MOUVEMENTS BAROTROPES NON-STATIONNAIRES D'UN FLUIDE IDÉAL

PAR

CONST. ACKER

Dans les travaux de Gh. Gheorghiev [5], [6], on considère des mouvements polytropiques d'un fluide idéal ayant associée une variété (W) de l'espace euclidien à trois dimensions, définie par un champ vectoriel stationnaire orthogonal au champ des vitesses. Il paraît que c'est pour la première fois que fut considéré le cas d'une la variété (W) de l'espace E_3 anholonôme.

Dans la Note présente nous considérons plus généralement le mouvement barotrope d'un fluide idéal, l'équation de l'état ayant la forme

$$F(\tilde{p}, \tilde{\rho}) = 0,$$

en supposant seulement accomplie la condition locale

$$\frac{\partial F}{\partial \tilde{p}^i} \neq 0.$$

Le champ des forces massiques (Φ) sera quelconque.

1. L'existence des mouvements barotropes non-stationnaires d'un fluide idéal, ayant associée une variété de l'espace E_3 définie par un champ orthogonal au champ des vitesses

En utilisant la méthode de Gh. Gheorghiev, attachons à la variété (W) de l'espace E_3 un repère local triorthogonal $T(J_1, J_2, J_3)$ tel que J_2 soit normal à (W), J_3 étant le vecteur unité de la normale principale de la trajectoire orthogonale de (W). Si M est l'origine de ce repère, la variation de T sera donnée par

$$dM = \omega^i J_i, \quad dJ_i = \Omega \times J_i,$$

où

$$\Omega = \pi J_1 + \varkappa J_2 + \rho J_3, \ \pi = \pi_i \tilde{\omega}^i, \ \varkappa = \varkappa_i \tilde{\omega}^i, \ \rho = \rho_i \tilde{\omega}^i.$$

Un autre repère local triorthogonal $T_1(I_1, I_2, I_3)$ ayant la même origine M sera attaché au mouvement tel que $I_2 = J_2$ et $I_3 = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ ($\mathbf{v}$ est le vecteur vitesse). La variation de ce repère est donnée par

$$dM = \omega^i I_i, \ dI_i = \omega \times I_i, \ (i = 1, 2, 3),$$

où

$$\omega = pI_1 + qI_2 + rI_3, \ p = p_i \omega^i + p_t\, dt, \ q = q_i\, \omega^i + q_t\, dt, \ r = r_i\, \omega^i + r_t\, dt.$$

Les relations entre les formes π, $\varkappa$, ρ et p, q, r, données dans [5] mettent en évidence la relation

$$q_t = \theta_t,$$

où $\theta(M, t)$ est l'angle entre I_3 et J_3, $(d\theta = \theta_i \omega^i + \theta_t\, dt)$.

Nous allons constituer un système d'équations (S) en rassemblant les conditions géométriques et mécaniques sous lesquelles se développe le mouvement; pour cela nous allons éliminer tout d'abord la pression $\tilde{p}$ des équations hydrodynamiques:

$$\mathbf{a} = \Phi - \frac{1}{\tilde{\rho}} \operatorname{grad} \tilde{p}, \quad \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \tilde{\rho} + \tilde{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \ \tilde{p} = f(\tilde{\rho}),$$

et puis les équations du mouvement et l'équation de la continuité seront écrites en utilisant les opérateurs „$(\mathbf{v} \cdot \nabla)$", „grad" et „div" sous la forme différentielle vectorielle donnée par S. Buscheguennce [1, 2] et par Gh. Gheorghiev (l'expression plus restreinte de ces opérateurs est présentée dans [4], [5]). Voici le système (S):

$$\text{(S)}\quad \begin{aligned}
&1)\ \rho_2 = r_2 \cos\theta - p_2 \sin\theta = 0,\\
&2)\ r_t = 0,\ p_t = 0,\\
&3)\ p = p_i\, \omega^i + p_t\, dt,\ q = q_i\, \omega^i + q_t\, dt,\ r = r_i\, \omega^i + r_t\, dt,\\
&4)\ v(q_t + v q_3) - \Phi_1 = -f' \frac{\tilde{\rho}_1}{\tilde{\rho}}, \qquad v = |\mathbf{v}|,\\
&5)\ v(p_t + v p_3) - \Phi_2 = -f' \frac{\tilde{\rho}_2}{\tilde{\rho}},\\
&6)\ v_t + v v_3 - \Phi_3 = -f' \frac{\tilde{\rho}_3}{\tilde{\rho}},
\end{aligned}$$

$$7)\ \tilde{\rho}_t + v\tilde{\rho}_3 + \tilde{\rho}\,[v_3 + v(q_1 - p_2)] = 0,$$

$$8)\ dv = v_i\, \omega^i + v_t\, dt,\ d\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_i\, \omega^i + \tilde{\rho}_t\, dt,\ d\theta = \theta_i\, \omega^i + \theta_t\, dt,\ q_t = \theta_t.$$

