SOLUTIONS PÉRIODIQUES POUR CERTAINES ÉQUATIONS HYPERBOLIQUES

PAR

DAN PETROVANU

§ 0. Introduction

Dans ses travaux [2], [3], [4], [5], L. Cesari a étudié le problème de l'existence des solutions périodiques du problème de Darboux

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \tag{0.1}$$

$$u(x, 0) = \sigma(x), \qquad u(0, y) = \tau(y), \tag{0.2}$$

(f, u, σ, τ des fonctions-vecteurs). Il s'est proposé d'abord de trouver des conditions suffisantes pour l'existence, ou bien l'existence et l'unicité des solutions du problème (0.1), (0.2), périodiques de période T en x, dans une bande $-\infty < x < +\infty$, $|y| \leqslant a$ (v. [2], [3], [5]). Ensuite, il s'est posé les mêmes problèmes relativement aux solutions du problème (0.1), (0.2), périodiques de période T en x et en y dans $-\infty < x, y < +\infty$, [4]. La méthode élaborée à cette occasion par L. Cesari pourrait être appelée la méthode de l'équation modifiée. En partant de l'observation que toute solution périodique de période T en x (dans la bande $-\infty < x < +\infty$, $|y| \leqslant a$) du problème (0.1), (0.2) satisfait à la condition

$$m(y) = T^{-1} \int_0^T f[\xi, y, u(\xi, y), u_x(\xi, y), u_y(\xi, y)]d\xi = 0 .$$

L. Cesari a considéré dans [2], [3] le „problème modifié".

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y) - m(y) \tag{0.3}$$

$$u(x + T, y) = u(x, y), \quad u(x, 0) = \sigma(x), \quad u(0, y) = \tau(y), \tag{0.4}$$

avec $\sigma(0) = \tau(0)$, pour $-\infty < x < +\infty$, $|y| \leqslant a$, où $\sigma(x)$ et $\tau(y)$ sont des

fonctions données et a un nombre positif. *Si f est bornée, continue et périodique en x (de période T), si f satisfait à la condition*

$$(0.5)\qquad |f(x, y, u, p, q) - f(x, y, u, \bar{p}, \bar{q})| \leq M_1 |p - \bar{p}| + M_2 |\bar{q} - q|,$$

et $\sigma(x)$ et $\tau(y)$ satisfont à certaines conditions de régularité, il existe (au moins) *une solution de* (0.3), (0.4), *pourvu qu'on ait*

$$(0.6)\qquad 2M_2 T < 1, \qquad M_1 a < 1,$$

(v. [2], [3]). Une fois ce théorème établi, le problème posé par Cesari est le suivant : pour une fonction-vecteur $m(y)$ assignée (par exemple $m(y) \equiv 0$), déterminer $\tau(y)$ de façon que la solution qui correspond à $\sigma(x)$, $\tau(y)$ vérifie

$$(0.3')\qquad u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y) - m(y).$$

(Si $m(y) \equiv 0$, alors la solution de (0.3') est, évidemment une solution de l'équation initiale (0.1)) Cesari a répondu lui-même à ce problème. Nous renvoyons à [2], [3], [5] et à [1] pour toutes les questions concernant ce problème. Ajoutons que le problème de l'existence d'une solution $u(x, y)$ de (0.1), (0.2), périodique de période T en x et y dans $-\infty < x, y < +\infty$ est considérée dans [4] et [1]. Nous renvoyons à ces travaux, dans lesquels on peut trouver „l'équation modifiée" à considérer dans ce cas. Nous renvoyons à [10] pour un aperçu général des résultats.

Dans ce travail, *nous nous proposons d'appliquer la „méthode de l'équation modifiée" pour le problème aux limites de* J. Conlan [6]. Le problème de Conlan est le suivant : Trouver une fonction $u(x, y, z)$, continue avec ses dérivées u_x, u_y, u_z, u_{xy}, u_{xz}, u_{yz} et satisfaisant à l'équation

$$(0.8)\qquad u_{xyz} = f(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z, u_{xz}, u_{yz})$$

et aux conditions

$$(0.9)\qquad u(0, y, z) = \rho(y, z), \quad u(x, 0, z) = \sigma(x, z), \quad u(x, y, 0) = \tau(x, y),$$

où

$$(0.10)\qquad \rho(y, 0) = \tau(0, y), \quad \rho(0, z) = \sigma(0, z), \quad \sigma(x, 0) = \tau(x, 0).$$

Le problème (0.8), (0.9) est équivalent à l'équation

$$(0.11)\qquad u(x, y, z) = g(x, y, z) + \int_0^x \int_0^y \int_0^z f[\xi, \eta, \zeta, u(\xi, \eta, \zeta), \ldots, u_{yz}(\xi, \eta, \zeta)]\, d\zeta\, d\eta\, d\xi$$

où

$$g(x, y, z) = \rho(y, z) + \sigma(x, z) + \tau(x, y) - \rho(0, z) - \sigma(x, 0) - \tau(0, y) + \rho(0, 0).$$

Supposons que σ et τ soient des fonctions périodiques par rapport à x (de période T). Supposons aussi qu'on ait $f(x + T, \ldots) = f(x, \ldots)$. Alors, si $q(x, y, z)$ est une solution périodique en x (de période T) on a

$$\int_0^T f[\xi, y, z, q(\xi, y, z), \ldots, q_{yz}(\xi, y, z)]\, d\xi = 0.$$

„L'équation modifiée" à considérer (dans le cas des solutions périodiques de périodes T en x seulement) sera l'équation (1.11) ci-dessous avec $m(y, z)$ donnée par (1.10). Le „problème modifié" sera (1.9), (1.10), (1.11). Si on cherche à démontrer l'existence des solutions périodiques en x et en y du problème de Conlan, l'équation modifiée à investiguer sera (1.11)* ci-dessous, et si on pose le même problème pour les solutions périodiques en x, y et z, l'équation modifiée à considérer sera (1.11)** ci-dessous. Nous montrons que le programme de L. Cesari peut être suivi pour le problème de Conlan.

Dans le § 2 nous démontrons qu'on peut généraliser, pour le problème de Conlan, le premier théorème de A. K. Aziz [1]. Une simple lecture du § 2 permet d'observer que le deuxième théorème de [1] a aussi un analogue dans le cas du problème de Conlan. Nous laissons au lecteur la démonstration de cet analogue.

D'autre part, on peut se poser le problème suivant : est-ce-que le programme de Cesari peut être suivi pour d'autres types de problèmes, présentant des analogies avec les équations hyperboliques ? Dans [8], nous avons montré qu'on peut répondre affirmativement dans le cas du problème de Tricomi.

Aussi devons-nous mentionner que les considérations et résultats concernant le problème de Conlan (que nous obtenons dans les §1, §2) peuvent être transposés sans difficulté de principe pour l'équation plus générale (Glick [7]) :

$$u_{x_1 \ldots x_n} = f(x_1, \ldots, x_n, u, \ldots),$$

où f dépend des dérivées d'ordre $1, 2, \ldots, n-1$ de u, les dérivées dans lesquelles une variable indépendante intervient au moins deux fois étant les seules qui n'interviennent pas dans f. La „clef" de cette généralisation est donnée par ce qu'on appelle dans [9, p. 129] la „fonction d'intervalle".

Soient $a = (a_1, \ldots, a_m) \leq b = (b_1, \ldots, b_m)$ et $x = (x_1, \ldots, x_m)$, et considérons l'intervalle $I = [a, b] = \{x ; a \leq x \leq b\}$. Considérons „la fonction d'intervalle" (associée à une fonction définie sur R_m)

$$(0.12)\qquad \varphi(I) = \sum_c (-1)^{\nu(c)} \varphi(c),$$

où c parcourt les coins $c \in R^m$ de l'intervalle I et $\nu(c)$ est égale au nombre de composantes du vecteur a qui interviennent dans c. Evidem-

ment, si I est l'intervalle à trois dimensions $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$, $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$, la condition (1.13) ci-dessous peut être écrite sous la forme

$$(0.13) \qquad |\varphi(I)| \leqslant 2L \cdot \text{mes } I,$$

où L est une constante bornant $|f|$.

Les membres premiers des conditions (1.14) ci-dessous, qui dérivent essentiellement de (1.13), sont aussi exprimables par la „fonction d'intervalle", pour les „intervalles à 1, 2, dimensions qu'on peut former avec les mêmes valeurs x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2". D'autre part, les conditions (1.14) jouent le rôle primordial dans le choix de l'ensemble K (v. § 1). Retenons donc, que la condition (0.13), traduite par la condition (1.13) dans le cas $n = 3$, permet (compte tenu des autres conditions, convenablement choisies) en dernière analyse de développer toute la théorie du § 1. Dans le cas $n = 2$, c'est-à-dire le cas du problème de Darboux, (v. [2], [3]) la condition (0.13) joue le même „rôle décisif". En effet, dans le cas de l'intervalle à deux dimensions $I = \{x_1 \leqslant x \leqslant x_2;\ y_1 \leqslant y \leqslant y_2\}$, la condition (0.13) devient $|\Phi(x_1, y_1) - \Phi(x_1, y_2) - \Phi(x_2, y_1) + \Phi(x_2, y_2)| \leqslant 2L\,|x_1 - x_2|\,|y_1 - y_2|$ (c'est-à-dire la deuxième condition des formules (2.1) de [2]).

Pour le problème de Glick (n quelconque), concernant l'équation $u_{x_1 \ldots x_n} = f$, la condition „clef" dans la généralisation est la condition (0.13), formulée pour un intervalle à n dimensions. Remarquons d'autre part que les conditions (1.5) ci-dessous (qui sont aussi exprimables moyennant des „fonctions d'intervalle") laissent facilement entrevoir les conditions qu'on devra imposer, dans le cas général du problème de Glick, aux données aux limites.

Si nous nous sommes bornés au cas $n=3$, c'est-à-dire au problème de Conlan, c'est seulement pour ne pas compliquer, inutilement, l'écriture.

§ 1. Nous allons établir d'abord le

Théorème 1 (d'existence): *Supposons que a, b, $T > 0$ et $K_1, K_2, K_3, L, N_1, N_2, N_3, N_4, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 \geqslant 0$ soient des constantes, telles que*

$$(1.1) \qquad \begin{aligned} &K_3 + 2Lb \leqslant P_5, && N_2 + K_1 a + 2^{-1} K_2 T + LaT \leqslant P_1, \\ &K_2 + 2La \leqslant P_6, && N_1 + K_1 b + 2^{-1} K_3 T + LbT \leqslant P_3, \\ &K_1 + 2LT \leqslant P_7, && N_3 + K_2 b + K_3 a + 2Lab \leqslant P_2, \\ &N_4 + N_1 a + N_2 b + 2^{-1} N_3 T + 2K_1 ab + K_2 bT + K_3 aT + 3LabT \leqslant P_4 \end{aligned}$$

et considérons les intervalles $A = [0 \leqslant x \leqslant T;\ |y| \leqslant a;\ |z| \leqslant b]$ et $R = [0 \leqslant x \leqslant T;\ |y| \leqslant a;\ |z| \leqslant b;\ |u_i| \leqslant P_i,\ (i = 1, 2, \ldots, 7)]$. Supposons que la fonction-vecteur $f(x, y, z, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7)$ soit continue sur R et qu'elle satisfasse, sur R, aux conditions

$$(1.2) \qquad f(T, y, z, u_1, \ldots, u_7) = f(0, y, z, u_1, \ldots, u_7),$$

$$(1.3) \qquad |f(x, y, z, u_1, \ldots, u_7)| \leqslant L$$

et à la condition de Lipschitz dans les six derniers arguments:

$$(1.4) \qquad |f(x, y, z, u_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \ldots, \bar{u}_7) - f(x, y, z, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_7)| \leqslant \sum_{j=2}^{7} M_j\,|\bar{u}_j - u_j|.$$

Supposons, enfin, que les fonctions-vecteurs $\rho(y, z)$, $\sigma(x, z)$ et $\tau(x, y)$ soient continues dans A, avec leurs dérivées ρ_y, ρ_z, ρ_{yz}, σ_x, σ_z, σ_{xz}, τ_x, τ_y, τ_{xy} et qu'elles satisfassent aux conditions

$$(1.5) \qquad \begin{aligned} &|\rho(y_1, z_1) - \rho(y_1, z_2) - \rho(y_2, z_1) + \rho(y_2, z_2)| \leqslant K_1 |y_1 - y_2|\,|z_1 - z_2|, \\ &|\sigma(x_1, z_1) - \sigma(x_1, z_2) - \sigma(x_2, z_1) + \sigma(x_2, z_2)| \leqslant K_2 |x_1 - x_2|\,|z_1 - z_2|, \\ &|\tau(x_1, y_1) - \tau(x_1, y_2) - \tau(x_2, y_1) + \tau(x_2, y_2)| \leqslant K_3 |x_1 - x_2|\,|y_1 - y_2|, \end{aligned}$$

$$(1.6) \qquad \begin{aligned} &\rho(y, 0) = \tau(0, y) = \tau(T, y) = \alpha(y), && |\alpha(y_1) - \alpha(y_2)| \leqslant N_1 |y_1 - y_2|, \\ &\rho(0, z) = \sigma(0, z) = \sigma(T, z) = \beta(z), && |\beta(z_1) - \beta(z_2)| \leqslant N_2 |z_1 - z_2|, \\ &\rho(x, 0) = \tau(x, 0) = \gamma(x), && |\gamma(x_1) - \gamma(x_2)| \leqslant N_3 |x_1 - x_2|, \\ &\rho(0, 0) = \sigma(0, 0) = \sigma(T, 0) = \tau(0, 0) = \tau(T, 0) = N_4, \end{aligned}$$

quels que soient $0 \leqslant x, x_1, x_2 \leqslant T$; $-a \leqslant y, y_1, y_2 \leqslant a$; $-b \leqslant z, z_1, z_2 \leqslant b$.

