$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \quad \text{şi} \quad \|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

În paragraful 1 se dă un exemplu de matrice pentru care 0 este o valoare proprie aproximativă în raport cu $(l, l)$. Se dă de asemenea un exemplu de matrice pentru care 0 este o valoare proprie aproximativă în raport cu $(l, m)$ şi nu este o valoare proprie aproximativă în raport cu $(l, l)$.

În paragraful 2 se formulează condiţii suficiente pentru ca 0 să nu fie o valoare proprie aproximativă a unei matrice în raport cu fiecare dintre perechile $(l, l)$, $(l_p, l_q)$, $(m, m)$, $(l, m)$, $(l_p, m)$ şi $(l_p, l)$. Aceste condiţii sînt asemănătoare condiţiilor suficiente pentru ca 0 să nu fie o valoare proprie a unei matrice în raport cu un spaţiu de tip $l$, $m$ sau $l_p$. Aceste condiţii au fost formulate în [2].

În paragraful 3 se notează cu $\mathcal{A}$ clasa de spaţii $(m, l_p, p > 1)$ şi se arată că pentru fiecare matrice simetrică şi continuă mulţimea de valori proprii aproximative în raport cu o pereche $(X, X)$, $X \in \mathcal{A}$ coincide cu spectrul.

# ESPACES PSEUDOMÉTRIQUES ET PSEUDONORMES

PAR

EUGEN POPA

L'étude d'un espace doté d'un écart prenant ses valeurs dans un ensemble ordonné a été faite pour la première fois par K u r e p a [3]. Un exposé sur les résultats principaux concernant ce sujet se trouve dans [4]. Dans cette Note, nous rappelons la notion de pseudométrique introduite dans [5], et donnons une caractérisation des topologies sur certaines structures algébriques (groupes, espaces vectoriels). Nous indiquons aussi une extension du théorème de Banach pour les espaces uniformisables. Une autre extension, à l'aide de la famille des écarts, se trouve dans [2].

**Définition.** *Soit $D$ un ensemble ordonné*, avec un plus petit élément $d_0$ et doté d'une opération $(d', d'') \to d' + d''$ telle que:*

(D1) $\quad d' < d'' \Rightarrow d' + d < d'' + d$ *et* $d + d' < d + d'' \qquad \forall d \in D$

*On suppose qu'il y a un sous-ensemble $D_1 \subset D$, non vide et filtrant à gauche (par rapport à l'ordre induit par celui de $D$) tel que:*

(D2) $\qquad \forall d \in D_1, \exists d' \in D_1$ *tel que* $d' + d' < d$.

*Une pseudométrique sur $X$ est une application $\rho : X \times X \to D$ telle que:*

(X1) $\qquad \rho(x, y) = d_0 \Longleftrightarrow x = y,$

(X2) $\qquad \rho(x, y) = \rho(y, x), \qquad x, y \in X,$

(X3) $\qquad \rho(x, y) < \rho(x, z) + \rho(z, y), \qquad x, y, z \in X.$

On nomme boule de centre $x_0$ et de rayon $d \in D_1$ l'ensemble:

$$B(x_0, d) = \{x : \rho(x_0, x) < d\}.$$

La famille $\{B(x_0, d)\}_{d \in D_1}$ est la base d'un filtre de voisinages du point $x_0$. Dans ce qui suit, nous considérons chaque espace pseudométrique

*) Une relation transitive, propre et réflexive.

(i.e. un ensemble $X$ avec une pseudométrique $\rho$) topologisé par les filtres de voisinages indiqués ci-dessus. Le résultat principal obtenu dans [5] est :

Un espace topologique non vide est uniformisable si et seulement si on trouve une pseudométrique qui induit la même topologie.

En termes de la théorie des catégories, cela veut dire qu'il y a une équivalence entre la catégorie des espaces uniformes et celle des espaces pseudométriques, les morphismes étant les applications uniformément continues.

Comme application immédiate, nous allons démontrer le théorème de Banach.

