SUR LES ALGÈBRES DU TROISIÈME DEGRÉ

PAR

ION CREANGĂ

Soit R_n un espace linéaire n-dimensionnel sur un corps K, commutatif et de caractéristique zéro ; on considère une application A du produit cartésien $R_n \times R_n$ en R_n, déterminée dans une base $\{e_i\}$ de R_n, par :

$$x \circ y = z = \psi^h(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n; \eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n) e_h, \tag{1}$$

où :

$$x = \xi^i e_i, \qquad y = \eta^j e_j \tag{2}$$

avec la notation : $\alpha^k e_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha^k e_k$. Pour les fonctions ψ^h on suppose que :

$$\psi^h(0, 0, \ldots, 0; \eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n) = \psi^h(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n; 0, 0, \ldots, 0) = 0 \tag{3}$$

et que les changements des bases en R_n, donnés par :

$$e'_h = \lambda^i_h e_i \tag{4}$$

les transforment selon la loi contravariante :

$$\psi'^h(\xi'^1, \xi'^2, \ldots, \xi'^n; \eta'^1, \eta'^2, \ldots, \eta'^n) = \\ = \mu^h_i \psi^i(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n; \eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n). \tag{5}$$

On peut concevoir cette application comme une algèbre : z est le produit des vecteurs x et y.

Nous disons que l'algèbre A est de degré m, quand les coordonnées ψ^i du produit $x \circ y$, dans une base, sont des polynômes, dont les degrés ne dépassent m et il y a, au moins, un de ces polynômes qui a effectivement le degré m. Le degré de l'algèbre ne dépend pas du choix de la base

Dans cette Note nous allons faire quelques considérations sur les algèbres du troisième degré. Pour ces algèbres, les polynômes ψ^i se présentent sous la forme :

$$\psi^i(\xi^1, \ldots, \xi^n; \eta^1, \ldots, \eta^n) = a^i_{p,q}\,\xi^p\,\eta^q + a^i_{pq,r}\,\xi^p\,\xi^q\,\eta^r + a^i_{p,qr}\,\xi^p\,\eta^q\,\eta^r. \tag{6}$$

Sans restreindre la généralité, on suppose que :

$$a^i_{pq,r} = a^i_{qp,r}, \qquad a^i_{p,qr} = a^i_{p,rq}. \tag{7}$$

Les algèbres commutatives du troisième degré sont données par les conditions :

$$\begin{cases} a^i_{p,q} = a^i_{q,p}, \\ a^i_{r,pq} = a^i_{pq,r}. \end{cases} \tag{8}$$

Ces algèbres ne sont pas distributives. Les différences :

$$\begin{aligned} D_1 &= (x + y) \circ z - x \circ z - y \circ z = 2a^i_{pq,r}\,\xi^p\,\eta^q\,\xi^r\,e_i, \\ D_2 &= x \circ (y + z) - x \circ y - x \circ z = 2a^i_{p,qr}\,\xi^p\,\eta^q\,\xi^r\,e_i \end{aligned} \tag{9}$$

expriment les écarts de la distributivité et ce sont des fonctions vectorielles linéaires en x, y, z, par lesquelles on peut interpréter les coefficients :

$$\begin{cases} a^i_{pq,r}\,e_i = \frac{1}{2}\,D_1(e_p, e_q, e_r), \\ a^i_{p,qr}\,e_i = \frac{1}{2}\,D_2(e_p, e_q, e_r). \end{cases} \tag{10}$$