Alors, si

$$(1.7) \qquad c(M_2 + M_5 + M_6) < 1, \quad 2d(M_3 + M_5 + M_7) < 1, \quad 2l(M_4 + M_6 + M_7) < 1,$$

où

$$(1.8) \qquad c = \max\,(a, b, ab),\ d = \max\,(T, b, Tb),\ l = \max\,(T, a, Ta),$$

il existe une fonction-vecteur $\Phi(x, y, z)$, continue avec Φ_x, Φ_y, Φ_z, Φ_{xy}, Φ_{xz}, Φ_{yz} dans A, et une fonction-vecteur $m(y, z)$, $-a \leqslant y \leqslant a$, $-b \leqslant z \leqslant b$, telles que

$$(1.9) \qquad \Phi(0, y, z) = \Phi(T, y, z) = \rho(y, z),\ \Phi(x, 0, z) = \sigma(x, z),\ \Phi(x, y, 0) = \tau(x, y),$$

$$(1.10) \qquad m(y, z) = T^{-1} \int_0^T f[\xi, y, z;\ \Phi(\xi, y, z), \ldots, \Phi_{yz}(\xi, y, z)]\, d\xi,$$

$$(1.11) \qquad \Phi_{xyz}(x, y, z) = f[x, y, z;\ \Phi(x, y, z), \Phi_x, \Phi_y, \Phi_z, \Phi_{xy}, \Phi_{xz}, \Phi_{yz}] - m(y, z),$$

quels que soient $0 \leqslant x \leqslant T$, $|y| \leqslant a$, $|z| \leqslant b$. C'est-à-dire, en prolongeant

les fonctions f et Φ (pour tous les $-\infty < x < +\infty$, $|y| \leqslant a$, $|z| \leqslant b$, $|u_i| \leqslant P_i$, $(i = 1, 2, \ldots, 7)$) par périodicité de période T en x, l'équation (1.11) *est vérifiée dans la bande $-\infty < x < +\infty$, $|y| \leqslant a$, $|z| \leqslant b$* (dont les „largeurs" a, b sont soumises aux conditions (1.7)).

Démonstration. Nous allons montrer d'abord, que toute fonction-vecteur $\Phi(x, y, z)$ qui vérifie pour $0 \leqslant x, x_1, x_2 \leqslant T$, $-a \leqslant y, y_1, y_2 \leqslant a$, $-b \leqslant z, z_1, z_2 \leqslant b$ les relations

$$\Phi(0, y, z) = \Phi(T, y, z) = \rho(y, z), \quad \Phi(x, 0, z) = \sigma(x, z), \quad \Phi(x, y, 0) = \tau(x, y), \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} &|\Phi(x_1, y_1, z_1) - \Phi(x_2, y_1, z_1) - \Phi(x_1, y_2, z_1) - \Phi(x_1, y_1, z_2) + \\ &+ \Phi(x_2, y_2, z_1) + \Phi(x_2, y_1, z_2) + \Phi(x_1, y_2, z_2) - \\ &- \Phi(x_2, x_2, z_2)| \leqslant 2L\,|x_1 - x_2|\,|y_1 - y_2|\,|z_1 - z_2|, \end{aligned} \tag{1.13}$$

satisfait aussi aux relations :

$$|\Phi(x, y, z)| \leqslant P_1, \tag{1.14.1}$$

$$|\Phi(x_1, y, z) - \Phi(x_2, y, z)| \leqslant P_2\,|x_1 - x_2|, \tag{1.14.2}$$

$$|\Phi(x, y_1, z) - \Phi(x, y_2, z)| \leqslant P_3\,|y_1 - y_2|, \tag{1.14.3}$$

$$|\Phi(x, y, z_1) - \Phi(x, y, z_2)| \leqslant P_4\,|z_1 - z_2|, \tag{1.14.4}$$

$$\begin{aligned} &|\Phi(x_1, y_1, z) - \Phi(x_1, y_2, z) - \Phi(x_2, y_1, z) + \Phi(x_2, y_2, z)| \leqslant \\ &\leqslant P_5\,|x_1 - x_2|\,|y_1 - y_2|, \end{aligned} \tag{1.14.5}$$

$$\begin{aligned} &|\Phi(x_1, y, z_1) - \Phi(x_1, y, z_2) - \Phi(x_2, y, z_1) + \Phi(x_2, y, z_2)| \leqslant \\ &\leqslant P_6\,|x_1 - x_2|\,|z_1 - z_2|, \end{aligned} \tag{1.14.6}$$

$$\begin{aligned} &|\Phi(x, y_1, z_1) - \Phi(x, y_1, z_2) - \Phi(x, y_2, z_1) + \Phi(x, y_2, z_2)| \leqslant \\ &\leqslant P_7\,|y_1 - y_2|\,|z_1 - z_2|. \end{aligned} \tag{1.14.7}$$

De (1.13), (1.12) et (1.5) on obtient, compte tenu de (1.1),

$$\begin{aligned} &|\Phi(x_1, y_1, z) - \Phi(x_1, y_2, z) - \Phi(x_2, y_1, z) + \Phi(x_2, y_2, z)| \leqslant \\ &\leqslant |\Phi(x_1, y_1, 0) - \Phi(x_1, y_2, 0) - \Phi(x_2, y_1, 0) + \Phi(x_2, y_2, 0)| + \\ &+ 2L\,|x_1 - x_2|\,|y_1 - y_2|\,|z| \leqslant |\tau(x_1, y_1) - \tau(x_1, y_2) - \tau(x_2, y_1) + \\ &+ \tau(x_2, y_2)| + 2Lb\,|x_1 - x_2|\,|y_1 - y_2| \leqslant (K_3 + 2Lb)\,|x_1 - x_2|\,|y_1 - y_2| \leqslant \\ &\leqslant P_5\,|x_1 - x_2|\,|y_1 - y_2|. \end{aligned} \tag{1.15.5}$$

De la même manière, de (1.13), (1.12), (1.5), (1.1) on a

$$\begin{aligned} &|\Phi(x_1, y, z_1) - \Phi(x_1, y, z_2) - \Phi(x_2, y, z_1) + \Phi(x_2, y, z_2)| \leqslant \\ &\leqslant |\sigma(x_1, z_1) - \sigma(x_1, z_2) - \sigma(x_2, z_1) + \sigma(x_2, z_2)| + \\ &+ 2La\,|x_1 - x_2|\,|z_1 - z_2| \leqslant (K_2 + 2La)\,|x_1 - x_2|\,|z_1 - z_2| \leqslant \\ &\leqslant P_6\,|x_1 - x_2|\,|z_1 - z_2|. \end{aligned} \tag{1.15.6}$$

Enfin, de (1.13), (1.12), (1.5), (1.1) on obtient

$$\begin{aligned} &|\Phi(x, y_1, z_1) - \Phi(x, y_1, z_2) - \Phi(x, y_2, z_1) + \Phi(x, y_2, z_2)| \leqslant |\Phi(0, y_1, z_1) - \\ &- \Phi(0, y_1, z_2) - \Phi(0, y_2, z_1) + \Phi(0, y_2, z_2)| + \\ &+ 2Lx\,|y_1 - y_2|\,|z_1 - z_2| \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &|\Phi(x, y_1, z_1) - \Phi(x, y_1, z_2) - \Phi(x, y_2, z_1) + \Phi(x, y_2, z_2)| \leqslant |\Phi(T, y_1, z_1) - \\ &- \Phi(T, y_1, z_2) - \Phi(T, y_2, z_1) + \Phi(T, y_2, z_2)| + \\ &+ 2L(T - x)\,|y_1 - y_2|\,|z_1 - z_2|, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &|\Phi(x, y_1, z_1) - \Phi(x, y_1, z_2) - \Phi(x, y_2, z_1) + \Phi(x, y_2, z_2)| \leqslant \\ &\leqslant |\rho(y_1, z_1) - \rho(y_1, z_2) - \rho(y_2, z_1) + \rho(y_2, z_2)| + \\ &+ LT\,|y_1 - y_2|\,|z_1 - z_2| \leqslant (K_1 + LT)\,|y_1 - y_2|\,|z_1 - z_2| \leqslant \\ &\leqslant P_7\,|y_1 - y_2|\,|z_1 - z_2|. \end{aligned} \tag{1.15.7}$$

Jusqu'ici, on a démontré que Φ satisfait à (1.14.5), (1.14.6), (1.14.7). Maintenant, on obtient de (1.15.5), en tenant compte de (1.12), (1.6) et (1.1),

$$\begin{aligned} &|\Phi(x_1, y, z) - \Phi(x_2, y, z)| \leqslant |\Phi(x_1, 0, z) - \Phi(x_2, 0, z)| + \\ &+ (K_3 + 2Lb)\,|x_1 - x_2|\,|y| \leqslant |\sigma(x_1, z) - \sigma(x_2, z)| + \\ &+ (K_3 + 2Lb)\,a\,|x_1 - x_2| \leqslant |\sigma(x_1, 0) - \sigma(x_2, 0)| + \\ &+ K_2\,|z|\,|x_1 - x_2| + (K_3 + 2Lb)\,a\,|x_1 - x_2| \leqslant \\ &\leqslant (N_3 + K_2 b + K_3 a + 2Lab)\,|x_1 - x_2| \leqslant P_2\,|x_1 - x_2|. \end{aligned} \tag{1.15.2}$$

D'une manière analogue, de (1.15.5), (1.12), (1.6) et (1.1) on obtient

$$\begin{aligned} &|\Phi(x, y_1, z) - \Phi(x, y_2, z)| \leqslant |\Phi(0, y_1, z) - \Phi(0, y_2, z)| + \\ &+ (K_3 + 2Lb)\,|y_1 - y_2|\,x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &|\Phi(x, y_1, z) - \Phi(x, y_2, z)| \leqslant |\Phi(T, y_1, z) - \Phi(T, y_2, z)| + \\ &+ (K_3 + 2Lb)\,|y_1 - y_2|\,(T - x), \end{aligned}$$

donc on a

$$(1.15.3)\qquad |\Phi(x, y_1, z) - \Phi(x, y_2, z)| \leq |\varphi(y_1, z) - \varphi(y_2, z)| + 2^{-1}T(K_3 + 2Lb)\,|y_1 - y_2| \leq (N_1 + K_1 b + 2^{-1}K_3 T + LbT)\,|y_1 - y_2| \leq P_3\,|y_1 - y_2|.$$

Enfin, de (1.15.6), (1.12), (1.6) et (1.1), on a

$$|\Phi(x, y, z_1) - \Phi(x, y, z_2)| \leq |\Phi(0, y, z_1) - \Phi(0, y, z_2)| + (K_2 + 2La)\,|z_1 - z_2|\,x,$$

et

$$|\Phi(x, y, z_1) - \Phi(x, y, z_2)| \leq |\Phi(T, y, z_1) - \Phi(T, y, z_2)| + (K_2 + 2La)\,|z_1 - z_2|\,(T - x),$$

donc

$$(1.15.4)\qquad |\Phi(x, y, z_1) - \Phi(x, y, z_2)| \leq |\varphi(y, z_1) - \varphi(y, z_2)| + 2^{-1}T(K_2 + 2La)\,|z_1 - z_2| \leq (N_2 + K_1 a + 2^{-1}K_2 T + LaT)\,|z_1 - z_2| \leq P_4\,|z_1 - z_2|.$$

De (1.15.2), (1.15.3) et (1.15.4), il résulte que (1.14.2), (1.14.3) et (1.14.4) sont aussi démontrées. Enfin, de (1.15.4), (1.15.3), (1.15.2), on obtient

$$|\Phi(x, y, z)| \leq |\Phi(0,0,0)| + (N_2 + K_1 a + 2^{-1}K_2 T + LaT)\,|z| + (N_1 + K_1 b + 2^{-1}K_3 T + LbT)\,|y| + (N_3 + K_2 b + K_3 a + 2Lab)\,x$$

et

$$|\Phi(x, y, z)| \leq |\Phi(T,0,0)| + (N_2 + K_1 a + 2^{-1}K_2 T + LaT)\,|z| + (N_1 + K_1 b + 2^{-1}K_3 T + LbT)\,|y| + (N_3 + K_2 b + K_3 a + 2Lab)\,(T - x).$$

C'est-à-dire, en tenant compte de (1.1), (1.6), on a

$$(1.15.1)\qquad \Phi(x, y, z) \leq N_1 + (N_2 + K_1 a + 2^{-1}K_2 T + LaT)b + (N_1 + K_1 b + 2^{-1}K_3 T + LbT)a + 2^{-1}T(N_3 + K_2 b + K_3 a + 2Lab) = N_1 + N_1 a + N_2 b + 2^{-1}N_3 T + 2K_1 ab + K_2 bT + K_3 aT + 3LabT \leq P_1.$$

Donc, toutes les relations (1.14) sont vérifiées. D'autre part, si $\Phi(x, y, z)$ satisfait aux relations (1.14), on a, évidemment, $|\Phi| \leq P_1$, $|\Phi_x| \leq P_2$, $|\Phi_y| \leq P_3$, $|\Phi_z| \leq P_4$, $|\Phi_{xy}| \leq P_5$, $|\Phi_{xz}| \leq P_6$, $|\Phi_{yz}| \leq P_7$, presque partout dans Δ. Remarquons aussi, que les conditions (1.5) et les conditions de régularité imposées à φ, σ, τ entraînent les relations

$$|\varphi_z(y_1, z) - \varphi_z(y_2, z)| \leq K_1\,|y_1 - y_2|,$$
$$|\varphi_y(y, z_1) - \varphi_y(y, z_2)| \leq K_1\,|z_1 - z_2|,$$

$$(1.16)\qquad |\sigma_x(x_1, z) - \sigma_x(x_2, z)| \leq K_2\,|x_1 - x_2|,$$
$$|\sigma_z(x, z_1) - \sigma_z(x, z_2)| \leq K_2\,|z_1 - z_2|,$$

$$|\tau_x(x_1, y) - \tau_x(x_2, y)| \leq K_3\,|x_1 - x_2|,$$
$$|\tau_y(x, y_1) - \tau_y(x, y_2)| \leq K_3\,|y_1 - y_2|.$$