**Définition.** *Soit $X$ un espace pseudométrique. Une application $f: X \to X$ est une contraction si :*

$$\rho[f(x), f(y)] < \varphi[\rho(x, y)] \qquad x, y \in X$$

*où $\varphi: D \to D$ a les propriétés :*

(1) $$\varphi(d) < d \text{ et } \varphi(d) \neq d \text{ si } d \neq d_0.$$

(2) $$d' < d'' \Rightarrow \varphi(d') < \varphi(d'').$$

(3) $$\forall d \in D_1,\ d' \in \rho(X \times X),\ \exists n_1 \text{ tel que } m, n \geqslant n_1 \text{ implique :}$$

$$\varphi^n(d') + [\varphi^{n+1}(d') + [\ldots + \varphi^m(d')] \ldots] < d.$$

**Théorème** (Banach). *Une contraction $f: X \to X$ d'une espace complet pour des suites, a un point fixe unique.*

*Démonstration.* Soit $x_1 \in X$ ; considérons la suite $\{x_n\}_{n \in N}$ définie par $x_{n+1} = f(x_n)$. On obtient :

$$\rho(x_2, x_3) = \rho[f(x_1), f(x_2)] < \varphi[\rho(x_1, x_2)],$$

$$\rho(x_3, x_4) = \rho[f(x_2), f(x_3)] < \varphi[\rho(x_2, x_3)] < \varphi^2[\rho(x_1, x_2)],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\rho(x_n, x_{n+1}) = \rho[f(x_{n-1}), f(x_n)] < \varphi^{n-1}[\rho(x_1, x_2)].$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Donc :

$$\rho(x_n, x_m) < \rho(x_n, x_{n+1}) + [\rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + [\ldots + \rho(x_{m-1}, x_m)] \ldots] <$$
$$< \varphi^{n-1}[\rho(x_1, x_2)] + [\ldots + \varphi^{m-1}[\rho(x_1, x_2)]] \ldots]$$

quels que soient $m, n \in N$. Mais, quels que soient $d \in D_1$ et $d' \in \rho(X \times X)$, on trouve $n_1 \in N$, tel que $m, n \geqslant n_1$ implique :

$$\varphi^{n-1}[\rho(x_1, x_2)] + [\varphi^n[\rho(x_1, x_2)] + [\ldots + \varphi^{m-1}[\rho(x_1, x_2)]] \ldots] < d,$$

ce qui prouve — compte tenu de l'inégalité précédente — que $\{x_n\}_{n \in N}$ est une



suite de Cauchy. Donc, par hypothèse, la suite a une limite $x_0$. D'autre part, la contraction $f$ est continue : en effet, pour chaque $d \in D_1$, $\rho(x, y) < d$ implique :

$$\rho[f(x), f(y)] < \varphi[\rho(x, y)] < \rho(x, y) < d;$$

donc :

$$\rho[f(x), f(y)] < d,$$

de manière qu'on peut écrire :

$$x_0 = \lim_{n \to \infty}(x_{n+1}) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \to \infty} x_n) = f(x_0).$$

Donc $x_0$ est un point fixe de l'application $f$. Supposons maintenant que $y_0 = f(y_0)$. Alors :

$$\rho(x_0, y_0) = \rho[f(x_0), f(y_0)] < \varphi[\rho(x_0, y_0)],$$

d'où $\rho(x_0, y_0) < \varphi[\rho(x_0, y_0)]$, ce qui, implique d'après la condition (1) que $x_0 = y_0$ ; donc le point fixe est unique.

*Soit $G$ un groupe. Nous appelons pseudonorme de groupe une application $\|\cdot\|: G \to D$ si :*

(PN1) $$\|x\| = d_0 \Leftrightarrow x = 0,$$

(PN2) $$\|x\| = \|-x\|,$$

(PN3) $$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Nous noterons $V(d) = \{x : \|x\| < d\}$ où $d \in D_1$.

