mu = \begin{vmatrix} p_{i_1 i_1} \cdots p_{i_1 i_k} \\ \cdots\cdots \\ p_{i_k i_1} \cdots p_{i_k i_k} \end{vmatrix}$$

un mineur principal de det $\mathfrak{P}$ qui ne contient pas l'élément $p_{N+1,N+1}$. Compte tenu des valeurs des $p_{i_r i_s}$, il est égal à

$$\mu = \frac{1}{a_{11}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1i_1} \cdots a_{1i_k} \\ a_{i_1 1} & a_{i_1 i_1} \cdots a_{i_1 i_k} \\ \cdots & \cdots \\ a_{i_k 1} & a_{i_k i_1} \cdots a_{i_k i_k} \end{vmatrix},$$

qui, d'après 2°, est positif.

Il suit donc que $\mathfrak{P}$ est d'ordre $N$ et satisfait à 1° et 2°; alors tous les compléments algébriques des éléments de la dernière colonne sont positifs, c'est-à-dire:

$$\beta_{l,N+1} = (-1)^{n+l} \begin{vmatrix} p_{22} & \cdots p_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ p_{l-1,2} & \cdots p_{l-1,N} \\ p_{l+1,2} & \cdots p_{l+1,N} \\ \cdots & \cdots \\ p_{N+1,2} & \cdots p_{N+1,N} \end{vmatrix} > 0.$$

Mais

$$a_{11}\, \beta_{l,N+1} = (-1)^{N+l+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{l-1,1} & a_{l-1,2} & \cdots a_{l-1,N} \\ a_{l+1,1} & a_{l+1,2} & \cdots a_{l+1,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{N+1,1} & a_{N+1,2} & \cdots a_{N+1,N} \end{vmatrix} = \alpha_{l,N+1}$$



où $\alpha_{l,N+1}$ $(l = 2,3,\ldots, N+1)$ sont les compléments algébriques des éléments $a_{l,N+1}$ de la matrice $\mathfrak{A}$ d'ordre $N+1$. Puisque $a_{11} > 0$, il en résulte que $\alpha_{l,N+1} > 0$. Il est évident que la conclusion reste valable si $l = 1$. On conclut que le théorème est démontré pour $m = 1$.

Supposons maintenant que le théorème est valable pour une sous-matrice $D$ d'ordre $m$ et démontrons-le dans les conditions 1° et 2° correspondantes à une cellule $D$ d'ordre $m+1$.

La démonstration est analogue. On considère la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots q_{1,N-1} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots q_{2,N-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{N-1,1} & q_{N-1,2} & \cdots q_{N-1,N-1} \end{pmatrix},$$

où

$$q_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{iN}\, a_{Nj}}{a_{NN}} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, N-1)$$

qui satisfait aux conditions 1° et 2°. En effet

$$q_{ij} = \frac{a_{ij}\, a_{NN} - a_{iN}\, a_{Nj}}{a_{NN}} \leqslant 0 \quad (i \neq j)$$

et pour un mineur principal d'ordre $k$, qui ne contient pas la cellule $D$, nous avons:

$$\begin{vmatrix} q_{i_1 i_1} \cdots q_{i_1 i_k} \\ \cdots\cdots \\ q_{i_k i_1} \cdots q_{i_k i_k} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{NN}} \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} \cdots a_{i_1 i_k} & a_{i_1 N} \\ \cdots & \cdots \\ a_{i_k i_1} \cdots a_{i_k i_k} & a_{i_k N} \\ a_{N i_1} \cdots a_{N i_k} & a_{NN} \end{vmatrix} > 0,$$

qui d'après 2° est positif.

Donc $Q$ satisfait aux conditions 1° et 2° pour une cellule $D$ d'ordre $m$; mais d'après l'hypothèse d'induction il en résulte que tous les compléments algébriques des éléments, qui se trouvent dans les dernières $m$ colonnes de la matrice $Q$, sont positifs. Si $\gamma_{ij}$ est un de ceux-ci, nous avons pour $i, j \neq N$

$$a_{NN}\, \gamma_{ij} = \alpha_{ij}$$

où $\alpha_{ij}$ est le complément algébrique correspondant de la matrice $\tilde{\mathfrak{A}}$. Puisque $a_{NN} > 0$, il suit que $\alpha_{ij} > 0$. Il est évident que la conclusion reste valable si l'un des deux indices $i$ et $j$, ou tous les deux sont égaux à $N$.