D'autre part, en vertu de la continuité de f sur R et de la continuité de φ_y, φ_z, φ_{yz}, σ_x, σ_z, σ_{xz}, τ_x, τ_y, τ_{xy}, on peut trouver quatre fonctions $\omega_1(\alpha)$, $\omega_2(\beta)$, $\omega_3(\gamma)$, $\omega_4(\delta)$, continues, monotones, croissantes et positives sur $[0, +\infty)$, telles que $\omega_i(0) = 0$, $(i = 1, 2, 3, 4)$ et telles qu'on ait

$$(1.17)\qquad \begin{aligned} &|f(\bar{x}, y, z, u_1, \ldots, u_7) - f(x, y, z, u_1, \ldots, u_7)| \leq \omega_1(|\bar{x} - x|),\\ &|f(x, \bar{y}, z, u_1, \ldots, u_7) - f(x, y, z, u_1, \ldots, u_7)| \leq \omega_2(|\bar{y} - y|),\\ &|f(x, y, \bar{z}, u_1, \ldots, u_7) - f(x, y, z, u_1, \ldots, u_7)| \leq \omega_3(|\bar{z} - z|),\\ &|f(x, y, z, \bar{u}_1, u_2, \ldots, u_7) - f(x, y, z, u_1, u_2, \ldots, u_7)| \leq \omega_4(|\bar{u}_1 - u_1|), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &|\varphi_z(y_1, z) - \varphi_z(y_2, z)| \leq \omega_2(|y_1 - y_2|),\\ &|\varphi_{yz}(y_1, z) - \varphi_{yz}(y_2, z)| \leq \omega_2(|y_1 - y_2|),\\ &|\varphi_z(y, z_1) - \varphi_z(y, z_2)| \leq \omega_3(|z_1 - z_2|),\\ &|\varphi_{yz}(y, z_1) - \varphi_{yz}(y, z_2)| \leq \omega_3(|z_1 - z_2|). \end{aligned}$$

$$(1.16\ \text{bis})\qquad \begin{aligned} &|\sigma_x(x_1, z) - \sigma_x(x_2, z)| \leq \omega_1(|x_1 - x_2|),\\ &|\sigma_{xz}(x_1, z) - \sigma_{xz}(x_2, z)| \leq \omega_1(|x_1 - x_2|),\\ &|\sigma_z(x, z_1) - \sigma_z(x, z_2)| \leq \omega_3(|z_1 - z_2|),\\ &|\sigma_{xz}(x, z_1) - \sigma_{xz}(x, z_2)| \leq \omega_3(|z_1 - z_2|),\\ &|\tau_x(x_1, y) - \tau_x(x_2, y)| \leq \omega_1(|x_1 - x_2|),\\ &|\tau_{xy}(x_1, y) - \tau_{xy}(x_2, y)| \leq \omega_1(|x_1 - x_2|),\\ &|\tau_y(x, y_1) - \tau_y(x, y_2)| \leq \omega_2(|y_1 - y_2|),\\ &|\tau_{xy}(x, y_1) - \tau_{xy}(x, y_2)| \leq \omega_2(|y_1 - y_2|). \end{aligned}$$

Considérons maintenant les fonctions

$$(1.18.1)\qquad \eta_1(\alpha) = [1 - c(M_2 + M_5 + M_6)]^{-1}\{3\omega_1(\alpha) + c[\omega_1(\alpha) + \omega_1(P_2\alpha) + (M_3 P_5 + M_4 P_6 + 2M_7 L)\alpha]\}.$$

$$(1.18.2)\qquad \eta_2(\beta) = \{1 - 2d(M_3 + M_5 + M_7)\}^{-1}\{3\omega_2(\beta) + 2d[\omega_2(\beta) + \omega_1(P_3\beta) + (M_2P_5 + M_4P_7 + 2M_6L)\beta]\},$$

$$(1.18.3)\qquad \eta_3(\gamma) = \{1 - 2l(M_4 + M_6 + M_7)\}^{-1}\{3\omega_3(\gamma) + 2l[\omega_3(\gamma) + \omega_1(P_4\gamma) + (M_2P_6 + M_3P_7 + 2M_5L)\gamma]\},$$

(v. (1.7) et (1.8)). Les fonctions $\eta_1(\alpha)$, $\eta_2(\beta)$, $\eta_3(\gamma)$ sont aussi des fonctions continues, monotones, croissantes et positives sur $[0, +\infty)$ et telles que $\eta_1(0) = \eta_2(0) = \eta_3(0) = 0$.

Désignons maintenant par E l'espace linéaire des fonctions-vecteurs $\Phi(x, y, z)$, continues avec leurs dérivées Φ_x, Φ_y, Φ_z, Φ_{xy}, Φ_{xz} Φ_{yz}, sur A, et définissons la norme $\|\cdot\|$ dans E par

$$(1.19)\qquad \|\Phi\| = \sup|\Phi| + \sup|\Phi_x| + \sup|\Phi_y| + \sup|\Phi_z| + \sup|\Phi_{xy}| + \sup|\Phi_{xz}| + \sup|\Phi_{yz}|,$$

où „sup" se rapporte à l'intervalle A.

Désignons par K l'ensemble des fonctions $\Phi(x, y, z) \in E$, satisfaisant à (1.12), à (1.13) et aux inégalités (1.20) qui suivent:

$$(1.20.1)\qquad |\Phi_x(x_1, y, z) - \Phi_x(x_2, y, z)| \leq \eta_1(|x_1 - x_2|),$$

$$(1.20.2)\qquad |\Phi_y(x_1, y, z) - \Phi_y(x_2, y, z)| \leq P_5|x_1 - x_2|,$$

$$(1.20.3)\qquad |\Phi_z(x_1, y, z) - \Phi_z(x_2, y, z)| \leq P_6|x_1 - x_2|,$$

$$(1.20.4)\qquad |\Phi_{xy}(x_1, y, z) - \Phi_{xy}(x_2, y, z)| \leq \eta_1(|x_1 - x_2|),$$

$$(1.20.5)\qquad |\Phi_{xz}(x_1, y, z) - \Phi_{xz}(x_2, y, z)| \leq \eta_1(|x_1 - x_2|),$$

$$(1.20.6)\qquad |\Phi_{yz}(x_1, y, z) - \Phi_{yz}(x_2, y, z)| \leq 2L|x_1 - x_2|,$$

$$(1.20.7)\qquad |\Phi_x(x, y_1, z) - \Phi_x(x, y_2, z)| \leq P_5|y_1 - y_2|,$$

$$(1.20.8)\qquad |\Phi_y(x, y_1, z) - \Phi_y(x, y_2, z)| \leq \eta_2(|y_1 - y_2|),$$

$$(1.20.9)\qquad |\Phi_z(x, y_1, z) - \Phi_z(x, y_2, z)| \leq P_7|y_1 - y_2|,$$

$$(1.20.10)\qquad |\Phi_{xy}(x, y_1, z) - \Phi_{xy}(x, y_2, z)| \leq \eta_2(|y_1 - y_2|),$$

$$(1.20.11)\qquad |\Phi_{xz}(x, y_1, z) - \Phi_{xz}(x, y_2, z)| \leq 2L|y_1 - y_2|,$$

$$(1.20.12)\qquad |\Phi_{yz}(x, y_1, z) - \Phi_{yz}(x, y_2, z)| \leq \eta_2(|y_1 - y_2|),$$

$$(1.20.13)\qquad |\Phi_x(x, y, z_1) - \Phi_x(x, y, z_2)| \leq P_6|z_1 - z_2|,$$

$$(1.20.14)\qquad |\Phi_y(x, y, z_1) - \Phi_y(x, y, z_2)| \leq P_7|z_1 - z_2|,$$

$$(1.20.15)\qquad |\Phi_z(x, y, z_1) - \Phi_z(x, y, z_2)| \leq \eta_3(|z_1 - z_2|),$$

$$(1.20.16)\qquad |\Phi_{xy}(x, y, z_1) - \Phi_{xy}(x, y, z_2)| \leq 2L|z_1 - z_2|,$$

$$(1.20.17)\qquad |\Phi_{xz}(x, y, z_1) - \Phi_{xz}(x, y, z_2)| \leq \eta_3(|z_1 - z_2|),$$

$$(1.20.18)\qquad |\Phi_{yz}(x, y, z_1) - \Phi_{yz}(x, y, z_2)| \leq \eta_3(|z_1 - z_2|),$$

quels que soient $0 \leq x, x_1, x_2 \leq l$, $-a \leq y, y_1, y_2 \leq a$, $-b \leq z, z_1, z_2 \leq b$.

Pour toute fonction-vecteur $\Phi \in K$ on a, par définition (1.12) et (1.13), c'est-à-dire on a aussi (1.14). Donc, pour $\Phi \in K$, on a $|\Phi| \leq P_1$, $|\Phi_x| \leq P_2$, $|\Phi_y| \leq P_3$, $|\Phi_z| \leq P_4$, $|\Phi_{xy}| \leq P_5$, $|\Phi_{xz}| \leq P_6$, $|\Phi_{yz}| \leq P_7$ *partout dans* A. Par conséquant, la fonction $F(x, y, z) = f(x, y, z; \Phi(x, y, z), \ldots, \Phi_{yz}(x, y, z))$ est une fonction continue sur A, où l'on a en plus $|F(x, y, z)| \leq L$. Donc, la fonction

$$(1.21)\qquad m(y, z) = l^{-1}\int_0^l f(\xi, y, z; \Phi(\xi, y, z), \ldots, \Phi_{yz}(\xi, y, z))\, d\xi$$

est aussi une fonction continue pour $-a \leq y \leq a$, $-b \leq z \leq b$ et on a

$$(1.22)\qquad |m(y, z)| \leq L,$$

quelle que soit $\Phi \in K$. De même, la fonction-vecteur

$$(1.23.1)\qquad \Psi(x, y, z) = \rho(y, z) + \sigma(x, z) + \tau(x, y) - \rho(0, z) - \sigma(x, 0) - \tau(0, y) + \rho(0, 0) + \int_0^x\int_0^y\int_0^z \{f(\xi, \eta, \zeta; \Phi(\xi, \eta, \zeta), \ldots, \Phi_{yz}(\xi, \eta, \zeta)) - m(\eta, \zeta)\}\, d\zeta\, d\eta\, d\xi$$

est continue sur A avec ses dérivées partielles

$$(1.23.2)\qquad \Psi_x(x, y, z) = \sigma_x(x, z) + \tau_x(x, y) - \sigma_x(x, 0) + \int_0^y\int_0^z \{f(x, \eta, \zeta; \Phi(x, \eta, \zeta), \ldots, \Phi_{yz}(x, \eta, \zeta)) - m(\eta, \zeta)\}\, d\zeta\, d\eta,$$

$$(1.23.3)\qquad \Psi_y(x, y, z) = \rho_y(y, z) + \tau_y(x, y) - \tau_y(0, y) + \int_0^x\int_0^z \{f(\xi, y, \zeta; \Phi(\xi, y, \zeta), \ldots, \Phi_{yz}(\xi, y, \zeta)) - m(y, \zeta)\}\, d\zeta\, d\xi,$$

$$(1.23.4)\qquad \Psi_z(x, y, z) = \rho_z(y, z) + \sigma_z(x, z) - \rho_z(0, z) + \int_0^x\int_0^y \{f(\xi, \eta, z; \Phi(\xi, \eta, z), \ldots, \Phi_{yz}(\xi, \eta, z)) - m(\eta, z)\}\, d\eta\, d\xi,$$

$$(1.23.5)\qquad \Psi_{xy}(x,y,z)=\tau_{xy}(x,y)+\int_0^z\{f[x,y,\zeta;\Phi(x,y,\zeta),\ldots,\Phi_{yz}(x,y,\zeta)]-m(y,\zeta)\}\,d\zeta\,.$$

$$(1.23.6)\qquad \Psi_{xz}(x,y,z)=\sigma_{xz}(x,z)+\int_0^y\{f[x,\eta,z;\Phi(x,\eta,z),\ldots,\Phi_{yz}(x,\eta,z)]-m(\eta,z)\}\,d\eta\,.$$

$$(1.23.7)\qquad \Psi_{yz}(x,y,z)=\rho_{yz}(y,z)+\int_0^x\{f[\xi,y,z;\Phi(\xi,y,z),\ldots,\Phi_{yz}(\xi,y,z)]-m(y,z)\}\,d\xi\,.$$

Les relations (1.23) définissent une transformation $\mathfrak{F}:\Psi=\mathfrak{F}\Phi$ et, évidemment, $\mathfrak{F}$ mène E dans E. *Nous allons montrer maintenant que $\mathfrak{F}$ mène K dans K*, c'est-à-dire que la fonction-vecteur Ψ et ses dérivées, définies par (1.23), satisfont aux conditions (1.12), (1.13) et (1.20.1)–(1.20.18). D'abord, on obtient de (1.23.1) et (1.6)

$$(1.24)\qquad \Psi(0,y,z)=\Psi(T,y,z)=\rho(y,z),\ \Psi(x,0,z)=\sigma(x,z),\ \Psi(x,y,0)=\tau(x,y)\,.$$

Ensuite, on a de (1.23.1), (1.22) et (1.3)

$$(1.25)\qquad |\Psi(x_1,y_1,z_1)-\Psi(x_1,y_1,z_2)-\Psi(x_1,y_2,z_1)-\Psi(x_2,y_1,z_1)+\Psi(x_1,y_2,z_2)+\Psi(x_2,y_1,z_2)+\Psi(x_2,y_2,z_1)-\Psi(x_2,y_2,z_2)|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\int_{x_2}^{x_1}\int_{y_2}^{y_1}\int_{z_2}^{z_1}\{f[\xi,\eta,\zeta;\Phi(\xi,\eta,\zeta),\ldots,\Phi_{yz}(\xi,\eta,\zeta)]-m(\eta,\zeta)\}\,d\zeta\,d\eta\,d\xi\right|\leqslant 2L|x_1-x_2|\,|y_1-y_2|\,|z_1-z_2|\,.$$

C'est-à-dire, $\Psi(x,y,z)$ satisfait aux conditions (1.13), (1.12), donc elle satisfait aussi aux conditions (1.14.1)–(1.14.7). Mais, puisque $\Psi(x,y,z)$ satisfait aux conditions (1.13), (1.14.5), (1.14.6) et (1.14.7) et que ses dérivées Ψ_x, Ψ_y, Ψ_z, Ψ_{xy}, Ψ_{xz}, Ψ_{yz} existent et sont continues sur A, il résulte que $\Psi(x,y,z)$ satisfait aux conditions (1.20.2, 3, 6, 7, 9, 11, 13, 14 et 16). (Ceci peut être démontré, d'ailleurs, directement, en partant des formules (1.23)).