Pour que D_1 soit égale à D_2, il faut et il suffit que :

$$a^i_{pq,r} = a^i_{p,qr}. \tag{11}$$

Dans ce cas, nous avons de plus :

$$a^i_{pq,r} = a^i_{qp,r} = a^i_{q,pr} = a^i_{q,rp} = a^i_{qr,p} = a^i_{rq,p} = a^i_{r,qp} = a^i_{r,pq}$$

et on peut se dispenser de la virgule entre les trois indices p, q, r. Si l'on a aussi : $a^i_{p,q} = a^i_{q,p}$, alors les algèbres considérées sont commutatives. Nous obtenons pour le polynôme ψ^i :

$$\psi^i = [a^i_{pq} + a^i_{pqr}(\xi^r + \eta^r)]\,\xi^p\eta^q \tag{12}$$

Alors, en introduisant l'opérateur :

$$F(x) = \frac{1}{2}\,(x \circ x), \tag{13}$$

on constate :

$$x \circ y = F(x + y) - F(x) - F(y). \tag{14}$$

Réciproquement, étant donné un opérateur du troisième degré

$$F(x) = \left(\frac{1}{2}\,a^i_{pq}\,\xi^p\,\xi^q + \frac{1}{6}\,a^i_{pqr}\,\xi^p\,\xi^q\,\xi^r\right)e_i, \tag{15}$$

l'algèbre définie par :

$$x \circ y = F(x + y) - F(x) - F(y) \tag{16}$$

satisfait aux conditions (8) et (11).

Les conditions d'associativité, pour les algèbres du troisième degré, sont exprimées par cinq systèmes d'équations de structure, à savoir :

$$a^i_{r,t}\,a^r_{u,v} = a^i_{u,s}\,a^s_{v,t}; \tag{17}$$

$$a^i_{r,t}\,a^r_{us,v} = a^i_{us,h}\,a^h_{r,t}, \qquad a^i_{r,t}\,a^r_{u,sv} = a^i_{u,h}\,a^h_{rs,t}, \qquad a^i_{r,t}\,a^r_{v,su} = a^i_{h,su}\,a^h_{t,v}; \tag{18}$$

$$\begin{cases} 2a^i_{hu,t}\,a^t_{lw,v} = a^t_{rs,v}\,(a^s_{u,w}\,a^r_{h,l} + a^s_{h,w}\,a^r_{u,l}), \\ a^i_{r,sv}\,a^r_{kh,l} = a^i_{kh,t}\,a^t_{l,sv}, \\ 2a^i_{r,sv}\,a^r_{h,kl} = a^i_{h,pq}\,(a^p_{k,s}\,a^q_{l,v} + a^p_{l,s}\,a^q_{k,v}); \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases} a^i_{rs,t}\,(a^s_{uv,w}\,a^r_{h,l} + a^s_{vh,w}\,a^r_{u,l} + a^s_{uh,w}\,a^r_{v,l} + a^s_{uv,l}\,a^r_{h,w} + a^s_{vh,l}\,a^r_{u,w} + \\ \qquad + a^s_{uh,l}\,a^r_{v,w}) = 0, \\ a^i_{rs,t}\,(a^s_{u,vw}\,a^r_{h,l} + a^s_{u,vl}\,a^r_{h,w} + a^s_{u,wl}\,a^r_{h,v} + a^s_{h,vw}\,a^r_{u,l} + a^s_{h,vl}\,a^r_{u,w} + \\ \qquad + a^s_{h,wl}\,a^r_{u,v}) = 0, \\ a^i_{t,sr}\,(a^s_{uv,w}\,a^r_{h,l} + a^s_{vh,w}\,a^r_{u,l} + a^s_{uh,w}\,a^r_{v,l} + a^s_{uv,l}\,a^r_{h,w} + a^s_{vh,l}\,a^r_{u,w} + \\ \qquad + a^s_{uh,l}\,a^r_{v,w}) = 0, \\ a^i_{t,sr}\,(a^s_{u,vw}\,a^r_{h,l} + a^s_{u,vl}\,a^r_{h,w} + a^s_{u,wl}\,a^r_{h,v} + a^s_{h,vw}\,a^r_{u,l} + a^s_{h,vl}\,a^r_{u,w} + \\ \qquad + a^s_{h,wl}\,a^r_{u,w}) = 0; \end{cases} \tag{20}$$