Le théorème est complètement démontré.

*Conséquences.* 1°. Dans les hypothèses 1° et 2°, le signe des éléments de la matrice inverse, qui se trouvent dans les dernières $m$ lignes, est identique au signe du déterminant de la matrice $\mathfrak{A}$.

2°. Si tous les mineurs principaux du déterminant de la matrice $\mathfrak{A}$ sont positifs et $a_{ij} \leqslant 0$ $(i \neq j)$ il suit que tous les éléments de la matrice

adjointe sont positifs et tous les éléments de la matrice inverse ont le signe du déterminant de la matrice.

Avant de revenir à l'évaluation de l'erreur relative de (4) nous remarquons, qu'étant donnés deux vecteurs $v_1$ $(v_1^{(i)})$ et $v_2$ $(v_2^{(i)})$, qui satisfont à

(a) $$0 \leqslant v_1^{(i)} \leqslant v_2^{(i)}$$

ou

(b) $$0 \geqslant v_1^{(i)} \geqslant v_2^{(i)} \qquad (i = 1,2,\ldots,r)$$

$r$ étant la dimension des vecteurs, il résulte

$$\|v_1\| \leqslant \|v_2\|$$

pour toutes les normes attachées aux vecteurs.

§ 4. Revenons à notre problème. La deuxième équation de (5) donne :

$$y = D^{-1}(w - Cx)$$

et (7) s'écrit :

(7') $$\bar{x} - x = A^{-1} B D^{-1} (w - Cx).$$

Théorème. *Si les conditions suivantes sont satisfaites:*

1°. $a_{ij} \leqslant 0$ $(i \neq j)$ ;

2° *tous les mineurs principaux du déterminant de la matrice, qui ne contiennent pas la cellule D sont positifs* ;

3°. det $(\mathfrak{A}) \cdot$ det $(D) > 0$ ;

4°. *toutes les composantes du vecteur* $\mathfrak{W}$ *sont non-négatives* ; *alors l'évaluation de l'erreur relative est :*

(10) $$\frac{\|\bar{\mathfrak{X}} - \mathfrak{X}\|}{\|\mathfrak{X}\|} \leqslant n(A)\, n(D) \frac{\|C\|}{\|D\|} \eta.$$

En effet, alors les vecteurs $\bar{x} - x = v_1$ et $-A^{-1} B D^{-1} C x = v_2$ satisfont à la condition (a) ou (b). Compte tenu de (8), il résulte que la condition (a) ou (b) est satisfaite pour les vecteurs $\bar{\mathfrak{X}} - \mathfrak{X}$ et $R\mathfrak{X}$, où

(11) $$R = \begin{pmatrix} -A^{-1} B D^{-1} C & O_{n,m} \\ O_{m,n} & -D^{-1} C A^{-1} B \end{pmatrix}.$$

Nous avons donc

$$\|\bar{\mathfrak{X}} - \mathfrak{X}\| \leqslant \|R\mathfrak{X}\| \leqslant \|R\|\, \|\mathfrak{X}\|.$$

Mais on vérifie facilement que

$$\|R\| \leqslant \|A^{-1}\|\, \|B\|\, \|D^{-1}\|\, \|C\|,$$

pour toutes les normes attachées aux matrices.



Il en résulte l'évaluation de l'erreur relative (10) qui est, d'une manière évidente, meilleure que l'évaluation (9).

Les conditions 1°, 2°, 3°, 4° peuvent être satisfaites pour le problème du calcul du prix de revient d'un produit, cité plus haut. En effet, considérons l'exemple suivant (v. [1]), simplifié et conventionnel. Supposons que pour la production d'une tonne de fonte on utilise $b_{11}$ tonnes de fonte $(b_{11} < 1)$, $a_{12}$ tonnes de minerai de fer, $a_{13}$ tonnes de combustible, $a_{14}$ Kwh d'énergie électrique et soit $b_1$ le salaire des ouvriers. Si nous notons avec $x_1$ le prix d'une tonne de fonte, avec $x_2$ le prix d'une tonne de minerai, avec $x_3$ le prix d'une tonne de combustible et avec $x_4$ le prix d'une Kwh d'énergie électrique, alors nous avons l'équation :