Pour montrer que $\mathfrak{F}$ mène K dans K, il nous reste à démontrer que la fonction $\Psi(x,y,z)$ donnée par (1.23.1) satisfait aux conditions (1.20.1, 4, 5, 8, 10, 12, 15, 17 et 18). On a d'abord, de (1.23.2), (1.16 bis), (1.17), (1.4) (et des relations (1.20.1)–(1.20.6) et (1.14.2) qui sont vérifiées par Φ), compte tenu de (1.18.1)

$$|\Psi_x(x_1,y,z)-\Psi_x(x_2,y,z)|\leqslant|\sigma_x(x_1,z)-\sigma_x(x_2,z)|+|\tau_x(x_1,y)-\tau_x(x_2,y)|+|\sigma_x(x_1,0)-\sigma_x(x_2,0)|+$$
$$+\left|\int_0^y\int_0^z\{f[x_1,\eta,\zeta;\Phi(x_1,\eta,\zeta),\ldots,\Phi_{yz}(x_1,\eta,\zeta)]-f[x_2,\eta,\zeta;\Phi(x_2,\eta,\zeta),\ldots,\Phi_{yz}(x_2,\eta,\zeta)]\}\,d\zeta\,d\eta\right|\leqslant$$
$$\leqslant 3\omega_1(|x_1-x_2|)+\left|\int_0^y\int_0^z\{\omega_1(|x_1-x_2|)+\omega_1(P_2|x_1-x_2|)+(M_3P_5+M_4P_6+2M_7L)|x_1-x_2|+(M_2+M_5+M_6)\eta_1(|x_1-x_2|)\}\,d\zeta\,d\eta\right|\leqslant$$
$$\leqslant 3\omega_1(|x_1-x_2|)+ab[\omega_1(|x_1-x_2|)+\omega_1(P_2|x_1-x_2|)+(M_3P_5+M_4P_6+2M_7L)|x_1-x_2|]+ab(M_2+M_5+M_6)\eta_1(|x_1-x_2|)\leqslant 3\omega_1(|x_1-x_2|)+c[\omega_1(|x_1-x_2|)+\omega_1(P_2|x_1-x_2|)+(M_3P_5+M_4P_6+2M_7L)|x_1-x_2|]+c(M_2+M_5+M_6)\eta_1(|x_1-x_2|)=\eta_1(|x_1-x_2|)\,,$$

c'est-à-dire $\Psi(x,y,z)$ satisfait à (1.20.1). De la même manière, on obtient de (1.23.5), (1.16 bis), (1.17), (1.4) (et des relations (1.20.1)–(1.20.6) et (1.14.2), qui sont vérifiées par Φ),

$$|\Psi_{xy}(x_1,y,z)-\Psi_{xy}(x_2,y,z)|\leqslant\omega_1(|x_1-x_2|)+\left|\int_0^z\{\omega_1(|x_1-x_2|)+\omega_1(P_2|x_1-x_2|)+(M_3P_5+M_4P_6+2M_7L)|x_1-x_2|+(M_2+M_5+M_6)\eta_1(|x_1-x_2|)\}\,d\zeta\right|\leqslant 3\omega_1(|x_1-x_2|)+$$
$$+c[\omega_1(|x_1-x_2|)+\omega_1(P_2|x_1-x_2|)+(M_3P_5+M_4P_6+2M_7L)|x_1-x_2|]+c(M_2+M_5+M_6)\eta_1(|x_1-x_2|)=\eta_1(|x_1-x_2|)\,,$$

donc $\Psi(x,y,z)$ satisfait aussi à (1.20.4). En partant maintenant de (1.23.6) et en procédant de la même manière, on obtient

$$|\Psi_{xz}(x_1,y,z)-\Psi_{xz}(x_2,y,z)|\leqslant\eta_1(|x_1-x_2|)\,,$$

c'est-à-dire, Ψ vérifie (1.20.5). Démontrons que Ψ satisfait à (1.20.8, 10, 12).

Observons d'abord qu'on a, en tenant compte de (1.21), (1.17), (1.4) (et des relations (1.20.7)—(1.20.12) et (1.14.3) pour $\Phi \in K$),

$$(1.26)\qquad |m(y_1, z) - m(y_2, z)| \leqslant T^{-1} \int_0^T |f(\xi, y_1, z; \Phi(\xi, y_1, z), \ldots, \Phi_{y_1}(\xi, y_1, z)) - f(\xi, y_2, z; \Phi(\xi, y_2, z), \ldots, \Phi_{y_2}(\xi, y_2, z))|\, d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \omega_2(|y_1 - y_2|) + \omega_4(P_3 |y_1 - y_2|) + (M_2 P_5 + M_4 P_7 + 2M_6 L) |y_1 - y_2| + (M_3 + M_5 + M_7)\tau_{12}(|y_1 - y_2|).$$

D'autre part, en tenant compte de (1.21), (1.17), (1.4) (et des relations (1.20.13)—(1.20.18) et (1.14.4) pour $\Phi \in K$), on a

$$(1.27)\qquad |m(y, z_1) - m(y, z_2)| \leqslant \omega_3(|z_1 - z_2|) + \omega_4(P_1 |z_1 - z_2|) + (M_2 P_6 + M_3 P_7 + 2M_5 L) |z_1 - z_2| + (M_1 + M_6 + M_7)\tau_{13}(|z_1 - z_2|)$$

Maintenant, on obtient de (1.23.3), (1.16 bis), (1.17), (1.4), (1.26), (1.18.2) (et des relations (1.20.7)—(1.20.12) et (1.14.3) pour $\Phi \in K$) :

$$|\Psi_1(x, y_1, z) - \Psi_1(x, y_2, z)| \leqslant 3\omega_2(|y_1 - y_2|) + \left| \int_0^x \int_0^z |m(y_1, \zeta) - m(y_2, \zeta)|\, d\zeta\, d\xi \right| +$$
$$+ \left| \int_0^x \int_0^z \{\omega_2(|y_1 - y_2|) + \omega_4(P_3 |y_1 - y_2|) + (M_2 P_5 + M_4 P_7 + 2M_6 L) |y_1 - y_2| + (M_3 + M_5 + M_7)\tau_{12}(|y_1 - y_2|)\}\, d\zeta\, d\xi \right| \leqslant$$
$$\leqslant 3\omega_2(|y_1 - y_2|) + 2d\,\omega_2(|y_1 - y_2|) + \omega_4(P_3 |y_1 - y_2|) + (M_2 P_5 + M_4 P_7 + 2M_6 L) |y_1 - y_2| + 2d(M_3 + M_5 + M_7)\tau_{12}(|y_1 - y_2|) = \tau_{12}(|y_1 - y_2|),$$

donc $\Psi(x, y, z)$ satisfait à (1.20.8). En partant maintenant de (1.23.5), puis de (1.23.7), on obtient, en tenant compte de (1.16 bis), (1.17), (1.4), (1.26), (1.18.2) (et des relations (1.20.7)—(1.20.12) et (1.14.3) pour $\Phi \in K$) :

$$|\Psi_{1y}(x, y_1, z) - \Psi_{1y}(x, y_2, z)| \leqslant \tau_{12}(|y_1 - y_2|),$$

puis

$$|\Psi_{12}(x, y_1, z) - \Psi_{12}(x, y_2, z)| \leqslant \tau_{12}(|y_1 - y_2|),$$

c'est-à-dire Ψ satisfait à (1.20.10) et (1.20.12).

Enfin, en partant consécutivement de (1.23.4), (1.23.6) et (1.23.7), on obtient, en tenant compte de (1.16 bis), (1.17), (1.4), (1.27), (1.18.3) (et des relations (1.20.13)—(1.20.18) et (1.14.4) pour $\Phi \in K$) les dernières relations qui nous manquent, à savoir

$$|\Psi_1(x, y, z_1) - \Psi_1(x, y, z_2)| \leqslant \tau_{13}(|z_1 - z_2|),$$
$$|\Psi_{1z}(x, y, z_1) - \Psi_{1z}(x, y, z_2)| \leqslant \tau_{13}(|z_1 - z_2|),$$
$$|\Psi_{yz}(x, y, z_1) - \Psi_{yz}(x, y, z_2)| \leqslant \tau_{13}(|z_1 - z_2|).$$

Donc, la transformation $\mathcal{S}$ mène K dans K. D'autre part, $\mathcal{S}$ *résulte une transformation continue de K à K, dans la topologie de la norme de K.* En effet, pour $\Phi_1, \Phi_2 \in K$, on a

$$|m_{\Phi_1}(y, z) - m_{\Phi_2}(y, z)| \leqslant T^{-1} \int_0^T \{\omega_4(\|\Phi_1 - \Phi_2\|) + \sum_{j=2}^{7} M_j \|\Phi_1 - \Phi_2\|\}\, d\xi =$$
$$= \omega_4(\|\Phi_1 - \Phi_2\|) + \left(\sum_{j=2}^{7} M_j\right) \|\Phi_1 - \Phi_2\|.$$

Donc,

$$|\Psi_1(x, y, z) - \Psi_2(x, y, z)| \leqslant \left| \int_0^x \int_0^y \int_0^z |m_{\Phi_1}(\eta, \zeta) - m_{\Phi_2}(\eta, \zeta)|\, d\zeta\, d\eta\, d\xi \right| +$$
$$+ \left| \int_0^x \int_0^y \int_0^z \left\{ \omega_4(\|\Phi_1 - \Phi_2\|) + \|\Phi_1 - \Phi_2\| \sum_{j=2}^{7} M_j \right\} d\zeta\, d\eta\, d\xi \right| \leqslant$$
$$\leqslant 2abT \left[\omega_4(\|\Phi_1 - \Phi_2\|) + \|\Phi_1 - \Phi_2\| \sum_{j=2}^{7} M_j \right].$$

On obtient de le même manière des évaluations pour $|\Psi_{1x} - \Psi_{2x}|$, $|\Psi_{1y} - \Psi_{2y}|, \ldots, |\Psi_{1yz} - \Psi_{2yz}|$. Par exemple, $|\Psi_{1x} - \Psi_{2x}| \leqslant 2ba \left[\omega_4(\|\Phi_1 - \Phi_2\|) + \|\Phi_1 - \Phi_2\| \sum_{j=2}^{7} M_j \right]$, etc. En passant à la borne supérieure sur A dans ces inégalités et en sommant, on obtient, comme il est facile à voir, $\|\Psi_1 - \Psi_2\| \leqslant 2(a + b + T + ab + aT + bT + abT)\, \omega_5(\|\Phi_1 - \Phi_2\|)$, où $\omega_5(\lambda) = \omega_4(\lambda) + \lambda \sum_{j=2}^{7} M_j$.

Enfin, *K est, évidemment, un ensemble convexe et fermé dans la topologie de E.* En vertu des conditions (1.14) et (1.20), et des conditions $|\Phi| \leqslant P_1, \ldots, |\Phi_{yz}| \leqslant P_7$ qui sont vérifiées par toute fonction $\Phi \in K$, *l'ensemble K est compact* (critère de convergence uniforme d'Arzelà — Ascoli) *dans la topologie de E.* Selon de théorème de Schauder, la transformation

$\mathfrak{S}$ admet au moins un élément fixe dans K, soit $\Phi(x,y,z)$. Le théorème I est démontré.

Remarque 1. Les conditions du théorème I n'assurent pas l'unicité, comme il est montré par l'exemple suivant. Prenons $T=1$, $a=b=1$, $\rho(y,z)=\sigma(x,z)=\tau(x,y)=0$ et $f(x,y,z,u_1,\ldots,u_7)=|u_1|^{1/2}\sin 2\pi x$, pour $0\leqslant x\leqslant 1$ et pour tous les $y,z,u_1,\ldots,u_7$. Alors l'équation $u_{xyz}=|u|^{1/2}\sin 2\pi x$ admet la solution $\Phi_1(x,y,z)=0$. Elle admet en outre la solution $\Phi_2(x,y,z)=(64\pi^2)^{-1}|z|z|y|y\sin^4\pi x$, pour $0\leqslant x\leqslant 1$, $-1\leqslant y\leqslant 1$, $-1\leqslant z\leqslant 1$. D'autre part, Φ_1 et Φ_2 vérifient les conditions aux limites et on démontre immédiatement qu'on a $m_1(y,z)=m_2(y,z)=0$, pour $-1\leqslant y\leqslant 1$, $-1\leqslant z\leqslant 1$. On peut prendre alors $K_1=K_2=K_3=N_1=N_2=N_3=N_4=M_2=M_3=M_4=M_5=M_6=M_7=0$ et $L=1$, $P_1=3$, $P_2=P_5=P_6=P_7=2$, $P_3=P_4=1$ et toutes les conditions du théorème I sont remplies.

Théorème II. *Si toutes les conditions du Théorème I sont vérifiées et si* $\omega_4(\delta)=M_1\delta$ *(c'est-à-dire la fonction* $f(x,y,z,u_1,\ldots,u_7)$ *satisfait à une condition de Lipschitz par rapport à* u_1*), alors il existe une seule fonction-vecteur* $\Phi(x,y,z)$ *continue avec ses dérivées* Φ_x, Φ_y, Φ_z, Φ_{xy}, Φ_{xz}, Φ_{yz} *et* Φ_{xyz} *sur* A, *et une seule fonction-vecteur* $m(y,z)$ *satisfaisant à* (1.9), (1.10), (1.11). *En outre, la solution (unique) du problème* (1.9), (1.10), (1.11) *dépend d'une manière continue des données aux limites* ρ, σ, τ.