**Lemme 1.** *Si $G$ est abélien, la famille $\{V(d)\}_{d \in D_1}$ est la base d'un filtre de voisinages de l'élément neutre. La topologie ainsi définie est compatible avec la structure de groupe.*

*Démonstration.* La famille $\{V(d)\}_{d \in D_1}$ est la base d'un filtre, car $D_1$ est filtrant à gauche. De $\|x\| = \|-x\|$ il résulte que $V(d) = -V(d)$. Enfin, si $d' + d'' < d$, alors $V(d') + V(d'') \subset V(d)$.

La réciproque est également valable :

**Lemme 2.** *Pour chaque groupe abélien topologique $G$, on trouve au moins une pseudonorme de groupe telle que la topologie induite coïncide avec celle de groupe.*

*Démonstration.* Soit $D$ l'ensemble des parties de $G$ qui contiennent l'élément neutre, ordonné par la relation d'inclusion. L'ensemble $\{0\}$ est le plus petit élément. Définissons l'opération $(A, B) \to A + B$. Si $0 \in A$, $0 \in B$ il est évident que $0 \in A + B$. On sait que $A \subset B$ implique $A + C \subset B + C$ et $C + A \subset C + B$, quel que soit $C$. Notons par $D_1$ un filtre de voisinages symétriques de l'élément neutre. $D_1$ est filtrant à gauche et pour chaque voisinage symétrique $V$, il y a un voisinage symétrique $V'$ tel que $V' + V' \subset V$. Définissons la pseudonorme par :

$$||x|| = \{x, -x, 0\}.$$

Si $x = 0$, on obtient $||0|| = \{0\}$. Si $||x|| = \{0\}$ on obtient $x = -x = 0$, donc $x = 0$. Les conditions (PN2) et (PN3) se vérifient par calcul direct:

$$||x|| = \{x, -x, 0\} = \{-x, -(-x), 0\} = ||-x||$$

$$||x+y|| = \{x+y, -y-x, 0\} \subset \{x+y, x-y, x, -x+y, -x-y, -x, y, -y, 0\} =$$

$$= \{x, -x, 0\} + \{y, -y, 0\} = ||x|| + ||y||.$$

De plus, on constate immédiatement que si $V'$ est un voisinage symétrique, $V' \in D_1$, alors le voisinage qui correspond par la pseudométrique définie plus haut est $V(V') = V'$, ce qui prouve la coïncidence des topologies.

Lex deux lemmes prouvent le:

**Théorème 1.** *Pour qu'une topologie sur un groupe abélien soit compatible avec la structure de groupe, il faut et il suffit qu'il existe une pseudonorme de groupe qui induise la même topologie.*

Pour les groupes quelconques on a le:

**Théorème 1'.** *Pour que la topologie sur un groupe soit compatible avec la structure de groupe, il faut et il suffit qu'il existe une pseudonorme de groupe ayant la propriété:*

(G) $\forall\, a \in G$ *et* $d \in D_1$, $\exists\, d' \in D_1$ *tel que* $||x|| < d' \Rightarrow (\exists\, y \in G$ *tel que* $||y|| < d$ *et* $x = a\,y\,a^{-1})$,

*et qui induise la même topologie.*

**Remarque.** *L'application* $\rho(x,y) = ||x - y||$ *est une pseudométrique, la topologie induite étant identique à celle donnée par la pseudonorme.*

Si le groupe est abélien, la pseudométrique ainsi définie est invariante pour toute translation. Si le groupe est quelconque, la pseudométrique est invariante pour toute translation à droite. La pseudométrique $\rho(x,y) = ||-y+x||$ est invariante pour toute translation à gauche.

