BIBLIOGRAPHIE

1. Bourbaki N. — *Topologie générale*. Livre III, ch. 2, Act. Sci. Ind. Hermann, C-ie, Paris, 1965.

2. Gheorghiu N. — *Teorema contracţiilor în spaţii uniforme*. St. şi cerc. matem., Acad. R.S.R. 19 (1967), 119—122.

3. Kurepa D. — *Tableaux ramifiés d'ensembles. Espaces pseudo-distanciés*. C.R., 198 (1934), 1563—1565.

4. Kurepa D. — *Sur l'écart abstrait*, Glasnik Mat. Fiz. 11, Zagreb, (1956), 105—134.

5. Popa E. — *O caracterizare a spaţiilor uniforme*. Studii şi cerc. matem., Acad. R.S.R. 19 (1967), 1299—1301.

SPAŢII PSEUDOMETRICE ŞI PSEUDONORMATE

Rezumat

În Nota de faţă, pe baza rezultatelor din [5], se indică modul de introducere a unor noţiuni analoge normei, pe grupuri şi spaţii vectoriale. Cu ajutorul noţiunii de pseudonormă de grup (definiţia 2) se indică o caracterizare a topologiilor compatibile cu structura de grup abelian (teorema 3) şi cu structura de grup (teorema 3').

Cu definiţia 3 se introduce noţiunea de pseudonormă pe un spaţiu vectorial şi se indică apoi caracterizări ale topologiilor compatibile cu structura de spaţiu vectorial (teorema 6), ale topologiilor local convexe (teorema 7) şi ale topologiilor normale (teorema 8). Se indică în încheiere, ca aplicaţie, transpunerea în limbajul pseudometricii (pseudonormei) a $\mathfrak{S}$-convergenţei.

ASUPRA UNOR TEOREME DE PUNCT FIX ÎN SPAŢII UNIFORME COMPLETE

DE

ŞTEFAN I. NICZKY

1. Fie X un spaţiu uniform, secvenţial complet şi separat. Fie $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ o familie suficientă de semimetrici, care generează topologia lui X [1], iar A familia de indici corespunzătoare familiei de semimetrici.

Fie T un operator care aplică X în el însuşi şi o funcţie $\varphi : A \to A$. În cele ce urmează vom admite că pentru orice α din A există două funcţionale nenegative p_α şi q_α definite pe $X \times X$, astfel ca

$$\rho_\alpha(Tx, Ty) \leqq q_\alpha(x, y)\,\{\rho_{\varphi(\alpha)}(x, y)\}^{p_\alpha(x, y)}. \tag{1}$$

Definiţia 1. *Un punct x^* din X este un punct fix pentru operatorul T, dacă verifică egalitatea*

$$x^* = Tx^*. \tag{2}$$

Teorema 1. *Dacă pentru orice α din A seria*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{n,\alpha} \tag{3}$$

unde

$$u_{1,\alpha} = q_\alpha(x_1, x_0)\,\{\rho_{\varphi(\alpha)}(x_1, x_0)\}^{p_\alpha(x_1, x_0)}, \tag{4}$$

$$u_{2,\alpha} = q_\alpha(x_2, x_1)\cdot\{q_{\varphi(\alpha)}(x_1, x_0)\}^{p_\alpha(x_2, x_1)\cdot p_{\varphi(\alpha)}(x_1, x_0)}, \tag{5}$$

şi respectiv

$$u_{n,\alpha} = q_\alpha(x_n, x_{n-1})\,\{q_{\varphi(\alpha)}(x_{n-1}, x_{n-2})\}^{p_\alpha(x_n, x_{n-1})}\cdot \tag{6}$$

$$\prod_{i=1}^{n-2}\{q_{\varphi^{(n-i)}(\alpha)}(x_i, x_{i-1})\}^{p_\alpha(x_n, x_{n-1})\prod_{k=i+1}^{n} p_{\varphi^{(n-k)}(\alpha)}(x_k, x_{k-1})}\cdot$$

$$\{\cdot\ \rho_{\varphi^{(n)}_{(\alpha)}}(x_1, x_0)\}^{p_\alpha(x_n, x_{n-1})} \prod_{k=1}^{n-1} p_{\varphi^{(n-k)}_{(\alpha)}}(x_k, x_{k-1}),$$

cu $\varphi^{(0)}_{(\alpha)} = \alpha$, *iar* $\varphi^{(n+1)}_{(\alpha)} = \varphi(\varphi^{(n)}_{(\alpha)})$ *pentru* $n = 0, 1, 2, \ldots$, *sînt convergente, atunci există un punct fix* x^*, *care este limita şirului*

$$x_{n+1} = Tx_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{7}$$

cu x_0 *din* X.