La démonstration du théorème II repose sur un raisonnement typique pour un tel genre de problèmes (v. Th. II, III de [2], [3]). C'est pour quoi nous omettons de la donner. (Remarquons seulement, qu'en imposant des conditions plus restrictives aux constantes de Lipschitz, on arrive facilement à démontrer un théorème d'unicité par le principe des contractions).

Il est naturel maintenant de se poser le question si on peut choisir les données aux limites ρ, σ, τ de façon que la fonction-vecteur $m(y,z)$, $-a\leqslant y\leqslant a$, $-b\leqslant z\leqslant b$, prenne des valeurs données d'avance. Nous nous bornons ici à indiquer un cas où $m(y,z)\equiv 0$, quelles que soient $\rho(y,z)$, $\sigma(x,z)$, $\tau(x,y)$.

Proposition 1. *Supposons, en plus des hypothèses du théorème I, que* f, σ, τ, *soient définies pour* $-\infty<x<+\infty$ *et périodiques, de période* T, *en* x. *Supposons qu'on ait*

$$f(-x,y,z;u_1,-u_2,u_3,u_4,-u_5,-u_6,u_7)=-f(x,y,z;u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7),$$

$$\sigma(-x,z)=\sigma(x,z),\qquad \tau(-x,y)=\tau(x,y).$$

Alors, il existe une solution $u(x,y,z)$ *du problème* (1.9), (1.10), (1.11) *paire en* x, *et telle qu'on ait* $m(y,z)\equiv 0$ *(et donc, l'équation qu'elle vérifie devient* $u_{xyz}=f$*).*

Pour le démontrer, considérons le sous-ensemble $\tilde{K}$ de K, formé des fonctions $\Phi\in K$ pour lesquelles $\Phi(-x,y,z)=\Phi(x,y,z)$. Alors on a pour

toute $\Phi\in\tilde{K}$, $\Phi_x(-x,y,z)=-\Phi_x(x,y,z)$, $\Phi_y(-x,y,z)=\Phi_y(x,y,z)$ etc., et, en notant $F(x,y,z)=f[x,y,z;\Phi(x,y,z),\Phi_x(x,y,z),\ldots,\Phi_{yz}(x,y,z)]$, on a $F(-x,y,z)=-F(x,y,z)$, et donc,

$$m(y,z)=T^{-1}\int_0^T F(\xi,y,z)\,d\xi=0,$$

pour $\Phi\in\tilde{K}$. D'autre part, on voit immédiatement que la transformation $\mathfrak{S}$ définie par les formules (1.23) mène $\tilde{K}$ dans $\tilde{K}$. Le reste de la démonstration du théorème I reste tel quel.

Le théorème suivant est un théorème d'existence des solutions du problème de Conlan, périodiques en y et z. (Comparer avec [4]).

Théorème I*. (d'existence) : *Supposons que* $b,T>0$ et K_1, K_2, K_3, L, N_1, N_2, N_3, N_4, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, $P_7>0$ *soient des constantes, telles que*

$$(1.1)^*\qquad \begin{aligned}
&K_3+4Lb\leqslant P_5, && N_2+2^{-1}K_1T+2^{-1}K_2T+LT^2\leqslant P_1,\\
&K_2+2LT\leqslant P_6, && N_1+K_1b+2^{-1}K_3T+2LbT\leqslant P_3,\\
&K_1+2LT\leqslant P_7, && N_3+K_2b+2^{-1}K_3T+2LbT\leqslant P_2,\\
&N_1+2^{-1}T(N_1+N_3)+bN_2+bT(K_1+K_2)+2^{-1}T^2K_3+ && \\
&\quad +3LbT^2\leqslant P_1, &&
\end{aligned}$$

et considérons les intervalles $A^*=[0\leqslant x\leqslant T;\ 0\leqslant y\leqslant T;\ |z|\leqslant b]$ *et* $R^*=[0\leqslant x\leqslant T;\ 0\leqslant y\leqslant T;\ |z|\leqslant b;\ |u_i|\leqslant P_i,\ (i=1,2,\ldots,7)]$. *Supposons que la fonction-vecteur* $f(x,y,z,u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7)$ *soit continue sur* R^* *et qu'elle satisfasse, sur* R^*, *aux conditions*

$$(1.2)^*\qquad \begin{aligned}
&f(T,y,z,u_1,u_2,\ldots,u_7)=f(0,y,z,u_1,u_2,\ldots,u_7),\\
&f(x,T,z,u_1,u_2,\ldots,u_7)=f(x,0,z,u_1,u_2,\ldots,u_7),
\end{aligned}$$

à (1.3) *et à la condition de Lipschitz dans les six derniers arguments* (1.4). *Supposons encore que les fonctions-vecteurs* $\rho(y,z)$, $\sigma(x,z)$, $\tau(x,y)$ *soient continues sur* A^*, *avec leurs dérivées* ρ_y, ρ_z, ρ_{yz}, σ_x, σ_z, σ_{xz}, τ_x, τ_y, τ_{xy} *et qu'elles satisfassent aux conditions*

$$(1.6)^*\qquad \begin{aligned}
&\rho(y,0)=\tau(0,y)=\tau(T,y)=\alpha(y), && |\alpha(y_1)-\alpha(y_2)|\leqslant N_1|y_1-y_2|,\\
&\rho(0,z)=\rho(T,z)=\sigma(0,z)= && \\
&\quad =\sigma(T,z)=\beta(z), && |\beta(z_1)-\beta(z_2)|\leqslant N_2|z_1-z_2|,\\
&\sigma(x,0)=\tau(x,0)=\tau(x,T)=\gamma(x), && |\gamma(x_1)-\gamma(x_2)|\leqslant N_3|x_1-x_2|,\\
&\rho(0,0)=\rho(T,0)=\sigma(0,0)=\sigma(T,0)=\tau(0,0)=\tau(T,0)= && \\
&\quad \tau(0,T)=N_4, &&
\end{aligned}$$

quels que soient $0 \leqslant x_1, x_2, x \leqslant T$, $0 \leqslant y_1, y_2, y \leqslant T$, $-b \leqslant z_1, z_2, z \leqslant b$. *Alors, si*

$$(1.7)^* \qquad 2d(M_2 + M_5 + M_6) < 1, \quad 2d(M_3 + M_5 + M_7) < 1, \quad 4r(M_4 + M_6 + M_7) < 1,$$

où

$$(1.8)^* \qquad d = \max(T, b, Tb), \qquad r = \max(T, T^2).$$

il existe une fonction-vecteur $\Phi(x, y, z)$ *continue avec* Φ_x, Φ_y, Φ_z, Φ_{xy}, Φ_{xz}, Φ_{yz}, *dans* A^*, *et trois fonctions-vecteurs* $m_1(y, z)$, $m_2(x,z)$ *et* $m_3(z)$, $0 \leqslant x \leqslant T$, $0 \leqslant y \leqslant T$, $-b \leqslant z \leqslant b$, *telles que*

$$(1.9)^* \qquad \begin{aligned} &\Phi(0, y, z) = \Phi(T, y, z) = \varphi(y, z), \qquad \Phi(x, y, 0) = \varphi(x, y), \\ &\Phi(x, 0, z) = \Phi(x, T, z) = \sigma(x, z), \end{aligned}$$

$$m_1(y,z) = T^{-1} \int_0^T f[\xi, y, z;\ \Phi(\xi, y, z), \ldots, \Phi_{yz}(\xi, y, z)]\, d\xi,$$

$$(1.10)^* \qquad m_2(x, z) = T^{-1} \int_0^T f[x, \eta, z;\ \Phi(x, \eta, z), \ldots, \Phi_{yz}(x, \eta, z)]\, d\eta,$$

$$m_3(z) = T^{-2} \int_0^T \int_0^T f[\xi, \eta, z;\ \Phi(\xi, \eta, z), \ldots, \Phi_{yz}(\xi, \eta, z)]\, d\eta\, d\xi,$$

et

$$(1.11)^* \qquad \Phi_{xyz}(x,y,z) = f[x,y,z;\ \Phi(x,y,z), \Phi_x, \Phi_y, \Phi_z, \Phi_{xy}, \Phi_{xz}, \Phi_{yz}] - m_1(y, z) - m_2(x, z) + m_3(z),$$

quels que soient $0 \leqslant x \leqslant T$, $0 \leqslant y \leqslant T$, $|z| \leqslant b$. *C'est-à-dire, en prolongeant les fonctions* f *et* Φ (pour tous les $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$, $|z| \leqslant b$, $|u_i| \leqslant P_i$, $(i = 1, 2, \ldots, 7)$) *par périodicité de période* T *en* x *et en* y, *l'équation* (1.11)* *est vérifiée dans la bande* $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$, $|z| \leqslant b$ (dont la largeur est soumise aux conditions (1.7)*).

La démonstration du théorème I* repose sur les mêmes arguments que celle du théorème I. Les conditions étoilées jouent le rôle des conditions sans étoile (portant le même numéro d'ordre) du théorème I. Les conditions (1.7)* sont imposées par le choix de certaines fonctions η_1^*, η_2^*, η_3^*, jouant dans le th. I* le rôle joué par η_1, η_2, η_3 dans le th. I.

On peut démontrer maintenant le théorème suivant.

Théorème II*. *Si toutes les conditions du théorème I* sont vérifiées et si la fonction-vecteur* $\Phi(x,y,z;\ u_1, \ldots, u_7)$ *satisfait, en outre, à une condition de Lipschitz par rapport à* u_1, *alors il existe une seule fonction-vecteur* $\Phi(x,y,z)$,

continue avec Φ_x, Φ_y, Φ_z, Φ_{xy}, Φ_{xz}, Φ_{yz} *sur* A^* *et satisfaisant à* (1.9)*, (1.10)*, (1.11)*. *En outre, la solution (unique) du problème* (1.9)*, (1.10)*, (1.11)* *est continue des données aux limites* φ, σ, τ.

On a aussi la **Proposition I*** : *Supposons, en plus des hypothèses du théorème I*, que* f, σ, φ, τ *soient définies pour* $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$ *et périodiques, de période* T, *en* x *et en* y. *Supposons qu'on ait*

$$f(-x, y, z;\ u_1, -u_2, u_3, u_4, -u_5, -u_6, u_7) = -f(x, y, z;\ u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7),$$

$$f(x, -y, z;\ u_1, u_2, -u_3, u_4, u_5, u_6, -u_7) = -f(x, y, z;\ u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7),$$

$$\sigma(-x, z) = \sigma(x, z), \quad \tau(-x, y) = \tau(x, y), \quad \varphi(-y, z) = \varphi(y, z), \quad \tau(x, -y) = \tau(x, y).$$

Alors, il existe une solution $\Phi(x,y,z)$ *du problème* (1.9)*, (1.10)*, (1.11)*, *paire en* x *et en* y, *et telle qu'on ait* $m_1(y,z) \equiv 0$, $m_2(x,z) \equiv 0$, $m_3(z) \equiv 0$ *(et donc, l'équation qu'elle vérifie devient* $u_{xyz} = f$).

Nous donnons, enfin, un théorème d'existence pour les solutions du problème de Conlan, périodiques en x, en y, en z.

Théorème I** (d'existence) : *Supposons que* $T > 0$ *et* K_1, K_2, K_3, L, N_1, N_2, N_3, $|N_4|$, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, $P_7 > 0$ *soient des constantes, telles que*

$$(1.1)^** \qquad \begin{aligned} &K_3 + 4LT \leqslant P_5, \qquad N_2 + 2^{-1}T(K_1 + K_2) + 2LT^2 \leqslant P_4, \\ &K_2 + 4LT \leqslant P_6, \qquad N_1 + 2^{-1}T(K_1 + K_3) + 2LT^2 \leqslant P_3, \\ &K_1 + 4LT \leqslant P_7, \qquad N_3 + 2^{-1}T(K_2 + K_3) + 2LT^2 \leqslant P_2, \\ &|N_4| + 2^{-1}T(N_1 + N_2 + N_3) + 2^{-1}T^2(K_1 + K_2 + K_3) + 3LT^3 \leqslant P_1, \end{aligned}$$

et considérons les intervalles $A^{**} = [0 \leqslant x \leqslant T,\ 0 \leqslant y \leqslant T,\ 0 \leqslant z \leqslant T]$ *et* $R^{**} = [0 \leqslant x \leqslant T,\ 0 \leqslant y \leqslant T,\ 0 \leqslant z \leqslant T;\ |u_i| \leqslant P_i,\ (i = 1, 2, \ldots, 7)]$. *Supposons que la fonction-vecteur* $f(x, y, z, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7)$ *soit continue sur* R^{**} *et qu'elle satisfasse sur* R^{**} *aux conditions*

$$(1.2)^** \qquad \begin{aligned} &f(T, y, z;\ u_1, \ldots, u_7) = f(0, y, z;\ u_1, \ldots, u_7), \\ &f(x, T, z;\ u_1, \ldots, u_7) = f(u, 0, z;\ u_1, \ldots, u_7), \\ &f(x, y, T;\ u_1, \ldots, u_7) = f(x, y, 0;\ u_1, \ldots, u_7), \end{aligned}$$