*Soit $E$ un espace vectoriel sur $\Gamma$. Supposons qu'on a défini une application $R_+ \times D \to D$, notée $(\alpha, d) \to \alpha.d$, telle que:*

(D3) $\alpha \cdot D_1 \subset D_1$ *où* $\alpha \in R_+$, $\alpha \neq 0$,

(D4) $d' < d'' \Rightarrow \alpha.d' < \alpha.d''\ \forall\, \alpha \in R_+$,

(D5) $1 \cdot d = d$,

(D6) $\alpha \leqslant \beta \Rightarrow \alpha.d < \beta.d,\ \forall\, d \in D_1$ *et* $\alpha, \beta \in R_+$.

*Une application* $||\cdot|| : E \to D$ *est nommée pseudonorme si:*

(E1) $||x|| = d_0 \Longleftrightarrow x = 0$,

(E2) $||\alpha \cdot x|| = |\alpha| \cdot ||x||$,



(E3) $||x + y|| < ||x|| + ||y||$,

(E4) $\forall\, d \in ||E||$ *et* $d' \in D_1$, $\exists\, \alpha \neq 0$ *tel que*: $\alpha \cdot d < d'$.

**Lemme 3.** *La famille* $\{V(d)\}_{d \in D_1}$ *est la base d'un filtre de voisinages de l'origine dans l'espace vectoriel $E$. La topologie induite par ce filtre est compatible avec la structure d'espace vectoriel.*

*Démonstration.* La démonstration pour les groupes abéliens a prouvé que $\{V(d)\}$ est la base d'un filtre de voisinages et que $\forall\, V(d)$, $\exists\, V(d')$ tel que $V(d') + V(d') \subset V(d')$. Soit $|\alpha| \leqslant 1$ et un $V(d)$ quelconque. Alors $x \in V(d)$ implique:

$$||\alpha \cdot x|| = |\alpha| \cdot ||x|| < |\alpha| \cdot d < 1 \cdot d = d,$$

donc $\alpha \cdot V(d) \subset V(d)$. D'après (E4) pour chaque $x \in E$ il y a $\alpha \neq 0$ tel que $\alpha \cdot ||x|| < d$, donc $||\alpha \cdot x|| < d$, ou $\alpha \cdot x \in V(d)$. Enfin, de (D3) il résulte que pour tous les $V(d)$ et $\alpha \neq 0$ on a $\alpha \cdot V(d) = V(|\alpha| \cdot d)$.

Réciproquement:

**Lemme 4.** *Pour chaque espace vectoriel topologique, il existe au moins une pseudonorme qui induise une topologie équivalente.*

*Démonstration.* Définissons l'ensemble $D$, l'ordre et l'opération $(+)$ comme pour les groupes abéliens. Si $A \in D$, posons $\alpha \cdot A = \{\alpha \cdot x : x \in A\}$. Notons $D_1$ l'ensemble des voisinages équilibrés de l'origine. Grâce au théorème 1, il suffit de prouver que les propriétés (D3)—(D6) sont vérifiées. Soit $\alpha > 0$ et $A$ un voisinage équilibré de l'origine donc $\alpha \cdot D_1 \subset \subset D_1$. Si $A \subset B$, alors $\alpha \cdot A \subset \alpha \cdot B$, pour toutes les parties $A$, $B$ de $E$ et pour $\alpha \geqslant 0$. La relation $1 \cdot A = A$ est immédiate. Enfin, si $A$ est équilibré et $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$, alors $\alpha \cdot A \subset \beta \cdot A$. Définissons la pseudonorme par:

$$||x|| = \{\varepsilon \cdot x : |\varepsilon| = 1\} \cup \{0\}.$$

Il est évident que $||x|| = \{0\} \Longleftrightarrow x = 0$. Puis:

$$||\alpha \cdot x|| = \{\varepsilon\, \alpha\, x : |\varepsilon| = 1\} \cup \{0\} = \{|\alpha|\, \varepsilon\, x : |\varepsilon| = 1\} \cup \{0\} =$$

$$= |\alpha| \cdot \{\varepsilon\, x : |\varepsilon| = 1\} \cup \{0\} = |\alpha| \cdot ||x||.$$