L'équation 1) de (S) est la conséquence de la canonisation du repère T, $(\rho_2 = 0)$, les équations 2) expriment le caractère stationnaire du vecteur unité I_2; les équations 3) expriment la liaison entre les fonctions inconnues p_i, q_i, r_i, p_t, q_t, r_t et les formes p, q, r; les équations 4)—6) sont les équations du mouvement obtenues par la projection de l'équation d'Euler sur les axes I_1, I_2, I_3; l'équation 7) est l'équation de la continuité; les équations 8) sont des relations entre les fonctions inconnues, qui doivent être rattachées aux équations précédentes.

Nous allons éliminer les fonctions r_t, p_t, q_t, nous allons différentier les relations finies de (S), nous allons fermer le système Pfaff obtenu et enfin nous allons éliminer les formes p, q, r. Nous obtenons alors un système (S') différentiel extérieur fermé du mouvement barotrope nonstationnaire tridimensionnel ayant associée une variété de l'espace E_3, définie par un champ orthogonal au champ des vitesses. Voici le système (S'):

$$\text{(S')}\quad \begin{aligned}
&1^*)\ \cos\theta \cdot dr_2 - \sin\theta \cdot dp_2 - (r_2 \sin\theta + p_2 \cos\theta)\, d\theta = 0,\\
&2^*)\ (\theta_t + 2vq_3)\, dv + v d\theta_t + v^2\, dq_3 - d\Phi_1 = \left(-f'' \frac{\tilde{\rho}_1}{\tilde{\rho}} + f' \frac{\tilde{\rho}_1}{\tilde{\rho}^2}\right) d\tilde{\rho} - f' \frac{d\tilde{\rho}_1}{\tilde{\rho}}\\
&3^*)\ 2\, vp_3\, dv + v^2\, dp_3 + d\Phi_2 = \left(f'' \frac{\tilde{\rho}_2}{\tilde{\rho}} - f' \frac{\tilde{\rho}_2}{\tilde{\rho}^2}\right) d\tilde{\rho} + f' \frac{d\tilde{\rho}_2}{\tilde{\rho}},\\
&4^*)\ dv_t + v_3\, dv + v\, dv_3 - d\Phi_3 = \left(-f'' \frac{\tilde{\rho}_3}{\tilde{\rho}} + f' \frac{\tilde{\rho}_3}{\tilde{\rho}^2}\right) d\tilde{\rho} - f' \frac{d\tilde{\rho}_3}{\tilde{\rho}},\\
&5^*)\ d\tilde{\rho}_t + [\tilde{\rho}_3 + \tilde{\rho}(q_1 - p_2)]\, dv + [v_3 + v(q_1 - p_2)]\, d\tilde{\rho} + v d\tilde{\rho}_3 +\\
&\qquad \tilde{\rho}\, dv_3 + v\tilde{\rho}\,(dq_1 - dp_2) = 0;\\
&6^*)\ dv = v_i\, \omega^i + v_t\, dt,\\
&7^*)\ d\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_i\, \omega^i + \tilde{\rho}_t\, dt,\\
&8^*)\ d\theta = \theta_i\, \omega^i + \theta_t\, dt,\\
&9^*)\ [dv_i, \omega^i] + [dv_t, dt] + v_1(-[\omega^2, r_i\, \omega^i] + [\omega^3, q_i\, \omega^i + \theta_t\, dt]) +\\
&\quad + v_2([\omega^1, r_i\, \omega_i] - [\omega^3, p_i\, \omega^i]) + v_3(-[\omega^1, q_i \omega^i + \theta_t\, dt] + [\omega^2, p_i\, \omega^i]) = 0,\\
&10^*)\ [d\tilde{\rho}_i, \omega^i] + [d\tilde{\rho}_t, dt] + \tilde{\rho}_1(\ldots) + \tilde{\rho}_2(\ldots) + \tilde{\rho}_3(\ldots) = 0,\\
&11^*)\ [d\theta_i, \omega^i] + [d\theta_t, dt] + \theta_1(\ldots) + \theta_2(\ldots) + \theta_3(\ldots) = 0,
\end{aligned}$$