à (1.3) *et à la condition de Lipschitz par rapport aux six derniers arguments* (1.4). *Supposons encore que les fonctions-vecteurs* $\varphi(y,z)$, $\sigma(x,z)$ et $\tau(x,y)$ *soient continues sur* A^{**} *avec leurs dérivées* φ_y, φ_z, φ_{yz}, σ_x, σ_z, σ_{xz}, τ_x, τ_y, τ_{xy} *et qu'elles satisfassent aux conditions* (1.5) *et*

$$
\begin{aligned}
&\rho(y,0) = \rho(y,T) = \tau(0,y) = \tau(T,y) = \alpha(y)\,,\\
&\rho(0,z) = \rho(T,z) = \sigma(0,z) = \sigma(T,z) = \beta(z)\,,\\
&\sigma(x,0) = \sigma(x,T) = \tau(x,0) = \tau(x,T) = \gamma(x)\,,\\
(1.6)^{**}\qquad &\alpha(0) = \alpha(T) = \beta(0) = \beta(T) = \gamma(0) = \gamma(T)\,,\\
&|\alpha(y_1) - \alpha(y_2)| \leqslant N_1\,|y_1 - y_2|\,,\\
&|\beta(z_1) - \beta(z_2)| \leqslant N_2\,|z_1 - z_2|\,,\\
&|\gamma(x_1) - \gamma(x_2)| \leqslant N_3\,|x_1 - x_2|\,,
\end{aligned}
$$

quels que soient $0 \leqslant x_1, x_2, x \leqslant T$, $0 \leqslant y_1, y_2, y \leqslant T$, $0 \leqslant z_1, z_2, z \leqslant T$. *Alors, si*

$$
(1.7)^{**}\qquad 4r(M_2 + M_5 + M_6) < 1,\quad 4r(M_3 + M_5 + M_7) < 1,\quad 4r(M_4 + M_6 + M_7) < 1\,,
$$

où

$$
(1.8)^{**}\qquad r = \max\,(T, T^2)\,,
$$

il existe une fonction-vecteur $U(x,y,z)$, *continue avec* U_x, U_y, U_z, U_{xy}, U_{xz}, U_{yz} *dans* A^{**}, *et sept fonctions-vecteurs* $\mu_1(y,z)$, $\mu_2(x,z)$, $\mu_3(x,y)$, $\mu_4(x)$, $\mu_5(y)$, $\mu_6(z)$, μ_7, $(0 \leqslant x \leqslant T,\ 0 \leqslant y \leqslant T,\ 0 \leqslant z \leqslant T)$, *telles que*

$$
(1.9)^{***}\qquad
\begin{aligned}
&U(0,y,z) = U(T,y,z) = \rho(y,z)\,,\\
&U(x,0,z) = U(x,T,z) = \sigma(x,z)\,,\\
&U(x,y,0) = U(x,y,T) = \tau(x,y)\,,
\end{aligned}
$$

$$
(1.10)^{**}\qquad
\begin{aligned}
\mu_1(y,z) &= T^{-1}\int_0^T f[\xi,y,z;\ U(\xi,y,z),\ \ldots,\ U_{yz}(\xi,y,z)]\,d\xi\,,\\
\mu_2(x,z) &= T^{-1}\int_0^T f[x,\eta,z;\ U(x,\eta,z),\ \ldots,\ U_{yz}(x,\eta,z)]\,d\eta\,,\\
\mu_3(x,y) &= T^{-1}\int_0^T f[x,y,\zeta;\ U(x,y,\zeta),\ \ldots,\ U_{yz}(x,y,\zeta)]\,d\zeta\,,\\
\mu_4(x) &= T^{-2}\int_0^T\int_0^T f[x,\eta,\zeta;\ U(x,\eta,\zeta),\ \ldots,\ U_{yz}(x,\eta,\zeta)]\,d\zeta\,d\eta\,,\\
\mu_5(y) &= T^{-2}\int_0^T\int_0^T f[\xi,y,\zeta;\ U(\xi,y,\zeta),\ \ldots,\ U_{yz}(\xi,y,\zeta)]\,d\zeta\,d\xi\,,\\
\mu_6(z) &= T^{-2}\int_0^T\int_0^T f[\xi,\eta,z;\ U(\xi,\eta,z),\ \ldots,\ U_{yz}(\xi,\eta,z)]\,d\eta\,d\xi\,,\\
\mu_7 &= T^{-3}\int_0^T\int_0^T\int_0^T f[\xi,\eta,\zeta;\ U(\xi,\eta,\zeta),\ \ldots,\ U_{yz}(\xi,\eta,\zeta)]\,d\zeta\,d\eta\,d\xi\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1.11)^{**}\qquad U_{xyz}(x,y,z) = f(x,y,z;\ &U(x,y,z),\ U_x,\ U_y,\ U_z,\ U_{xy},\ U_{xz},\ U_{yz}) -\\
&- \mu_1(y,z) - \mu_2(x,z) - \mu_3(x,y) + \mu_4(x) +\\
&+ \mu_5(y) + \mu_6(z) - \mu_7\,,
\end{aligned}
$$

quels que soient $0 \leqslant x \leqslant T$, $0 \leqslant y \leqslant T$, $0 \leqslant z \leqslant T$. *C'est-à-dire, en prolongeant les fonctions* f *et* U *par périodicité de période* T *en* x, *en* y *et en* z, *l'équation* $(1.11)^{**}$ *est vérifiée dans tout l'espace* $-\infty < x,y,z < +\infty$.

On peut aussi établir un théorème d'unicité et de dépendence continue de la solution $U(x,y,z;\ \sigma,\rho,\tau)$ des données ρ, σ, τ, si f satisfait à une condition de Lipschitz par rapport à la variable u_1. Enfin on peut établir une proposition analogue aux propositions 1,1*.

§ 2. Dans ce paragraphe, nous donnons un autre théorème d'existence des solutions périodiques du problème de Conlan. Ce nouveau théorème est un analogue d'un théorème établi par A. K. Aziz [1] pour le cas du problème de Darboux.

Considérons le problème

$$
\begin{aligned}
(2.1)\qquad u_{xyz}(x,y,z) &= f(x,y,z;\ u,\ u_x,\ u_y,\ u_z,\ u_{xy},\ u_{xz},\ u_{yz}) -\\
&- \frac{1}{T}\int_0^T f[\xi,y,z;\ u(\xi,y,z),\ u_x(\xi,y,z),\ \ldots,\ u_{yz}(\xi,y,z)]\,d\xi\,,
\end{aligned}
$$

$$
(2.2)\qquad u(0,y,z) = u(T,y,z) = \rho(y,z)\,,
$$

$$
(2.3)\qquad u(x,0,z) = \sigma(x,z),\quad u(0,y,z) = \tau(x,y)\,,
$$

où $\rho(y,z)$, $\sigma(x,y)$, $\tau(x,y)$ sont des fonctions-vecteurs données et continues, satisfaisant à

$$
(2.4)\qquad \rho(0,z) = \sigma(0,z)\,,\quad \rho(y,0) = \tau(0,y)\,,\quad \sigma(x,0) = \tau(x,0)\,,
$$

$$
(2.5)\qquad \sigma(T,z) = \sigma(0,z)\,,\quad \tau(T,y) = \tau(0,y)\,,
$$

et $f(x,y,z,u_1,u_2,\ldots,u_7)$ est une fonction-vecteur définie pour $0 \leqslant x \leqslant T$, $|y| \leqslant a$, $|z| \leqslant b$, $|u_i| \leqslant c_i$, $(i = 1,2,\ldots,7)$ et telle qu'on ait

$$
(2.6)\qquad f(T,y,z,u_1,\ldots,u_7) = f(0,y,z,u_1,\ldots,u_7)\,.
$$

Plus exactement, on cherche une fonction-vecteur $u(x,y,z)$, continue avec ses dérivées u_x, u_y, u_z, u_{xy}, u_{xz}, u_{yz}, et satisfaisant à (2.1) (2.2), (2.3) pour $0 \leqslant x \leqslant T$, $|y| \leqslant a$, $|z| \leqslant b$. Désignons par $B_1\theta, \ldots, B_7\theta$ les opérateurs

$$(B_1\theta)(x,y,z) = \rho(y,z) + \sigma(x,z) + \tau(x,y) - \rho(0,z) - \sigma(x,0) - \tau(0,y) + \rho(0,0) + \int_0^x\int_0^y\int_0^z \theta(\xi,\eta,\zeta)\,d\zeta\,d\eta\,d\xi,$$

$$(B_2\theta)(x,y,z) = \sigma_1(x,z) + \tau_1(x,y) - \sigma_1(x,0) + \int_0^x\int_0^z \theta(x,\eta,\zeta)\,d\zeta\,d\eta,$$

$$(B_3\theta)(x,y,z) = \rho_1(y,z) + \tau_y(x,y) - \tau_y(0,y) + \int_0^x\int_0^z \theta(\xi,y,\zeta)\,d\zeta\,d\xi,$$

$$(2.7)\qquad (B_4\theta)(x,y,z) = \rho_z(y,z) + \sigma_z(x,z) - \rho_z(0,z) + \int_0^x\int_0^y \theta(\xi,\eta,z)\,d\eta\,d\xi,$$

$$(B_5\theta)(x,y,z) = \tau_{xy}(x,y) + \int_0^z \theta(x,y,\zeta)\,d\zeta,$$

$$(B_6\theta)(x,y,z) = \sigma_{xz}(x,z) + \int_0^y \theta(x,\eta,z)\,d\eta,$$

$$(B_7\theta)(x,y,z) = \rho_{yz}(y,z) + \int_0^x \theta(\xi,y,z)\,d\xi.$$

Alors, si ρ, σ, τ sont des fonctions continues avec ρ_y, ρ_z, ρ_{yz}, σ_x, σ_z, σ_{xz}, τ_x, τ_y, τ_{xy}, satisfaisant à (2.4), (2.5), toute solution $u(x,y,z)$ du problème (2.1), (2.2), (2.3) (dans le sens précisé ci-dessus) jouit de la propriété que $p(x,y,z) = u_{xyz}(x,y,z)$ est une solution continue sur $0 \leq x \leq T$, $|y| \leq a$, $|z| \leq b$ de l'équation

$$(2.8)\qquad p(x,y,z) = f(x,y,z;\, B_1p,\, B_2p,\, B_3p,\, B_4p,\, B_5p,\, B_6p,\, B_7p) = \frac{1}{T}\int_0^T f(\xi,y,z,(B_1p)(\xi,y,z),\ldots,(B_7p)(\xi,y,z))\,d\xi.$$

Réciproquement, si $p(x,y,z)$ est une solution continue de l'équation (2.8) et ρ, σ, τ sont des fonctions données satisfaisant à (2.4), (2.5), alors $(B_1p)(x,y,z)$ satisfait, évidemment, à (2.1) et (2.3). D'autre part, on a, en vertu de (2.7) et (2.8), $(B_1p)(T,y,z) - (B_1p)(0,y,z) = 0$, c'est-à-dire $(B_1p)(x,y,z)$ satisfait aussi à (2.2). Par conséquent, *le problème de l'existence des solutions du problème* (2.1), (2.2), (2.3) *se réduit au problème de l'existence des solutions continues de l'équation* (2.8). Désignons par A et R les intervalles $A = [0 \leq x \leq T,\ |y| \leq a,\ |z| \leq b]$, $R = [0 \leq x \leq T,\ |y| \leq a,\ |z| \leq b,\ |u_i| \leq c_i,\ (i = 1,2,\ldots,7)]$. On va noter par (H_1) et (H_2) les hypothèses suivantes :

(H_1) : *La fonction-vecteur* $f(x,y,z,u_1,u_2,\ldots,u_7)$ *est continue sur* R, *et on a pour* $0 \leq x \leq T$, $|y| \leq a$, $|z| \leq b$, $|u_1| \leq c_1$, $|u_j| \leq \bar{u}_j$, $|u_j| \leq c_j$, $(j = 2,3,\ldots,7)$,

$$(2.9)\qquad |f(x,y,z,u_1,\ldots,u_7)| \leq L$$

et

$$(2.10)\qquad |f(x,y,z,u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7) - f(x,y,z,u_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3,\bar{u}_4,\bar{u}_5,\bar{u}_6,\bar{u}_7)| \leq \sum_{j=2}^{7} \omega_j(|u_j - \bar{u}_j|),$$

où $\omega_j(t)$, $(j = 2,3,\ldots,7)$ *sont des fonctions non-décroissantes, non-négatives et continues pour* $0 \leq t < \infty$, $\omega_j(t) > 0$ *pour* $t > 0$ *et* $\omega_j(0) = 0$, $(j = 2,3,\ldots,7)$. *En outre, on a*

$$(2.11)\qquad f(T,y,z,u_1,\ldots,u_7) = f(0,y,z,u_1,\ldots,u_7).$$

(H_2) : *Les fonctions* $\rho(y,z)$, $\sigma(x,z)$, $\tau(x,y)$ *sont continues avec leurs dérivées* ρ_y, ρ_z, ρ_{yz}, σ_x, σ_z, σ_{xz}, τ_x, τ_y, τ_{xy} *pour* $0 \leq x \leq T$, $|y| \leq a$, $|z| \leq b$. *En outre, si* $N = \sup_A \{|\rho(y,z)|, |\sigma(x,z)|, |\tau(x,y)|, |\rho_y|, |\rho_z|, |\rho_{yz}|, |\sigma_x|, |\sigma_z|, |\sigma_{xz}|, |\tau_x|, |\tau_y|, |\tau_{xy}|\}$, *on a*

$$(2.12)\qquad \begin{aligned} &7N + 2abTL \leq c_1,\quad 3N + 2abL \leq c_2,\quad 3N + 2bTL \leq c_3,\\ &3N + 2aTL \leq c_4,\quad N + 2bL \leq c_5,\quad N + 2aL \leq c_6,\quad N + 2TL \leq c_7. \end{aligned}$$

Remarque 1. Pour toute fonction-vecteur continue $p(x,y,z)$, pour laquelle on a

$$(2.13)\qquad |p(x,y,z)| \leq 2L$$

sur A, on a aussi, en vertu de (2.7) et (H_1) — (H_2)

$$(2.14)\qquad \begin{aligned} &|(B_1p)(x,y,z)| \leq c_1,\quad |B_2p| \leq c_2,\quad |B_3p| \leq c_3,\quad |B_4p| \leq c_4,\\ &|B_5p| \leq c_5,\quad |B_6p| \leq c_6,\quad |B_7p| \leq c_7. \end{aligned}$$

sur A. Donc, *quelle que soit la fonction-vecteur* $p(x,y,z)$ *continue et satisfaisant à* (2.13), *la fonction* $f(x,y,z;(B_1p)(x,y,z),(B_2p)(x,y,z),\ldots,(B_7p)(x,y,z))$ *est une fonction-vecteur continue de* (x,y,z) *sur* A *pourvu que les hypothèses* (H_1) *et* (H_2) *soient vérifiées.*