Par calcul, on vérifie aussi:

$$||x|| + ||y|| = \{\varepsilon \cdot x : |\varepsilon| = 1\} \cup \{0\} + \{\varepsilon \cdot y : |\varepsilon| = 1\} \cup \{0\} \supset$$

$$\supset \{\varepsilon \cdot (x + y) : |\varepsilon| = 1\} \cup \{0\} = ||x + y||.$$

Soit $d \in ||E||$, donc $d = \{\varepsilon \cdot x : |\varepsilon| = 1\} \cup \{0\}$, où $x \in E$. Mais, pour chaque voisinage équilibré $A$ de l'origine et pour chaque $x \in E$, on trouve $\alpha \neq 0$ tel que $\alpha \cdot x \in A$; $A$ étant équilibré, pour tout $|\varepsilon| = 1$ on a $\varepsilon\, \alpha\, x \in \in A$ donc $\alpha \cdot d \subset A$, q.e.d.

Les deux lemmes précédents prouvent le :

**Théorème 2.** *Une topologie sur un espace vectoriel $E$ est compatible avec la structure algébrique si et seulement s'il existe une pseudonorme qui induise la même topologie.*

Considérons maintenant une pseudonorme qui satisfasse à la propriété :

(D7) $$\forall\, d \in D_1 \quad \alpha \cdot d + \beta \cdot d < (\alpha + \beta) \cdot d \quad \text{où } \alpha, \beta \in R_+ .$$

Soit $x, y \in V(d)$ et $\lambda \in [0,1]$. Alors :

$$\|\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y\| < \|\lambda \cdot x\| + \|(1-\lambda) \cdot y\| = \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\| < \\ < \lambda d + (1-\lambda) d < 1 \cdot d = d ;$$

donc $\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y \in V(d)$, ce qui prouve que $V(d)$ est un voisinage convexe. Comme $V(d)$ est toujours équilibré, il résulte que la topologie induite est localement convexe. Réciproquement, prenons dans la construction du lemme 4, à la place de $D_1$, l'ensemble des voisinages équilibrés et convexes de l'origine ($E$ localement convexe). On a donc : $\frac{\alpha}{\alpha+\beta} A + \frac{\beta}{\alpha+\beta} A \subset A$ (si $\alpha + \beta \neq 0$), donc $\alpha A + \beta A \subset (\alpha + \beta) \cdot A$. Mais $\alpha + \beta = 0$ implique $\alpha = \beta = 0$, donc la relation est vraie pour tous les $\alpha$, $\beta \in R_+$. Ces considérations prouvent le :

**Théorème 3.** *Une topologie sur un espace vectoriel est localement convexe si et seulement s'il existe une pseudonorme qui satisfasse la condition* (D7) *et induise la même topologie.*

Nous allons maintenant indiquer une condition nécessaire et suffisante de normabilité, qui n'est d'ailleurs qu'une simple transposition du théorème de Kolmogoroff. A ce but nous introduisons le définition :

*Un sous-ensemble $B \subset D_1$ est nommé base, si la famille $\{B(x, d)\}_{d \in D_1}$ (ou bien $\{V(d)\}_{d \in D_1}$) est une base pour le filtre des voisinages de $x$ (de 0).*

**Théorème 4.** *Soit $E$ un espace vectoriel localement convexe et Hausdorff pour la topologie induite par la pseudonorme $\|\cdot\| : E \to D$. Alors les deux affirmations suivantes sont équivalentes :*

a) *$E$ est normable ;*

b) *On trouve une base $B$ telle que :*

$$\forall\, d', d'' \in B \quad \exists\, \alpha > 0 \text{ tel que } \alpha \cdot d' = d''.$$

Nous indiquons maintenant comment on peut transposer la notion de $\mathfrak{S}$-convergence dans le langage de la pseudométrique. Soit $X$ un ensemble, $Y$ un espace pseudométrique et $\rho : Y \times Y \to D$ la pseudométrique. Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble des parties de $X$ tel que :