Dacă în plus pentru orice x *şi* y *seriile din* X

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_{n,\alpha}, \tag{8}$$

unde

$$v_{1,\alpha} = q_\alpha(x, y) \cdot \rho_{\varphi(\alpha)}(x, y)^{p_\alpha(x,y)}, \tag{9}$$

$$v_{n,\alpha} = q_\alpha(x, y) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} q_{\varphi^{(i)}_{(\alpha)}}(x, y) \prod_{k=0}^{i-1} p_{\varphi^{(k)}_{(\alpha)}}(x,y) \tag{10}$$

$$\rho_{\varphi^{(n+1)}_{(\alpha)}}(x, y) \prod_{i=1}^{n} p_{\varphi^{(i)}_{(\alpha)}}(x, y)$$

sînt convergente, atunci punctul fix este unic.

Eroarea ce se comite cînd x^* *este înlocuit de* x_n *este dată de*

$$R_{n,\alpha} = \sum_{k=n}^{\infty} u_{k,\alpha} \tag{11}$$

Demonstraţie. Fie x_0 din X şi iteraţia (7). Din (1) prin inducţie completă rezultă

$$u_{n+1,\alpha} = \rho_\alpha(x_{n+2}, x_{n+1}) \leqq q_\alpha(x_{n+1}, x_n) \cdot q_{\varphi(\alpha)}(x_n, x_{n-1})^{p_\alpha(x_{n+1}, x_n)}. \tag{12}$$

$$\prod_{i=1}^{n-1} \{q_{\varphi^{(n+1-i)}_{(\alpha)}}(x_i, x_{i-1})\}^{p_\alpha(x_{n+1}, x_n)} \cdot \prod_{k=i+1}^{n} p_{\varphi^{(n-k+1)}_{(\alpha)}}(x_k, x_{k-1})$$

$$\{\rho_{\varphi^{(n)}_{(\alpha)}}(x_1, x_0)\}^{p_\alpha(x_{n+1}, x_n)} \cdot \prod_{i=1}^{n} p_{\varphi^{(n+1-i)}_{(\alpha)}}(x_i, x_{i-1}) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

şi în baza inegalităţii triunghiulare:

$$\rho_\alpha(x_{m+1}, x_n) \leqq R_{n,\alpha} \qquad (n = 1, 2, \ldots; \alpha \in A) \tag{13}$$

şi deci din ipoteze, şirul $\{x_n\}$ este un şir Cauchy şi deci există

$$x^* = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

Pentru a arăta că x^* este un punct fix al lui T se va utiliza (1) şi deci

$$\rho_\alpha(x^*, T(x^*)) \leqq \rho_\alpha(x^*, x_n) + q_\alpha(x^*, x_n) \cdot \rho_{\varphi(\alpha)}(x^*, x_n)^{p_\alpha(x^*, x_n)},$$

adică $\rho_\alpha(x^*, T(x^*)) = 0$ deci are loc (2).

Pentru unicitate se presupune existenţa unui punct $x^{**} \in X$, astfel ca

$$x^{**} = Tx^{**}$$

şi aplicînd (1) rezultă

$$\rho_\alpha(x^*, x^{**}) \leqq q_\alpha(x^*, x^{**}) \prod_{i=1}^{n} \{q_{\varphi^{(i)}_{(\alpha)}}(x^*, x^{**})\}^{\prod_{k=0}^{i-1} p_{\varphi^{(k)}_{(\alpha)}}(x^*, x^{**})} \cdot$$

$$\cdot \{\rho_{\varphi^{(n+1)}_{(\alpha)}}(x^*, x^{**})\}^{\prod_{i=0}^{n} p_{\varphi^{(i)}_{(\alpha)}}(x^*, x^{**})},$$

iar din convergenţa seriei (8) rezultă $x^* = x^{**}$, deci punctul fix x^* este unic.

