INÉGALITÉS DIFFÉRENTIELLES POUR UNE CERTAINE ÉQUATION FONCTIONNELLE DE VOLTERRA

PAR

PAVEL TALPALARU

Nous allons considérer des systèmes d'équations différentielles dont $f(t, \cdot, \alpha \leqslant s \leqslant t)$ est un opérateur de Volterra.

Plus précisément, soit le système

$$(S) \qquad \dot{x}(t) = f(t, x(s), \alpha \leqslant s \leqslant t) \text{ pour } t > t_0,$$

où nous supposons que $x(t)$ est un élément de l'espace euclidien E^n et $\alpha \leqslant t_0$ est un nombre fixé.

Le deuxième membre du système (S) sera déterminé par les valeurs de t et de $x(s)$ pour $\alpha \leqslant s \leqslant t$.

Pour abréger la notation nous allons écrire le système (S) sous la forme

$$(S') \qquad \dot{x}(t) = f(t, x(\cdot)) \text{ pour } t > t_0.$$

Remarquons que l'étude de ces systèmes a fait l'objet de nombreux travaux, entre autres ceux de Rodney D. Driver [2] (où l'auteur a donné des théorèmes d'existence et d'unicité et a appliqué la méthode de la fonction de Liapounoff pour l'étude du problème de la stabilité) et de C. Corduneanu [1] qui a établi des théorèmes d'existence et d'unicité dans des conditions plus générales.

Dans ce qui suit nous supposons que $f(t, \varphi(\cdot))$ est une fonctionnelle définie pour $t \in [t_0, a)$ et $\varphi \in C([\alpha, t] \to D)$, à valeurs dans E^n, où $-\infty < \alpha \leqslant t_0 < a \leqslant \infty$ et D est un domaine de E^n.

Nous allons supposer que les conditions d'existence et d'unicité sont remplies; parmi celles-ci se trouve la condition de continuité de la fonctionnelle $f(t, \varphi(\cdot)) : [t_0, a) \times C([t_0, a) \to D) \to E^n$.

Seminar ... A. Müller

Nous allons étudier quelques inégalités différentielles pour le problème de Cauchy

$$(1)\qquad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(\cdot)), && t \in [t_0, a), \\ x(t) &= \varphi(t), && t \in [\alpha, t_0]. \end{aligned}$$

Hypothèse (I). *Nous dirons que $f(t, u)$ satisfait à l'hypothèse (I) au point t si l'inégalité*

$$f(t, u) \geqslant f(t, v)$$

a lieu pour tous les vecteurs $u, v \in C([\alpha, a) \to D)$, dès que $u \geqslant v$.

Dans ce qui suit nous allons supposer que l'hypothèse (I) est remplie par $f(t, u)$.

Théorème 1. *Si la fonction $u(t)$ est dérivable sur $[t_0, a)$ et satisfait aux inégalités :*

$$(2)\qquad \frac{du}{dt} > f(t, u(\cdot)), \qquad t \in [t_0, a),$$

$$(3)\qquad u(t) \geqslant \varphi(t), \qquad t \in [\alpha, t_0],$$

alors, pour toute solution $x(t)$ du problème (1) qui est définie sur $[t_0, a_1) \subset \subset [t_0, a)$, nous avons

$$u(t) < x(t) \quad \text{pour} \quad t \in (t_0, a_1).$$

Démonstration. Montrons d'abord que (4) a lieu sur un certain intervalle

$$(t_0, t_0 + \varepsilon), \qquad \varepsilon > 0.$$

En effet, d'après (3) et (1) il résulte $u(t_0) \geqslant \varphi(t_0) = x(t_0)$. Si $u(t_0) > x(t_0)$, alors il existe $\varepsilon > 0$ de sorte que $u(t) > x(t)$ pour $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)$. Si $u(t_0) = x(t_0)$ alors, d'après (2), (3), (1) et l'hypothèse (I), il suit :

$$\frac{du}{dt}(t_0) > f(t_0, u(s), \quad \alpha \leqslant s \leqslant t_0) \geqslant f(t_0, x(s), \quad \alpha \leqslant s \leqslant t_0) = \frac{dx(t_0)}{dt},$$

parce que $u(t) \geqslant \varphi(t)$ pour $t \in [\alpha, t_0]$, $x(t) = \varphi(t)$ pour $t \in [\alpha, t_0]$. De la relation $du/dt(t_0) > dx/dt(t_0)$ il suit qu'il existe $\varepsilon > 0$, de sorte que $u(t) > x(t)$ pour $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)$.