($F'_{II}$) $$A, B \in \mathfrak{S} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{S}.$$

Supposons de plus qu'il existe $\omega \in D$ tel que $d < \omega$, $\forall\, d \in D$ et $\omega + d = \omega$. Considérons l'ensemble des applications : $D^X$. Si $f, g \in D^X$ notons $f < g$ si, et seulement si $f(x) < g(x)$, $\forall\, x \in X$, et définissons $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$. Pour l'ordre introduit, l'application constante $f_0(x) = d_0$ est le plus petit élément. On vérifie aisément que $f < g \Rightarrow f+h < g+h$ et $h+f < h+g$. Soit $d \in D_1$ et $A \in \mathfrak{S}$. Nous noterons par $d_A$ l'application définie par :

$$d_A(x) = \begin{cases} d & \text{si } x \in A, \\ \omega & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Utilisant ($F'_{II}$) on vérifie immédiatement que le sous-ensemble

$$D_1^X = \{d_A : d \in D_1, A \in \mathfrak{S}\}$$

est filtrant à gauche et vérifie la condition (D2). Si nous définissons maintenant une pseudométrique $\hat{\rho} : \mathcal{F}(X, Y) \times \mathcal{F}(X, Y) \to D^X$ (où $\mathcal{F}(X, Y)$ est l'ensemble des applications $X \to Y$) par $[\hat{\rho}(f,g)](x) = \rho[f(x), g(x)]$, alors :

**Théorème 5.** *La structure uniforme (et à fortiori la topologie) induite par la pseudométrique $\hat{\rho}$ sur $\mathcal{F}(X, Y)$ coïncide avec la structure de $\mathfrak{S}$-convergence.*

Si $Y$ est un espace pseudonormé, alors on introduit sur $\mathcal{F}(X, Y)$ une pseudonorme par $(\|f\|)(x) = \|f(x)\|$. Mais quand $\mathcal{F}(X, Y)$ est muni en plus d'une structure algébrique la topologie n'est pas nécessairement compatible avec cette structure, e.g. si $Y$ est un espace vectoriel pseudonormé, la pseudonorme ne vérifie généralement pas la condition (E4). Cette condition est vérifiée si et seulement si pour chaque $f \in \mathcal{F}(X, Y)$ et $A \in \mathfrak{S}$ l'ensemble $f(A) \subset Y$ est borné. On tombe ainsi sur un résultat bien connu.

Enfin, nous allons construire la limite projective d'une famille de pseudométriques. Soit $\{X_i\}_{i \in I}$ une famille d'espaces pseudométriques, $\rho_i : X_i \times X_i \to D_i$ étant leurs pseudométriques. Soit $X$ un ensemble et $f_i$ une application $f_i : X \to X_i$. On définit sur l'ensemble $\underset{i \in I}{\times} D_i$ un ordre et une opération $(d_i) + (d'_i)$ de façon évidente. Si $D_{1i} \subset D_i$ sont les ensembles „$D_1$", nous définissons un sous-ensemble $D_1 \subset \underset{i \in I}{\times} D_i$ par :

$$D_1 = \{(d_i) : d_i \in D_{1i}\ \forall\, i \in J ;\ d_i = \omega, \forall\, i \notin J, J \in \mathfrak{J}\}$$

où $\mathfrak{J}$ est l'ensemble des parties finies de $I$. On vérifie sans difficulté que la pseudométrique $\rho : X \times X \to \underset{i \in I}{\times} D_i$, définie par : $\rho(x, y) = \{\rho_i[f_i(x), f_i(y)]\}_{i \in I}$ induit sur $X$ l'uniformité limite projective (l'uniformité initiale d'après [1]). En particulier, on en déduit la construction d'une pseudométrique sur un espace produit, limite inverse, borne supérieure. On a des résultats analogues si on remplace le mot pseudométrique par pseudonorme.