$$x_1 = b_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 + b_1.$$

D'une façon analogue nous obtenons les équations :

$$x_2 = a_{21} x_1 + b_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 + b_2,$$

$$x_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + b_{33} x_3 + a_{34} x_4 + b_3,$$

$$x_4 = a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + b_{44} x_4 + b_4$$

où $b_{ii} < 1$, $(i = 1, 2, 3, 4)$. Nous avons le système

$$\begin{cases} a_{11} x_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3 - a_{14} x_4 = b_1, \\ -a_{21} x_1 + a_{22} x_2 - a_{23} x_3 - a_{24} x_4 = b_2, \\ -a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 - a_{34} x_4 = b_3, \\ -a_{41} x_1 - a_{42} x_2 - a_{43} x_3 + a_{44} x_4 = b_4 \end{cases}$$

avec $a_{ij} \geqslant 0$ (1°), $b_i > 0$ (4°) où $a_{ii} = 1 - b_{ii} \geqslant 0$.

De même, les mineurs principaux sont positifs (2°) si tous les éléments $a_{ii}$ de la diagonale principale sont dominants et ce fait est possible dans le problème pratique que nous avons considéré.

Dans un cas réel, le nombre des équations est très grand et c'est pourquoi l'approximation de la solution et le calcul de l'erreur sont utiles.

## BIBLIOGRAPHIE


1. Belkin V. — *Despre folosirea mașinilor electronice de calculat în planificarea și statistica economiei naționale*. Probleme de economie, 12, (1957), p. 174. (Trad. din „Вопросы экономики").
2. Фаддеев Д. К. и Фаддеева В. Н. — *Вычислительные методы линейной алгебры*. Государственное издательство физико-математической литературы. Москва-Ленинград, 1963.
3. Fox L. — *An introduction to numerical linear algebra*. Clarendon Press. Oxford, 1964.
4. Todd J. — *The condition of certain matrix*. Quart. J. Mech. and appl. Math., 2 (1949), p. 469.
5. Turing A. M. — *Rounding-off errors in matrix processes*. Quart. J. Mech. and appl. Math. 1 (1948), p. 287.

ASUPRA EVALUĂRII ERORII LA REZOLVAREA SISTEMELOR LINIARE

Rezumat

Se studiază problema aproximării soluţiei sistemului de ecuaţii liniare algebrice (2), cînd în locul acestui sistem se consideră sistemul (4). Evaluările erorii obţinute pot fi utile în economie, la calculul preţului de cost.

# SOME REMARKS TO THE PAPER PROFESSOR ADOLF HAIMOVICI, SUR QUELQUES INVARIANTS DANS LES ESPACES A CONNEXION AFFINE À TROIS DIMENSIONS

BY

VÁCLAV HLAVATÝ

*Dear Professor Haimovici,*

In reading your interesting paper „Sur quelques invariants dans les espaces à connexion affine à trois dimensions", (Annales Polonici Mathematici, III, 2, 1957, pp. 300-303), I came across some ideas connected with the topic of your paper which I'd like to bring to your attention in what follows. I am using a little bit different notation than you did, but you will see that this does not confuse the issue.

## I.

Denote by $A_n$ a $n$-dimensional space referred to coordinates $x^\nu$ and endowed with a symmetric connection $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} = \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}$.

*Definition* (I.1). *Let* $\overset{a}{X}{}^\nu$ $(a,b = 1, \ldots, p)$ *be a set of* $p$ *contravariant vectors. Let*

$$f \overset{\text{def}}{=} f(x, X) \tag{I.1}$$

*represent a scalar function of the coordinates* $x^\nu$ *and of the vectors* $\overset{a}{X}{}^\nu$, *homogeneous of degree zero in the* $\overset{a}{X}{}^\nu$.

This Definition gives rise to the following

L e m m a (I.1). *The* $p \cdot n$ *expressions*

$$\overset{a}{X}_\lambda \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial \overset{a}{X}{}^\lambda} \tag{I.2}$$

*are components of* $p$ *covariant vectors satisfying the conditions*

$$\overset{1}{X}_\lambda \overset{1}{X}{}^\lambda = \overset{2}{X}_\lambda \overset{2}{X}{}^\lambda = \ldots = \overset{p}{X}_\lambda \overset{p}{X}{}^\lambda = 0. \tag{I.3}$$

The proof is obvious.