Posons maintenant

$$r = \sup\{\tau;\ u(t) > x(t),\ t \in (t_0, \tau)\}.$$

Alors

$$f(r, u(s), \ \alpha \leqslant s \leqslant r) \geqslant f(r, x(s), \ \alpha \leqslant s \leqslant r),$$

parce que pour $t \in [\alpha, t_0]$, $u(t) \geqslant \varphi(t) = x(t)$ et pour $t \in (t_0, r]$, $u(t) > x(t)$ et par conséquent si $t \in [\alpha, r]$ il suit $u(t) \geqslant x(t)$.

En utilisant cette inégalité et l'inégalité (2) on obtient $\frac{du}{dt}(r) > f(r, u(s), \alpha \leqslant s \leqslant r) \geqslant f(r, x(s), \ \alpha \leqslant s \leqslant r) = \frac{dx}{dt}(r)$. Mais, si $r < a_1$ alors, pour au moins un indice i, nous avons

$$(5)\qquad u_i(r) = x_i(r),$$

$$(6)\qquad u_i(t) > x_i(t), \qquad t \in (t_0, r),$$

d'où il résulte

$$\frac{du}{dt}(r) \leqslant \frac{dx}{dt}(r).$$

De la contradiction obtenue on tire la conclusion que l'inégalité (4) est remplie sur tout (t_0, a_1).

Remarque. De la même manière on peut démontrer un théorème analogue en remplaçant les inégalités (2) et (3) par les inégalités

$$(2')\qquad \frac{du}{dt} < f(t, u(\cdot)), \qquad t \in [t_0, a),$$

$$(3')\qquad u(t) \leqslant \varphi(t), \qquad t \in [\alpha, t_0].$$

La conclusion sera alors

$$(4')\qquad u(t) < x(t) \quad \text{pour} \quad t \in (t_0, a_1).$$

Définition 1. *Soient $t_1 < t_2$, $(t_1, t_2 \in [t_0, a))$, $x_1(t)$ une solution du système définie sur $[t_0, t_1)$ avec $x_1(t) = x_2(t)$ sur $[t_0, t_1)$. On dit que $x_2(t)$ est le prolongement de la solution $x_1(t)$ sur $[t_0, t_2)$.*

Définition 2. *La solution $x(t)$ définie sur $[t_0, t_1)$ s'appelle non-prolongeable si $x(t)$ n'est pas une partie d'une solution prolongeable.*

Définition 3. *La solution $\overline{x}(t)$ définie sur $[t_0, t_1)$ s'appelle maximale si pour toute solution définie sur $[t_0, t_2)$, on a $x(t) \leqslant \overline{x}(t)$ pour $t \in [t_0, t_2)$.*

D'une manière semblable on définit la solution minimale. Nous donnons maintenant un théorème d'existence pour la solution maximale (minimale).

Avant d'énoncer le théorème en question nous donnons encore une définition liée à la fonctionnelle $f(t, \psi(\cdot))$.

Définition 4. *Nous dirons que $f(t, \psi(\cdot))$ est bornée si elle est bornée, considérée comme un opérateur $\{[t_0, a_1] \times C([t_0, a_1] \to D)\} \to E^n$, pour tout $a_1 \in (t_0, a)$.*

Théorème 2. *Si $f(t, \psi(\cdot))$ est bornée, alors il existe un intervalle $[t_0, t_0 + h]$, $h > 0$, où le problème (1) a une solution maximale (minimale).*

Démonstration. D'après le théorème d'existence (voir par exemple [2]) il existe un intervalle $[t_0, t_0 + h]$ où le problème (1) et le problème

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = f(t, x(\cdot)) + \frac{1}{n}, \quad n \text{ entier} \geq 1, \quad t \in [t_0, a) \\ &x(t) = \varphi(t), \qquad t \in [\alpha, t_0] \end{aligned}$$

a au moins une solution. Soient $x(t)$ et $x_n(t)$ ces solutions.