$$
(21)\quad \begin{cases}
a^i_{rz,t}\,(a^r_{us,v}\,a^z_{p,lq} + a^r_{up,v}\,a^z_{s,lq} + a^r_{sp,v}\,a^z_{u,lq} + a^r_{us,l}\,a^z_{p,qv} + a^r_{up,l}\,a^z_{s,qv} + \\
\qquad + a^r_{sp,l}\,a^z_{u,qv} + a^r_{us,q}\,a^z_{p,vl} + a^r_{up,q}\,a^z_{s,vl} + a^r_{sp,q}\,a^z_{u,vl}) = 0\,, \\[2ex]
a^i_{t,rz}\,(a^r_{us,v}\,a^z_{p,lq} + a^r_{up,v}\,a^z_{s,lq} + a^r_{sp,v}\,a^z_{u,lq} + a^r_{us,l}\,a^z_{p,qv} + a^r_{up,l}\,a^z_{s,qv} + \\
\qquad + a^r_{sp,l}\,a^z_{u,qv} + a^r_{us,q}\,a^z_{p,vl} + a^r_{up,q}\,a^z_{s,vl} + a^r_{sp,q}\,a^z_{u,vl}) = 0\,, \\[2ex]
a^i_{rz,t}\,(a^r_{us,v}\,a^z_{pl,q} + a^r_{up,v}\,a^z_{ls,q} + a^r_{ul,v}\,a^z_{sp,q} + a^r_{sp,v}\,a^z_{lu,q} + a^r_{sl,v}\,a^z_{up,q} + \\
\qquad + a^r_{pl,v}\,a^z_{us,q}) = 0\,, \\[2ex]
a^i_{rz,t}\,(a^r_{u,sv}\,a^z_{p,lq} + a^r_{u,pv}\,a^z_{l,sq} + a^r_{u,lv}\,a^z_{s,pq} + a^r_{s,pv}\,a^z_{l,uq} + a^r_{s,lv}\,a^z_{u,pq} + \\
\qquad + a^r_{p,lv}\,a^z_{u,sq}) = 0\,, \\[2ex]
a^i_{t,rz}\,(a^r_{us,v}\,a^z_{pl,q} + a^r_{up,v}\,a^z_{ls,q} + a^r_{ul,v}\,a^z_{sp,q} + a^r_{sp,v}\,a^z_{lu,q} + a^r_{sl,v}\,a^z_{up,q} + \\
\qquad + a^r_{pl,v}\,a^z_{us,q}) = 0\,, \\[2ex]
a^i_{t,rz}\,(a^r_{u,sv}\,a^z_{p,lq} + a^r_{u,pv}\,a^z_{l,sq} + a^r_{u,lv}\,a^z_{s,pq} + a^r_{s,pv}\,a^z_{l,uq} + a^r_{s,lv}\,a^z_{u,pq} + \\
\qquad + a^r_{p,lv}\,a^z_{u,sq}) = 0\,.
\end{cases}
$$

Nous avons : $n^4\,(1 + 3n + 3n^2 + 4n^3 + 6n^4)$ équations pour les $n^3(1 + 2n)$ inconnues, qui sont les coefficients de (6) ; pourtant il en existe des solutions ; ce sont des exemples qui confirment l'existence de telles algèbres. Pour les algèbres commutatives et pour celles données par la condition (11), les systèmes (17)—(21) comportent des simplifications.