Remarque 2. Si les hypothèses (H_1) et (H_2) sont vérifiées, on peut, évidemment, trouver une fonction $\Omega(\delta)$, telle que

$$
(2.15)\quad
\begin{aligned}
&|f(x,y,z,u_1,\ldots,u_7)-f(x,y,z,u_1,\ldots,u_7)| \leqslant \Omega(|x-\bar{x}|),\\
&|f(x,y,z,u_1,\ldots,u_7)-f(x,\bar{y},z,u_1,\ldots,u_7)| \leqslant \Omega(|y-\bar{y}|),\\
&|f(x,y,z,u_1,\ldots,u_7)-f(x,y,\bar{z},u_1,\ldots,u_7)| \leqslant \Omega(|z-\bar{z}|),\\
&|f(x,y,z,u_1,u_2,\ldots,u_7)-f(x,y,z,\bar{u}_1,u_2,\ldots,u_7)| \leqslant \Omega(|u_1-\bar{u}_1|)
\end{aligned}
$$

et

$$
(2.16)\quad
\begin{aligned}
&|\rho(y,z)-\rho(\bar{y},z)| \leqslant \Omega(|y-\bar{y}|), && |\rho(y,z)-\rho(y,\bar{z})| \leqslant \Omega(|z-\bar{z}|),\\
&|\rho_1(y,z)-\rho_1(\bar{y},z)| \leqslant \Omega(|y-\bar{y}|), && |\rho_y(y,z)-\rho_y(y,\bar{z})| \leqslant \Omega(|z-\bar{z}|),\\
&|\rho_2(y,z)-\rho_2(\bar{y},z)| \leqslant \Omega(|y-\bar{y}|), && |\rho_z(y,z)-\rho_z(y,\bar{z})| \leqslant \Omega(|z-\bar{z}|),\\
&|\rho_{y2}(y,z)-\rho_{y2}(\bar{y},z)| \leqslant \Omega(|y-\bar{y}|), && |\rho_{yz}(y,z)-\rho_{yz}(y,\bar{z})| \leqslant \Omega(|z-\bar{z}|),\\
&|\sigma(x,z)-\sigma(\bar{x},z)| \leqslant \Omega(|x-\bar{x}|), && |\sigma(x,z)-\sigma(x,\bar{z})| \leqslant \Omega(|z-\bar{z}|),\\
&|\sigma_1(x,z)-\sigma_1(\bar{x},z)| \leqslant \Omega(|x-\bar{x}|), && |\sigma_x(x,z)-\sigma_1(x,\bar{z})| \leqslant \Omega(|z-\bar{z}|),\\
&|\sigma_2(x,z)-\sigma_2(\bar{x},z)| \leqslant \Omega(|x-\bar{x}|), && |\sigma_z(x,z)-\sigma_z(x,\bar{z})| \leqslant \Omega(|z-\bar{z}|),\\
&|\sigma_{x2}(x,z)-\sigma_{x2}(\bar{x},z)| \leqslant \Omega(|x-\bar{x}|), && |\sigma_{xz}(x,z)-\sigma_{xz}(x,\bar{z})| \leqslant \Omega(|z-\bar{z}|),\\
&|\tau(x,y)-\tau(\bar{x},y)| \leqslant \Omega(|x-\bar{x}|), && |\tau(x,y)-\tau(x,\bar{y})| \leqslant \Omega(|y-\bar{y}|),\\
&|\tau_1(x,y)-\tau_1(\bar{x},y)| \leqslant \Omega(|x-\bar{x}|), && |\tau_1(x,y)-\tau_x(x,y)| \leqslant \Omega(|y-\bar{y}|),\\
&|\tau_y(x,y)-\tau_y(\bar{x},y)| \leqslant \Omega(|x-\bar{x}|), && |\tau_y(x,y)-\tau_y(x,\bar{y})| \leqslant \Omega(|y-\bar{y}|),\\
&|\tau_{y1}(x,y)-\tau_{x1}(\bar{x},y)| \leqslant \Omega(|x-\bar{x}|), && |\tau_{xy}(x,y)-\tau_{xy}(x,\bar{y})| \leqslant \Omega(|y-\bar{y}|),
\end{aligned}
$$

pour $0 \leqslant x, \bar{x} \leqslant T$, $-a \leqslant y, \bar{y} \leqslant a$, $-b \leqslant z, \bar{z} \leqslant b$, $-c_1 \leqslant u_1, \bar{u}_1 \leqslant c_1$, $-c_j \leqslant u_j \leqslant c_j$, $(j = 2, 3, \ldots, 7)$, où $\Omega(\delta)$ est une fonction scalaire continue, non-décroissante, positive pour $\delta > 0$, avec $\Omega(0) = 0$. Posons alors

$$
(2.17.1)\quad \Omega_1(\delta) = \Omega(\delta) + \Omega[3\Omega(\delta) + 2abL\delta] + \omega_3[\Omega(\delta) + 2bL\delta] + \omega_1[\Omega(\delta) + 2aL\delta] + \omega_7[2L\delta],
$$

$$
(2.17.2)\quad \Omega_2(\delta) = 2[\Omega(\delta) + \Omega[3\Omega(\delta) + 2bTL\delta] + \omega_2[\Omega(\delta) + 2bL\delta] + \omega_4[\Omega(\delta) + 2TL\delta] + \omega_6[2L\delta]],
$$

$$
(2.17.3)\quad \Omega_3(\delta) = 2[\Omega(\delta) + \Omega[3\Omega(\delta) + 2aTL\delta] + \omega_2[\Omega(\delta) + 2aL\delta] + \omega_3[\Omega(\delta) + 2TL\delta] + \omega_5[2L\delta]].
$$

Evidemment, $\Omega_i(\delta)$, $(i = 1,2,3)$, sont des fonctions non-décroissantes, continues, positives sur $t > 0$ et $\Omega_i(0) = 0$, $(i = 1,2,3)$. Nous allons démontrer maintenant le

Théorème III. Si

1°. *Les hypothèses* (H_1) *et* (H_2) *sont vérifiées.*

2°. *Les solutions des équations*

$$
(2.18.1)\quad
\begin{aligned}
\rho_1(Y,Z;\delta) = {} & \Omega_1(\delta) + \omega_2[3\Omega(\delta) + \int_0^Y\int_0^Z \rho_1(\eta,\zeta;\delta)\,d\zeta\,d\eta] + \\
& + \omega_5[\Omega(\delta) + \int_0^Z \rho_1(Y,\zeta;\delta)\,d\zeta] + \omega_6[\Omega(\delta) + \int_0^Y \rho_1(\eta,Z;\delta)\,d\eta],
\end{aligned}
$$

pour $0 \leqslant Y \leqslant a$, $0 \leqslant Z \leqslant b$,

$$
(2.18.2)\quad
\begin{aligned}
\rho_2(X,Z;\delta) = {} & \Omega_2(\delta) + \omega_3[3\Omega(\delta) + \int_0^X\int_0^Z \rho_2(\xi,\zeta;\delta)\,d\zeta\,d\xi] + \\
& + \omega_5[\Omega(\delta) + \int_0^Z \rho_2(X,\zeta;\delta)\,d\zeta] + \omega_7[\Omega(\delta) + \int_0^X \rho_2(\xi,Z;\delta)\,d\xi] + \\
& + \frac{1}{T}\int_0^T \omega_3[3\Omega(\delta) + \int_0^\xi\int_0^Z \rho_2(\xi_1,\zeta;\delta)\,d\zeta\,d\xi_1]\,d\xi + \frac{1}{T}\int_0^T \omega_5[\Omega(\delta) + \\
& + \int_0^Z \rho_2(\xi,\zeta;\delta)\,d\zeta]\,d\xi + \frac{1}{T}\int_0^T \omega_7[\Omega(\delta) + \int_0^\xi \rho_2(\xi_1,Z;\delta)\,d\xi_1]\,d\xi,
\end{aligned}
$$

pour $0 \leqslant X \leqslant T$, $0 \leqslant Z \leqslant b$,

$$
(2.18.3)\quad
\begin{aligned}
\rho_3(X,Y;\delta) = {} & \Omega_3(\delta) + \omega_1[3\Omega(\delta) + \int_0^X\int_0^Y \rho_3(\xi,\eta;\delta)\,d\eta\,d\xi] + \\
& + \omega_6[\Omega(\delta) + \int_0^Y \rho_3(X,\eta;\delta)\,d\eta] + \omega_7[\Omega(\delta) + \int_0^X \rho_3(\xi,Y;\delta)\,d\xi] + \\
& + \frac{1}{T}\int_0^T \omega_1[3\Omega(\delta) + \int_0^\xi\int_0^Y \rho_3(\xi_1,\eta;\delta)\,d\eta\,d\xi_1]\,d\xi + \frac{1}{T}\int_0^T \omega_6[\Omega(\delta) + \\
& + \int_0^Y \rho_3(\xi,\eta;\delta)\,d\eta]\,d\xi + \frac{1}{T}\int_0^T \omega_7[\Omega(\delta) + \int_0^\xi \rho_3(\xi_1,Y;\delta)\,d\xi_1]\,d\xi,
\end{aligned}
$$

pour $0 \leqslant X \leqslant T$, $0 \leqslant Y \leqslant a$, *sont telles qu'on ait* $\rho_i \geqslant 0$ *pour* $0 \leqslant X \leqslant T$, $0 \leqslant Y \leqslant a$, $0 \leqslant Z \leqslant b$, *et pour* $\delta \to 0$

$$
(2.19)\quad \lim \rho_1(Y,Z;\delta) = 0,\quad \lim \rho_2(X,Z;\delta) = 0,\quad \lim \rho_3(X,Y;\delta) = 0,
$$

uniformément par rapport à $(X,Y,Z) \in A$, *alors il existe (au moins) une solution du problème* (2.1), (2.2), (2.3), $u = u(x,y,z)$, *définie sur* A. C'est-à-dire, en vertu des conditions (2.2), (2.11), cette solution peut être prolongée par périodicité de période T en x (après avoir prolongé par périodicité de période T en x la fonction-vecteur f) pour tout $-\infty < x < +\infty$ et $|y| \leqslant a$, $|z| \leqslant b$.

Démonstration. Soit E l'espace linéaire des fonctions—vecteurs continues sur A, avec la norme $\|\cdot\|$ définie par $\|p\| = \sup |p(x,y,z)|$. Désignons par $\mathfrak{K}$ le sous-ensemble de E, formé des fonctions-vecteurs $p(x,y,z)$ pour lesquelles on a

$$|p(x,y,z)| \leq 2L \tag{2.13}$$

et

$$|p(x,y,z) - p(\bar{x},\bar{y},\bar{z})| \leq \rho_1(y,z;|x-\bar{x}|) + \rho_2(\bar{x},z;|\bar{y}-y|) + \rho_3(\bar{x},\bar{y};|z-\bar{z}|), \tag{2.20}$$

où ρ_1, ρ_2, ρ_3 sont des solutions de (2.18.1), (2.18.2), (2.18.3), respectivement. L'ensemble $\mathfrak{K}$ est, visiblement, convexe et fermé. En vertu du critère de convergence uniforme d'Arzelà-Ascoli et des hypothèses du théorème, $\mathfrak{K}$ résulte compact dans la topologie de E.

Considérons alors la transformation $\mathfrak{S}: P = \mathfrak{S}p$, définie par

$$\begin{aligned} P(x,y,z) &= f[x,y,z;(B_1p)(x,y,z),\ldots,(B_7p)(x,y,z)] + \\ &+ \frac{1}{T}\int_0^T f[\xi,y,z;(B_1p)(\xi,y,z),\ldots,(B_7p)(\xi,y,z)]\,d\xi, \end{aligned} \tag{2.21}$$

(v. Remarque 1). *Il suffit de montrer que $\mathfrak{S}$ mène $\mathfrak{K}$ dans $\mathfrak{K}$, pour que le théorème résulte démontré, en vertu du principe de Schauder.*

D'abord, on a, évidemment, $|P(x,y,z)| \leq 2L$ sur A. Il nous reste à démontrer que $P(x,y,z)$ satisfait à (2.18). On trouve d'abord, de (2.7), (2.15), (2.16), (2.20).

$$\begin{aligned} &|(B_1p)(x,y,z) - (B_1p)(\bar{x},y,z)| \leq 3\Omega(|x-\bar{x}|) + 2abL|x-\bar{x}|, \\ &|(B_2p)(x,y,z) - (B_2p)(\bar{x},y,z)| \leq 3\Omega(|x-\bar{x}|) + \\ &\quad + \int_0^z \left|\int_0^z \rho_1(\eta,\zeta;|x-\bar{x}|)\,d\zeta\right| d\eta, \\ &|(B_3p)(x,y,z) - (B_3p)(\bar{x},y,z)| \leq \Omega(|x-\bar{x}|) + 2bL|x-\bar{x}|, \\ &|(B_4p)(x,y,z) - (B_4p)(\bar{x},y,z)| \leq \Omega(|x-\bar{x}|) + 2aL|x-\bar{x}|, \\ &|(B_5p)(x,y,z) - (B_5p)(\bar{x},y,z)| \leq \Omega(|x-\bar{x}|) + \\ &\quad + \left|\int_0^z \rho_1(y,\zeta;|x-\bar{x}|)\,d\zeta\right|, \\ &|(B_6p)(x,y,z) - (B_6p)(\bar{x},y,z)| \leq \Omega(|x-\bar{x}|) + \\ &\quad + \left|\int_0^y \rho_1(\eta,z;|x-\bar{x}|)\,d\eta\right|, \\ &|(B_7p)(x,y,z) - (B_7p)(\bar{x},y,z)| \leq 2L|x-\bar{x}|. \end{aligned} \tag{2.22}$$

donc

$$\begin{aligned} |P(x,y,z) - P(\bar{x},y,z)| &\leq |f[x,y,z;(B_1p)(x,y,z),\ldots,(B_7p)(x,y,z)] - \\ &- f[\bar{x},y,z;(B_1p)(\bar{x},y,z),\ldots,(B_7p)(\bar{x},y,z)]| \\ &\leq \Omega(|x-\bar{x}|) + \Omega_1|(B_1p)(x,y,z) - (B_1p)(\bar{x},y,z)| + \\ &+ \sum_{j=2}^{7}\omega_j|(B_jp)(x,y,z) - (B_jp)(\bar{x},y,z)| \leq \\ &\leq \Omega_1(|x-\bar{x}|) + \omega_2\left(3\Omega(|x-\bar{x}|) + \left|\int_0^x\left|\int_0^z \rho_1(\eta,\zeta;|x-\bar{x}|)\,d\zeta\right|d\eta\right|\right) + \\ &+ \omega_3\left(\Omega(|x-\bar{x}|) + \left|\int_0^z \rho_1(y,\zeta;|x-\bar{x}|)\,d\zeta\right|\right) + \\ &+ \omega_7\left(\Omega(|x-\bar{x}|) + \left|\int_0^y \rho_1(\eta,z;|x-\bar{x}|)\,d\eta\right|\right) = \rho_1(y,z;|x-\bar{x}|). \end{aligned} \tag{2.23}$$