La suite $\{x_n(t)\}$ est uniformément convergente sur $[t_0, t_0 + h]$. Il est évident que

$$(8)\qquad \frac{dx_n}{dt}(t) > f(t, x_n(\cdot)),$$

$$(9)\qquad \frac{dx_{n+1}}{dt}(t) < f(t, x_{n+1}(\cdot)) + \frac{1}{n}.$$

En appliquant le théorème 1 il suit

$$(10)\qquad x(t) < x_{n+1}(t) < x_n(t) \leq x_1(t),$$

d'où $\|x_n(t)\| \leq M_1$ pour $t \in [t_0, t_0 + h]$. Par conséquant la famille de fonctions $\{x_n(t)\}$ est uniformément bornée.

Des faits que $f(t, \varphi(\cdot))$ est bornée et que $x_n(t)$ satisfait au système (7) il suit :

$$\left\| \frac{dx_n}{dt}(t) \right\| < \|f(t, x_n(\cdot))\| + \frac{1}{n} \leq M_2 + 1$$

pour $t \in [t_0, t_0 + h]$ et $\|x_n(t)\| \leq M_1$.

Il résulte que la suite $\{x_n(t)\}$ est équi-continue.

D'après le lemme d'Arzelà, $\{x_n(t)\}$ est uniformément convergente. Soit

$$\bar{x}(t) = \lim_{n \to \infty} x_n(t).$$

De la relation (10) il résulte $\bar{x}(t) \geq x(t)$, où $x(t)$ est une solution quelconque du problème (1).

En passant à la limite dans les égalités

$$x_n(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_n(\cdot))\, d\tau + \frac{t - t_0}{n}, \qquad t \in [t_0, t_0 + h]$$

$$x_n(t) = \varphi(t), \qquad t \in [\alpha, t_0]$$

on obtient

$$\bar{x}(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \bar{x}(\cdot))\, d\tau, \qquad t \in [t_0, t_0 + h]$$

$$\bar{x}(t) = \varphi(t), \qquad t \in [\alpha, t_0],$$

si nous supposons encore que $f(t, u)$ est uniformément continue par rapport à u.

Par conséquent $\bar{x}(t)$ est solution du problème (1).

Théorème 3. *Soient $\bar{x}(t)$ et $\underline{x}(t)$ les solutions maximales, définies sur $[t_0, t_0 + h]$, du problème* (1) *et, respectivement, du problème*

$$(11)\qquad \begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = f(t, x(\cdot)), \qquad t \in [t_0, a), \\ &x(t) = \psi(t), \qquad t \in [\alpha, t_0] \end{aligned}$$

où

$$(12)\qquad \varphi(t) > \psi(t).$$

Alors il y a un intervalle $[t_0, t_0 + h]$, où $\bar{x}(t) \geq \underline{x}(t)$.

Démonstration. Choisissons h de manière que sur l'intervalle $[t_0, t_0 + h]$ les solutions maximales des problèmes (1), (11) et de chacun des problèmes

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = f(t, x(\cdot)) + \frac{1}{n}, \quad n \geq 1, \quad t \in [t_0, a), \\ &x(t) = \varphi(t), \qquad t \in [\alpha, t_0] \end{aligned}$$

existent.

D'après le théorème 2 la suite $\{x_n(t)\}$ converge uniformément vers la solution maximale du problème (1) et comme suite de l'inégalité (12), on a $x_n(t) \geq \underline{x}(t)$. Il s'ensuit

$$\bar{x}(t) = \lim_{n \to \infty} x_n(t) \geq \underline{x}(t).$$

Remarque. Un résultat analogue peut être établi en considérant les solutions minimales.

Théorème 4. *Le problème* (1) *admet dans $[t_0, a_1)$, $a_1 \leq a$, une solution maximale (minimale) non-prolongeable $x(t)$, du problème.*

Nous ne donnons pas la démonstration de ce théorème parce qu'elle est complètement analogue au théorème 2 dû à M. P. Michaïlova et V. V. Podgornov [3] qui ont étudié ce problème pour le cas d'un système d'équations à retardement.

Comme l'a montré Rodney D. Driver [2] le système (S') est plus général que celui étudié par les auteurs cités plus haut.