Observaţia 1. Considerînd $p_\alpha(x, y) = 1$ şi $q_\alpha(x, y) = \text{const} > 0$ se obţin din rezultatele de mai sus rezultatele lui N. Gheorghiu [2].

Observaţia 2. Aplicînd diferite criterii de convergenţă pentru seriile cu termeni pozitivi (3)—(6), respectiv (8)—(10) se obţin diferite teoreme de punct fix. În cele ce urmează se poate considera că seriile mai sus menţionate sînt cu termeni pozitivi.

2. Teorema 2 *În ipoteza* (1), *dacă pentru orice* α *din* A *există două şiruri de numere pozitive* $\{a_n^\alpha\}$ *şi* $\{b_n^\alpha\}$ *şi două perechi de numere pozitive* N_α *şi* λ_α *respectiv* M_α *şi* μ_α *unde* N_α *şi* M_α *sînt numere întregi astfel ca*

$$\frac{1}{u_{n+k,\alpha}} s^\alpha_{k,n} \geqq \lambda_\alpha > 0, \tag{14}$$

$$s^\alpha_{k-1,n} > 0, \tag{15}$$

şi respectiv

$$\frac{1}{v_{w+m,\alpha}} t^\alpha_{w,m} \geqq \mu_\alpha > 0, \tag{16}$$

$$t^\alpha_{w-1,m} > 0, \tag{17}$$

unde

$$S^\alpha_{k,n} = a^\alpha_n u_{n,\alpha} - C^1_k a^\alpha_{n+1} u_{n+1,\alpha} + \cdots + (-1)^k C^k_k u_{n+k,\alpha} a^\alpha_{n+k}, \tag{18}$$

şi respectiv

(19) $$t^{\alpha}_{w,m} = b^{\alpha}_{m} v_{m,\alpha} - C^{1}_{w} b^{\alpha}_{m+1} v_{m+1,\alpha} + \dots + (-1)^{w} C^{w}_{w} b^{\alpha}_{m+w} v_{m+w,\alpha},$$

cu $n, m, k, w = 0, 1, 2, \dots$, atunci există un singur punct fix x^* pentru operatorul T, care este punct limită pentru şirul (7).

Pentru evaluarea erorii de ordinul n se poate utiliza

(20) $$\mathcal{R}_{n,\alpha} = \frac{S^{\alpha}_{k-1,n} - S^{\alpha}}{v^{\alpha}}$$

unde $S^{\alpha} = \lim\limits_{n\to\infty} S^{\alpha}_{k-1,n}$, *iar* $v^{\alpha} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{S^{\alpha}_{k-1,n}}{u_{n+k,\alpha}}$.

Demonstraţie. Se arată [5] că din (14)—(15) rezultă

$$S^{\alpha}_{k-1,n} - S^{\alpha}_{k-1,n+1} = S^{\alpha}_{k,n} \geqq \mu_{\alpha} u_{n+k,\alpha},$$

adică

$$S^{\alpha}_{k-1,n} - S^{\alpha}_{k-1,n+1} > 0,$$

şi deci şirul $\{S^{\alpha}_{k-1,n}\}$ este un şir numeric monoton, descrescător şi mărginit, deci există

$$S^{\alpha} = \lim_{n\to\infty} S^{\alpha}_{k-1,n}$$

şi din (20)

$$\sum_{n=1}^{\infty} S^{\alpha}_{k,n} = S^{\alpha}_{k-1,1} - S^{\alpha},$$

iar din (14) rezultă

$$u^{\alpha}_{n+k} \leqq \frac{1}{\lambda_{\alpha}} S^{\alpha}_{k,n}$$

şi din criteriul comparaţiei urmează că seriile (3)—(6) sînt convergente şi în baza teoremei 1 există un punct fix x^* pentru operatorul T.