D'une manière analogue, on trouve des évaluations du type (2.22) pour les quantités $|(B_1p)(x,y,z) - (B_1p)(\bar{x},\bar{y},z)|, \ldots, |(B_7p)(\bar{x},\bar{y},z) - (B_7p)(\bar{x},\bar{y},z)|$ et pour les quantités $|(B_1p)(\bar{x},\bar{y},z) - (B_1p)(\bar{x},\bar{y},\bar{z})|, \ldots, |(B_7p)(\bar{x},\bar{y},z) - (B_7p)(\bar{x},\bar{y},\bar{z})|$, qu'on utilise pour évaluer les expressions

$$\begin{aligned} |P(x,y,z) - P(\bar{x},\bar{y},z)| &\leq |f[\bar{x},y,z;(B_1p)(\bar{x},y,z),\ldots,(B_7p)(\bar{x},y,z)] - \\ &- f[\bar{x},\bar{y},z;(B_1p)(\bar{x},\bar{y},z),\ldots,(B_7p)(\bar{x},\bar{y},z)]| + \\ &+ \frac{1}{T}\int_0^T |f[\xi,y,z;(B_1p)(\xi,y,z),\ldots] - f[\xi,\bar{y},z;\\ &(B_1p)(\xi,\bar{y},z),\ldots]|\,d\xi \end{aligned}$$

et $|P(\bar{x},\bar{y},z) - P(\bar{x},\bar{y},\bar{z})|$. On trouve, en vertu de (2.17.2) et (2.17.3), en procédant, mutatis mutandis, comme on l'a déjà fait pour obtenir l'inégalité (2.23),

$$|P(\bar{x},y,z) - P(\bar{x},\bar{y},z)| \leq \rho_2(\bar{x},z;|y-\bar{y}|), \tag{2.24}$$

$$|P(\bar{x},\bar{y},z) - P(\bar{x},\bar{y},\bar{z})| \leq \rho_3(\bar{x},\bar{y};|z-\bar{z}|). \tag{2.25}$$

On trouve alors de (2.23), (2.24) et (2.25)

$$(2.26)\qquad P(x,y,z)-P(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \leqslant \varrho_1(y,z;|x-\bar{x}|)+ \varrho_2(\bar{x},z;|y-\bar{y}|)+\varrho_3(\bar{x},\bar{y};|z-\bar{z}|)$$

c'est-à-dire $\mathcal{S}$ même $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$, et le théorème est démontré.

Remarque 3. Pour clarifier la portée du théorème précédent, remarquons d'abord que les hypothèses (H_1) et (H_2) sont naturelles et facilement controlables. On ne pourrait pas dire la même chose de l'hypothèse 2°, concernant les solutions de (2.18.1), (2.18.2), (2.18.3). (D'ailleurs, même dans le cas plus simple du problème de Darboux, les équations qui jouent le même rôle dans le travail cité de A.K. Aziz (éq. (2.17), page 561, [1]) sont très compliquées dans le cas général). Ce qui constitue la „pointe" du travail d'Aziz, c'est que dans le cas où on a des conditions de Lipschitz par rapport aux derniers arguments, le résultat d'Aziz [1] est une amélioration, dans un certain sens, du résultat de L. Cesari [2] (v. le corollaire 2.1 de [1]). Il est naturel donc, de nous poser la question suivante : Dans le cas du problème de Coulau, si

$$(2.27)\qquad \omega_j(\delta)=M_j\,\delta,\qquad (j=2,3,\ldots,7),$$

le résultat donné par le théorème du §2 est-il une amélioration du Théorème I, §1 ? Remarquons d'abord, qu'en posant

$$(2.28.1)\qquad \Omega_1^*(\delta)=\Omega_1(\delta)+(3M_2+M_5+M_6)\,\Omega(\delta)\,,$$

$$(2.28.2)\qquad \Omega_2^*(\delta)=\Omega_2(\delta)+(6M_3+2M_5+2M_7)\,\Omega(\delta)\,,$$

$$(2.28.3)\qquad \Omega_3^*(\delta)=\Omega_3(\delta)+(6M_4+2M_6+2M_7)\,\Omega(\delta),$$

les fonctions $\Omega_i^*(\delta)$, $(i=1,2,3)$ sont continues et non-décroissantes pour $0\leqslant\delta$, elles sont positives pour $\delta>0$ et $\Omega_i^*(0)=0$. D'autre part, si on a (2.27), les équations (2.18.1,2,3) deviennent

$$(2.29.1)\qquad \varrho_1(Y,Z;\delta)=\Omega_1^*(\delta)+M_2\int_0^Y\int_0^Z\varrho_1(\eta,\zeta;\delta)\,d\zeta\,d\eta+ M_5\int_0^Z\varrho_1(Y,\zeta;\delta)\,d\zeta+M_6\int_0^Y\varrho_1(\eta,Z;\delta)\,d\eta,$$

pour $0\leqslant Y\leqslant a$, $0\leqslant Z\leqslant b$,

$$(2.29.2)\qquad \begin{aligned}\varrho_2(X,Z;\delta)=\Omega_2^*(\delta)&+M_3\int_0^X\int_0^Z\varrho_2(\xi,\zeta;\delta)\,d\zeta\,d\xi+\\ &+M_5\int_0^Z\varrho_2(X,\zeta;\delta)\,d\zeta+M_7\int_0^X\varrho_2(\xi,Z;\delta)\,d\xi+\\ &+\frac{M_3}{T}\int_0^T\left\{\int_0^\xi\int_0^Z\varrho_2(\xi_1,\zeta;\delta)\,d\zeta\,d\xi_1\right\}d\xi+\\ &+\frac{M_5}{T}\int_0^T\left\{\int_0^Z\varrho_2(\xi,\zeta;\delta)\,d\zeta\right\}d\xi+\frac{M_7}{T}\int_0^T\left\{\int_0^\xi\varrho_2(\xi_1,Z;\delta)\,d\xi_1\right\}d\xi,\end{aligned}$$

pour $0\leqslant X\leqslant T$, $0\leqslant Z\leqslant b$.

$$(2.29.3)\qquad \begin{aligned}\varrho_3(X,Y;\delta)=\Omega_3^*(\delta)&+M_4\int_0^X\int_0^Y\varrho_3(\xi,\eta;\delta)\,d\eta\,d\xi+\\ &+M_6\int_0^Y\varrho_3(X,\eta;\delta)\,d\eta+M_7\int_0^X\varrho_3(\xi,Y;\delta)\,d\xi+\\ &+\frac{M_4}{T}\int_0^T\left\{\int_0^\xi\int_0^Y\varrho_3(\xi_1,\eta;\delta)\,d\eta\,d\xi_1\right\}d\xi+\\ &+\frac{M_6}{T}\int_0^T\left\{\int_0^Y\varrho_3(\xi,\eta;\delta)\,d\eta\right\}d\xi+\frac{M_7}{T}\int_0^T\left\{\int_0^\xi\varrho_3(\xi_1,Y;\delta)\,d\xi_1\right\}d\xi,\end{aligned}$$

pour $0\leqslant X\leqslant T$, $0\leqslant Y\leqslant a$.

Observons que, si on a (comme dans (1.7) du §1)

$$(2.30)\qquad 2d\,(M_3+M_5+M_7)<1,\qquad 2l\,(M_4+M_6+M_7)<1,$$

avec $d=\max\{T,b,Tb\}$, $l=\max\{T,a,Ta\}$, alors on peut appliquer aux équations (2.29.2) et (2.29.3) le principe des contractions dans l'espace des fonctions continues (Les inégalités (2.30) assurent la condition de contraction pour les opérateurs V_i attachés à (2.29.2) et (2.29.3), en écrivant ces dernières sous la forme $\varrho_2=V_2\varrho_2$, $\varrho_3=V_3\varrho_3$). En outre, la solution (unique) de (2.29.2), respectivement (2.29.3), est positive, comme on le remarque en partant avec $\Omega_2^*(\delta)$, respectivement $\Omega_3^*(\delta)$ comme première approximation de la suite des approximations successives, définies comme d'habitude. D'autre part, il est facile à voir que, si (2.30) a lieu, la solution unique de (2.29.2), (2.29.3) dépend continuellement du terme libre $\Omega_2^*(\delta)$, respectivement $\Omega_3^*(\delta)$. Comme $\lim\Omega_2^*(\delta)=0$ et $\lim\Omega_3^*(\delta)=0$, pour $\delta\to 0$, il résulte que la vérification de (2.30) entraîne, dans le cas lipschitzien, la vérification des conditions concernant les équations (2.18.2), (2.18.3).

Remarquons aussi que la dernière condition de (1.7), c'est-à-dire

$$c(M_2 + M_5 + M_6) < 1, \tag{2.31}$$

assure la vérification de la condition concernant l'équation (2.18.1) (c'est-à-dire (2.29.1)). Probablement, (2.31) peut être considérablement élargie, car on voit qu'en posant

$$\int_0^Y \int_0^Z \rho_1(\eta, \zeta : \delta)\, d\zeta d\eta = r_1(Y, Z : \delta), \tag{2.32}$$

l'équation (2.29.1) devient

$$\partial^2 r_1 / \partial Y\, \partial Z = \Omega_1^*(\delta) + M_2 r_1 + M_5\, \partial r_1 / \partial Y + M_6\, \partial r_1 / \partial Z, \tag{2.33}$$

avec $r_1(0, Z : \delta) = 0$, $r_1(Y, 0 ; \delta) = 0$. On constate sans peine que l'équation (2.33), avec ces deux conditions, admet *formellement* la solution

$$r_1(Y, Z : \delta) = \frac{\Omega_1(\delta) e^{M_6 y + M_5 z}}{M_2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{K^r y^r z^r}{r!} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-M_6 y)^n + (-M_5 z)^n}{(n+r)!} - \frac{1}{r!} \right\} - \frac{\Omega_1(\delta)}{M_2}.$$

avec $K = M_2 + M_5 M_6$, les seules conditions qui peuvent restreindre les valeurs de M_2, M_5, M_6 sont celles regardant la convergence uniforme de cette série, la positivité de r_1 et de $\rho_1 = \partial^2 r_1 / \partial Y \partial Z$. C'est une question de pure technique qui, d'ailleurs, ne mérite pas une place spéciale.

BIBLIOGRAPHIE

1. Aziz A. K. — *Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations*. Proc. American Math. Soc., vol. 17, (1966), pp. 557—566.

2. Cesari L. — *Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations*. Intern. Symposion on Nonlinear Oscillations, Kiev, 1961, Izdat. Akad. Nauk SSSR, 2, pp. 440—457, 1963.

3. Cesari L. — *A criterion for the existence in a strip of periodic solutions of hyperbolic, partial differential equations*. Rend. Circ. Mat. di Palermo, serie II, t. XIV, (1965), pp. 1—24.

4. Cesari L. — *Existence in the large of periodic solutions of hyperbolic partial differential equations*. Arch. for Rat. Mech. and Analysis, vol. 20, (1965), pp. 170—190.

5. Cesari L. — *The implicit function theorem in functional analysis*. Duke Math. Journal, vol. 33 (1966), pp. 417—440.

6. Conlan J. — *An existence theorem for the equation $u_{xyz} = f$*. Arch. Rat. Mech. Anal. 9 (1962), pp. 61—76.

7. Glick I. I. — *On an analog of the Euler-Cauchy polygon method for the partial differential equation $u_{x_1 \ldots x_n} = f$*. Contrib. to Diff. Equat. II, 1963, 1—59.

8. Petrovanu D. — *Periodic solutions of the Dirichlet problem*. (à paraître).

9. Walter W. — *Differential-und Integral-Ungleichungen*. Springer Verlag, Berlin, 1964.

10. Vejvoda O. — *Nonlinear boundary value problems for differential equations: Differential equations and their applications*. Czech. Acad. Sc. Prague, (1963), pp. 199—215.

11. Vejvoda O. — *Periodic solutions of a linear and weakly nonlinear wave equation in one dimension*. I. Czech. Mat. Žurn., t. 14, (89), (1964), pp. 341—382.

SOLUŢII PERIODICE PENTRU ANUMITE EC UAŢII HIPERBOLICE

Rezumat

Se studiază problema existenţei, unicităţii şi stabilităţii soluţiilor problemelor (1.9), (1.10), (1.11) respectiv (1.9)*, (1.10)*, (1.11)*, şi (1.9)** (1.10)**, (1.11)** (aşa-zisele probleme modificate). Propoziţiile 1, 1* sînt criterii în care existenţa soluţiilor problemelor are loc cu $m(y) = 0$, respectiv cu $m_1 = m_2 = m_3 = 0$.