Théorème 5. *Si $x(t)$ est la solution maximale du problème (1) et si la fonction $u(t)$ différentiable et avec des dérivées continues sur $[t_0, a)$ satisfait aux inégalités*

$$\frac{du}{dt}(t) \leq f(t, u(\cdot)), \qquad t \in [t_0, a), \tag{13}$$

$$u(t) \leq \varphi(t), \qquad t \in [\alpha, t_0], \tag{14}$$

alors

$$u(t) \leq \bar{x}(t) \text{ pour } t \in [t_0, a). \tag{15}$$

Démonstration. D'après le théorème 2 il résulte que sur $[t_0, t_0 + h]$, $\bar{x}(t) = \lim_{n \to \infty} x_n(t)$, où $x_n(t)$ est une solution pour (7).

Nous avons encore:

$$\frac{du}{dt} - f(t, u(\cdot)) - \frac{1}{n} < 0,$$

et en prenant en considération le théorème 1 il suit que $u(t) < x_n(t)$ qui, à la limite, donne l'inégalité (15) sur $[t_0, t_0 + h]$.

Démontrons maintenant que l'inégalité (15) a lieu sur $[t_0, a)$.

Du fait que l'inégalité (15) a lieu sur $[t_0, t_0 + h]$ il suit qu'il existe un intervalle maximal $[t_0, T)$ où l'inégalité a lieu.

Moutrons que $T = b$. Si nous supposons que $T < b$ il suit

$$\frac{du}{dt}(t) < f(t, u(\cdot)), \qquad t \in [T, a),$$

$$u(t) \leq \bar{x}(t), \qquad t \in [\alpha, T].$$

D'après la première partie de la démonstration, il existe h de sorte que $u(t) \leq \bar{x}(t)$ pour $t \in [T, T + h)$ et par conséquent $u(t) \leq \bar{x}(t)$ pour $t \in [t_0, T + h)$.

Ce fait contredit la définition de l'intervalle $[t_0, T)$ qui a été supposé maximal.

Remarque. Un théorème similaire est vrai pour la solution minimale.

Mentionnons encore que des résultats analogues peuvent être établis en considérant au lieu de la dérivée $\dot{x}(t)$ le nombre dérivé $Dx(t)$, comme l'a considéré V. Lakshmikantham et G. R. Shendge [4] dans l'étude des inégalités différentielles pour un certain système à retardement.

Parmi les applications de ces résultats, à côté de celles mentionnées dans [2], remarquons encore celle qui se rapporte au système intégro-différentiel de la forme

$$\dot{x}(t) = f(t) + \int_0^{\alpha(t)} K(t, s, x(s))\, ds.$$

Des résultats analogues à ceux que nous avons établis, mais pour un système d'équations intégrales

$$x(t) = f(t) + \int_0^{\alpha(t)} K(t, s, x(s))\, ds,$$

ont été donnés par V. M. Mousaev [5].

BIBLIOGRAPHIE

1. Corduneanu C. — *Sur certaines équations fonctionnelles de Volterra*. Funkcialaj Ekvacioj, vol. 9, No. 1–3, (1966), p. 119–127.
2. Driver D. R. — *Existence and stability of solutions of a delay-differential system*. M.R.C. Technical Summary Report 300, April 1962.
3. Михайлова М. П., Подгорнов В. В. — *О дифференциальных неравенствах для уравнений с запаздывающим аргументом*. Дифф. уравн., Том. 1, № 9 (1965), стр. 1183—1189.
4. Lakshmikantham V., Shendge G. R. — *Functional Differential Inequalities*. Anais da Acad. Bras. de Ciencias, vol. 39, 1967, 1, p. 7–14.
5. Мусаев В. М. — *Об одном типе интегральных уравнений в банаховых пространствах*. Сиб. мат. Журнал, VIII, 3, 1967.

INEGALITĂŢI DIFERENŢIALE PENTRU O ANUMITĂ ECUAŢIE FUNCŢIONALĂ VOLTERRA

Rezumat

Se stabilesc cîteva rezultate privind inegalităţile diferenţiale pentru sisteme de ecuaţii diferenţiale de forma (S') şi de asemenea este studiată problema existenţei soluţiei maximale pentru sisteme de aceeaşi formă.