On peut trouver ainsi, parmi les algèbres du troisième degré, des algèbres anticommutatives. Elles sont caracterisées par les relations :

$$
(22)\qquad \begin{cases} a^i_{p,q} = -\,a^i_{q,p}\,, \\ a^i_{pq,r} = -\,a^i_{r,pq}\,. \end{cases}
$$

Quand : $D_1 = -D_2$, on doit avoir :

$$
(23)\qquad a^i_{pq,r} = -\,a^i_{p,qr}
$$

et si, en plus $a^i_{p,q} = -\,a^i_{q,p}$, nous obtenons des algèbres anticommutatives qui sont données par :

$$
(24)\qquad \zeta = a^i_{pq} + a^i_{prq}\,(\xi^r - \eta^r)\,\xi^p\,\xi^q\,.
$$

Nous choisissons les algèbres qui sont soumises aussi à la condition de Jacobi :

$$
(25)\qquad (x \circ y) \circ z + (y \circ z) \circ x + (z \circ x) \circ y = 0\,.
$$

Ce sont des algèbres de Lie, non-distributives. Les conditions (22) et (25) se reflètent dans les systèmes :

$$
(26)\qquad a^i_{pq}\,a^p_{lm} + a^i_{pl}\,a^p_{mq} + a^i_{pm}\,a^p_{lq} = 0\,,
$$

$$
(27)\qquad a^i_{pq}\,a^p_{lk,m} - a^i_{pm}\,a^p_{lk,q} - a^i_{kl,p}\,a^p_{mq} = 0\,,
$$

$$
(28)\qquad a^i_{pr,q}\,a^r_{uv}\,a^p_{lm} - a^i_{lu,p}\,a^p_{mv,q} + a^i_{mv,p}\,a^p_{lu,q} = 0\,,
$$

$$
(29)\qquad \begin{aligned}
a^i_{pr,q}\,\{ & a^r_{lm}\,(a^r_{uw,v} + a^r_{u,wv} + a^r_{wu,v} + a^r_{w,uv}) + \\
& + a^p_{um}\,(a^r_{wl,v} + a^r_{w,lv} + a^r_{lw,v} + a^r_{l,wv}) + \\
& + a^p_{wm}\,(a^r_{ul,v} + a^r_{w,lv} + a^r_{lu,v} + a^r_{l,uv}) + \\
& + a^p_{lv}\,(a^r_{uw,m} + a^r_{u,wm} + a^r_{wu,m} + a^r_{w,um}) + \\
& + a^p_{uv}\,(a^r_{wl,m} + a^r_{w,lm} + a^r_{lw,m} + a^r_{l,wm}) + \\
& + a^p_{wv}\,(a^r_{ul,m} + a^r_{u,lm} + a^r_{lu,m} + a^r_{l,um})\} = 0\,,
\end{aligned}
$$

$$
(30)\qquad \begin{aligned}
a^i_{pr,q}\,(a^r_{uw,v}\,a^p_{lk,m} + a^r_{ul,v}\,a^p_{wk,m} + a^r_{lw,v}\,a^p_{uk,m} + a^r_{kw,v}\,a^p_{lu,m} + \\
+ a^r_{ku,v}\,a^p_{wl,m} + a^r_{,k,v}\,a^p_{uw,m}) = 0\,,
\end{aligned}
$$

$$
(31)\qquad \begin{aligned}
a^i_{pr,q}\,(a^r_{uw,v}\,a^p_{mk,l} + a^r_{ul,v}\,a^p_{mk,w} + a^r_{uw,m}\,a^p_{vk,l} + a^r_{kv,w}\,a^p_{lu,m} + \\
a^r_{kv,u}\,a^p_{lw,m} + a^r_{km,u}\,a^p_{lw,v} + a^r_{vm,w}\,a^p_{lu,k} + a^r_{vm,u}\,a^p_{lw,k} + \\
+ a_{r_{vm,l}}\,a^p_{wu,k}) = 0\,.
\end{aligned}
$$

Bien que le nombre des équations est assez grand et beaucoup plus grand que le nombre des inconnues, il en existe des solutions. Par exemple pour $n = 2$, on trouve l'algèbre :

$$
x \circ y = \xi^1\,\eta^1\,(\xi^2 - \eta^2)\,e_1
$$

qui est non-distributive, anticommutative et qui vérifie l'identité de Jacobi.