Pentru evaluarea (20) a erorii de ordinul n se va utiliza:

Definiţia 2. [3] *$\mathcal{R}_{n,\alpha}$ este o expresie asimptotică a restului seriei (3), dacă au loc relaţiile*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{R}_{n,\alpha} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{R}_{n,\alpha} - \mathcal{R}_{n+1,\alpha}}{u_{n+1,\alpha}} = 1.$$

Se arată că în acest caz [5].

$$\mathcal{R}_{n,\alpha} = \mathcal{R}_{n,\alpha} + \sum_{k=n}^{\infty} \left(1 - \frac{\mathcal{R}_{k,\alpha} - \mathcal{R}_{k+1,\alpha}}{u_{k+1,\alpha}}\right),$$

adică pentru n suficient de mare, $\mathcal{R}_{n,\alpha}$ este aproximat suficient de bine prin $\mathcal{R}_{n,\alpha}$.

Este evident că (14) este echivalentă cu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_{n+k,\alpha}} S^{\alpha}_{k,n} = v^{\alpha} = \text{const.} > 0,$$

şi din (20) rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S^{\alpha}_{k-1,n} - S^{\alpha}}{v^{\alpha}} = 0,$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{S^{\alpha}_{k-1,n} - S^{\alpha}}{v^{\alpha}} - \dfrac{S^{\alpha}_{k-1,n+1} - S^{\alpha}}{v^{\alpha}}}{u_{n+k,\alpha}} = 1,$$

de unde rezultă că $\mathcal{R}_{n,\alpha}$, dat de (20) satisface definiţia 1.

Din teorema 2 rezultă pentru $k = 1$

Teorema 3. *Dacă în ipoteza (1) pentru orice serie din (3)—(6) şi (8)—(10) există două şiruri de numere pozitive $\{a^{\alpha}_{n}\}$ şi $\{b^{\alpha}_{n}\}$ şi două perechi de numere pozitive N_{α} şi λ_{α}, respectiv M_{α} şi μ_{α} cu N_{α} şi M_{α} întregi astfel ca*

(22) $$a^{\alpha}_{n} \frac{u_{n,\alpha}}{u_{n+1,\alpha}} - a^{\alpha}_{n+1} \geqq \lambda_{\alpha} > 0, \qquad (n > N_{\alpha})$$

şi respectiv

(23) $$b^{\alpha}_{m} \frac{v_{m,\alpha}}{v_{m+1,\alpha}} - b^{\alpha}_{m+1} \geqq \mu_{\alpha} > 0, \qquad (m > M_{\alpha})$$

unde $u_{n,\alpha}$ şi respectiv $v_{m,\alpha}$ sînt date de (3)—(6) şi respectiv (8)—(10), atunci punctul fix x^* există, este unic şi este limita şirului (7).

Pentru evaluarea erorii de ordinul n se poate utiliza

(24) $$\mathcal{R}_{n,\alpha} = \frac{a^{\alpha}_{n} u_{n,\alpha} - \lim\limits_{n\to\infty} a^{\alpha}_{n} u_{n,\alpha}}{\lambda_{\alpha}} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

În particular luînd şirurile $\{a^{\alpha}_{n}\}$ şi $\{b^{\alpha}_{n}\}$ ca şiruri constante rezultă

Teorema 4. *Dacă în ipoteza (1) şirul rapoartelor lui d'Alembert pentru seriile de mai sus satisface relaţia*

$$\frac{u_{n+1,\alpha}}{u_{n,\alpha}} \leqq \lambda_{\alpha} < 1. \qquad (n > N_{\alpha})$$

şi

$$\frac{v_{m+1,\alpha}}{v_{m,\alpha}} \leqq \mu_\alpha < 1, \qquad (m > M_\alpha)$$

unde λ_α *şi* μ_α *sînt două constante pozitive, iar* N_α *şi* M_α *sînt doi întregi pozitivi, atunci există un punct fix unic* x^* *pentru* T, *care este limita lui* (7).