BIBLIOGRAPHIE

1. Bourbaki N. — *Topologie générale*. Livre III, ch. 2, Act. Sci. Ind. Hermann, C-ie, Paris, 1965.

2. Gheorghiu N. — *Teorema contracțiilor în spații uniforme*. St. și cerc. matem., Acad. R.S.R. 19 (1967), 119—122.

3. Kurepa D. — *Tableaux ramifiés d'ensembles. Espaces pseudo-distanciés*, C.R., 198 (1934), 1563—1565.

4. Kurepa D. — *Sur l'écart abstrait*, Glasnic Mat. Fiz. 11, Zagreb, (1956), 105—131.

5. Popa E. — *O caracterizare a spațiilor uniforme*. Studii și cerc. matem., Acad. R.S.R. 19 (1967), 1299—1301.



SPAȚII PSEUDOMETRICE ȘI PSEUDONORMATE

Rezumat

În Nota de față, pe baza rezultatelor din [5], se indică modul de introducere a unor noțiuni analoge normei, pe grupuri și spații vectoriale. Cu ajutorul noțiunii de pseudonormă de grup (definiția 2) se indică o caracterizare a topologiilor compatibile cu structura de grup abelian (teorema 3) și cu structura de grup (teorema 3').

Cu definiția 3 se introduce noțiunea de pseudonormă pe un spațiu vectorial și se indică apoi caracterizări ale topologiilor compatibile cu structura de spațiu vectorial (teorema 6), ale topologiilor local convexe (teorema 7) și ale topologiilor normale (teorema 8). Se indică în încheiere, ca aplicație, transpunerea în limbajul pseudometricii (pseudonormei) a $\mathfrak{S}$-convergenței.


# ASUPRA UNOR TEOREME DE PUNCT FIX ÎN SPAȚII UNIFORME COMPLETE


DE

STEFAN I. NICZKY


**1.** Fie $X$ un spațiu uniform, secvențial complet și separat. Fie $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ o familie suficientă de semimetrici, care generează topologia lui $X$ [1], iar $A$ familia de indici corespunzătoare familiei de semimetrici.

Fie $T$ un operator care aplică $X$ în el însuși și o funcție $\varphi : A \to A$. În cele ce urmează vom admite că pentru orice $\alpha$ din $A$ există două funcționale nenegative $p_\alpha$ și $q_\alpha$ definite pe $X \times X$, astfel ca

$$\rho_\alpha(Tx, Ty) \leqq q_\alpha(x, y)\,\{\rho_{\varphi(\alpha)}(x, y)\}^{p_\alpha(x, y)}. \tag{1}$$

**Definiția 1.** *Un punct $x^*$ din $X$ este un punct fix pentru operatorul $T$, dacă verifică egalitatea*

$$x^* = Tx^*. \tag{2}$$

**Teorema 1.** *Dacă pentru orice $\alpha$ din $A$ seria*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{n,\alpha} \tag{3}$$

*unde*

$$u_{1,\alpha} = q_\alpha(x_1, x_0)\,\{\rho_{\varphi(\alpha)}(x_1, x_0)\}^{p_\alpha(x_1, x_0)}, \tag{4}$$

$$u_{2,\alpha} = q_\alpha(x_2, x_1)\cdot\{q_{\varphi(\alpha)}(x_1, x_0)\}^{p_\alpha(x_2, x_1)\cdot p_{\varphi(\alpha)}(x_1, x_0)}, \tag{5}$$

*și respectiv*

$$u_{n,\alpha} = q_\alpha(x_n, x_{n-1})\;\{q_{\varphi(\alpha)}(x_{n-1}, x_{n-2})\}^{p_\alpha(x_n, x_{n-1})}\cdot \prod_{i=1}^{n-2}\{q_{\varphi^{(n-i)}(\alpha)}(x_i, x_{i-1})\}^{p_\alpha(x_n, x_{n-1})\prod_{k=i+1}^{n} p_{\varphi^{(n-k)}(\alpha)}(x_k, x_{k-1})}. \tag{6}$$