BIBLIOGRAPHIE

1. Creangă Ion — *Sur une algèbre attachée à un opérateur linéaire*. An. şt. Univ. Iaşi, (s.n.), s. I, t. XI$_A$ (1965), p. 21—25.

2. Creangă Ion — *Considérations sur l'équation fonctionnelle* $F[F(x+y)-F(x)-F(y)+z]-F[F(x+y)-F(x)-F(y)]=F[F(z+y)-F(z)-F(y)+x]-\ldots$ An. şt. Univ. Iaşi, (s.n.), s. I, t. XII, (1966), p. 247—252.

3. Creangă Ion — *Sur l'équation de l'associativité pour les algèbres* $\mathcal{A}_F$. An. şt. Univ. Iaşi (s.n.), s.I, t. XIII (1967), p. 249—255.

ASUPRA ALGEBRELOR DE GRADUL AL III-LEA

Rezumat

În această Notă se defineşte gradul unei algebre de ordin finit ca fiind gradul maxim al polinoamelor ce sînt coordonatele produsului (1). Se studiază apoi algebrele de gradul al III-lea, determinînd acele care sînt comutative (8), cele care îndeplinesc condiţia $D_1 = D_2$ şi apoi condiţiile de asociativitate date de sistemele (17)—(21). În continuare se cercetează algebre de gradul al treilea anticomutative date prin (22); printre acestea se caută acelea care îndeplinesc şi condiţia lui Jacobi (25). Se ajunge la sistemele (26)—(31). Soluţiile acestor sisteme ne dau algebre Lie de gradul al III-lea.

ON THE PRODUCT OF TWO THREE-DIMENSIONAL MATRICES

BY

CORINA REISCHER

A three-dimensional matrix A of type (p, q, r) is a system of pqr numbers a_{ijk} $(1 \leqslant i \leqslant p;\ 1 \leqslant j \leqslant q;\ 1 \leqslant k \leqslant r)$ from a certain numerical field K, placed in the points of the three-dimensional space $P(i, j, k)$. We denote $A = (a_{ijk})$ $(1 \leqslant i \leqslant p;\ 1 \leqslant j \leqslant q;\ 1 \leqslant k \leqslant r)$.

The addition of matrices of the same type and the multiplication of a matrix by scalars are similar in the bi-dimensional and three-dimensional case. For the product of two three-dimensional matrices the situation is a different one. The product is obtained generally as a 4-, 5- or even 6-dimensional matrix, e.g. the products introduced by Rice [5] and Oldenburger [3]. Using the definition given by Cayley-Scott [2, 8] we can obtain a three-dimensional product matrix in the following manner

$$c_{uvw} = a_{uvk}\, b_{kvw}, \tag{1}$$

where k is a summation index, and $A = (a_{ijk})$, $B = (b_{ijk})$ and $C = AB = (c_{ijk})$ are all three-dimensional matrices.

Sokolov's product for n-dimensional matrices [7] reduces, for $n = 3$, to the product (1). This product may be obtained as follows:

Denote by $A_j = (a_{ijk})$ $(j = 1, \ldots, q)$ the q bi-dimensional matrices. Then A can be written as $A = A_1 e_1 + \ldots + A_q e_q$, where A_j $(j = 1, \ldots, q)$ are regarded as bi-dimensional „leaves" of the three-dimensional matrix A, and e_j $(j = 1, \ldots, q)$ are certain symbols.

Using the product $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$, where δ_{ij} is Kronecker's delta, we obtain the product (1) of two three-dimensional matrices A and B, namely $C = AB = (A_1 B_1) e_1 + \ldots + (A_q B_q) e_q$, where $A_j B_j$ $(j = 1, \ldots, q)$ is the usual product of two bi-dimensional matrices. This product exists if $q = \bar{q}$, $r = \bar{p}$, where (p, q, r) and $(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$ are the types of the matrices A and B respectively.