Pentru evaluarea erorii ce se comite cînd x^* *este înlocuit de* x_n *se utilizează*

$$\rho_\alpha\,(x^*, x_n) \leqq \frac{u_{n,\alpha}}{1-\lambda_\alpha}. \qquad (n > N_\alpha\,,\ \alpha \in A).$$

Corolar 1. *Pentru cazul* $p_\alpha\,(x,y) = 1$ *şi* $q_\alpha\,(x, y) = \text{const} > 0$ *rezultă din cele de mai sus: dacă* $q_{\varphi(\alpha)}^{(n)}$ *unde* n *este un număr natural satisface relaţia*

$$q_{\varphi(\alpha)}^{(n)} < 1$$

atunci există un punct fix x^* *pentru operatorul* T, *care este punct limită pentru şirul* (7).

Corolar 2. *Pentru cazul* $p_\alpha\,(x,y) = 1$ *şi* $q_\alpha\,(x, y) = \text{const.} > 0$ *rezultă din cele de mai sus: dacă* $q_{\varphi(\alpha)}^{(n)}$ *unde* n *este un număr natural, care satisface relaţia*

$$\prod_{i=0}^{n} q_{\varphi(\alpha)}^{(i)} \cdot \rho_{\varphi(\alpha)}(x_1, x_0) \prod_{k=0}^{i} p_{\varphi(\alpha)}^{(k)-1} < 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

atunci au loc condiţiile teoremei 3.

Pentru evaluarea erorii în acest caz se poate utiliza

$$\rho\,(x^*, x_n) \leqq \sum_{m=d}^{\infty} \prod_{i=0}^{n} q_{\varphi(\alpha)}^{(i)} (x_1\,, x_0) \prod_{k=0}^{i} p_{\varphi(\alpha)}^{(k)}\,.$$

Pe baza rezultatelor lui N e y [5], teorema 4 se mai poate extinde astfel:

Teorema 5. *Dacă în locul ipotezelor teoremei* 4 *şirurile d'Alembert au un număr finit de puncte de acumulare* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *şi respectiv* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_t$ *adică,*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{u_{kt+r+1}}{u_{kt+v}} = \lambda_v\,,$$

şi

$$\lim_{f \to \infty} \frac{v_{sf-w+1}}{v_{sf+w}} = \mu_w\,,$$

unde r, t, k *şi* s, f, w *sînt întregi pozitivi astfel ca* $1 \leqq r \leqq k$, $1 \leqq w \leqq s$, $t = 0, 1, f = 0, 1, 2, \ldots$, *iar*

$$\alpha_1\,, \alpha_2, \ldots \alpha_k < 1,$$

şi respectiv

$$\mu_1\,, \mu_2, \ldots, \mu_s < 1,$$

atunci încă concluziile teoremei 4 *rămîn valabile.*

Pentru evaluarea erorii se poate utiliza

$$\mathcal{R}_{n,\alpha} = \frac{u_{0,\alpha} \cdot \lambda_\alpha^{\left[\frac{n}{k}\right]}}{1-\lambda_\alpha} \left(n - \left[\frac{n}{k}\right] k\right) \max_{1 \leqq i \leqq k} \alpha_i \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

unde $\left[\frac{n}{k}\right]$ *este partea întreagă a raportului* r/k.

BIBLIOGRAFIE

1. B o u r b a k i N. — *Topologie générale*. Livre III. *Utilisation des nombres réels en topologie générale*. Ed. Herman, Paris 1954.
2. G h e o r g h i u N. — *Teoreme de contracţie în spaţii uniforme*. St. şi cerc. mat., 1967, 1, p. 119—123.
3. N e y A. — *O formulă asimptotică generală a restului seriilor cu termeni pozitivi*. St. şi cerc. mat. Cluj, 1961, p. 315—322.
4. — *Extinderea domeniului de aplicabilitate a criteriului lui d'Alembert*, Gaz. mat. şi fiz., Seria A, 1958, 2, p. 709—712.
5. R o ş c u l e ţ M. — *Un criteriu de convergenţă pentru serii cu termeni pozitivi*. St. şi cerc. mat., 1967, 1, p. 9—13.

SUR QUELQUES THÉORÈMES DE POINT FIXE DANS DES ESPACES UNIFORMES COMPLETS

Résumé

Dans cette Note on étudie l'extension de quelques théorèmes de contraction pour des espaces complets par suites, séparés et uniformes. En particularisant les résultats on obtient des théorèmes analogues pour des espaces métriques et localement convexes.