$$12^*)\quad [dp_i,\ \omega_i] \ldots + p_1(\ldots) + p_2(\ldots) + p_3(\ldots) = [r_i\,\omega^i,\ q_i\,\omega^i + \theta_t\,dt],$$

$$13^*)\quad [dq_i,\ \omega^i] + [d\theta_t,\ dt] + q_1(\ldots) + q_2(\ldots) + q_3(\ldots) = [p_i\,\omega^i,\ r_i\,\omega^i],$$

$$14^*)\quad [dr_i,\ \omega^i] + r_1(\ldots) + r_2(\ldots) + r_3(\ldots) = [q_i\,\omega^i + \theta_t\,dt,\ p_i\,\omega^i].$$

Ci-dessus les formes ω^i, dt sont indépendantes et les formes dépendéntes sont les différentielles des 27 fonctions inconnues: dv, dv_i, dv_t, $d\tilde{\rho}$, $d\tilde{\rho}_i$, $d\tilde{\rho}_t$, $d\theta$, $d\theta_i$, $d\theta_t$ $d\Phi_i$, dp_i, dq_i, dr_i, $(i = 1, 2, 3)$. En cherchant les variétés intégrales à quatre dimensions, de (S'), sur lesquelles $[\omega^1, \omega^2, \omega^3, dt] \neq 0$ nous allons établir l'involution du système (S') en utilisant la condition suffisante d'involution donnée par E. Cartan ([3], p. 96; [4], p. 252). Les variétés intégrales à quatre dimensions que nous cherchons, représentent des mouvements barotropes non-stationnaires tridimensionnels ayant associée une variété de l'espace E_3, définie par un champ orthogonal au champ des vitesses.

Pour établir l'involution du système (S'), nous allons mettre en évidence la chaîne des éléments intégraux: $\mathcal{E}_1$ $(\omega^1 = \omega^2 = dt = 0,\ dv = v'_3\,\omega^3$, etc.). $\mathcal{E}_2$ $(\omega^2 = dt = 0,\ dv = v'_3\,\omega^3 + v'_1\,\omega^1$, etc.), $\mathcal{E}_3$ $(dt = 0,\ dv = v'_3\,\omega^3 + v'_1\,\omega^1 + v'_2\,\omega^2$, etc.), $\mathcal{E}_4$ $(dv = v'_i\,\omega^i + v'_t\,dt$, etc.).

L'élément intégral $\mathcal{E}_1$ peut être déterminé en présentant les paramètres r'_{23}, Φ'_{13}, Φ'_{23}, Φ'_{33}, $\tilde{\rho}_{t3}$, v'_3, $\tilde{\rho}'_3$, θ'_3 comme des fonctions des autres paramètres en utilisant les relations

$$1')\quad r'_{23}\cos\theta - p'_{23}\sin\theta - (r_2\sin\theta + p_2\cos\theta)\,\theta'_3 = 0,$$

$$2')\quad (\theta_t + 2vq_3)\,v'_3 + v\theta'_{t3} + v^2 q'_{33} - \Phi'_{13} = \left(-f''\frac{\tilde{\rho}_1}{\tilde{\rho}} + f'\frac{\tilde{\rho}_1}{\tilde{\rho}^2}\right)\tilde{\rho}'_3 - f'\frac{\tilde{\rho}'_{13}}{\tilde{\rho}},$$

$$3')\quad 2vp_3\,v'_3 + v^2 p'_{33} + \Phi'_{23} = \left(f''\frac{\tilde{\rho}_2}{\tilde{\rho}} - f'\frac{\tilde{\rho}_2}{\tilde{\rho}^2}\right)\tilde{\rho}'_3 + f'\frac{\tilde{\rho}'_{23}}{\tilde{\rho}},$$

$$4')\quad v_{t3} + v_3 v'_3 + v v'_{33} - \Phi'_{33} = \left(-f''\frac{\tilde{\rho}_3}{\tilde{\rho}} + f'\frac{\tilde{\rho}_3}{\tilde{\rho}^2}\right)\tilde{\rho}'_3 - f'\frac{\tilde{\rho}'_{33}}{\tilde{\rho}},$$

$$5')\quad \tilde{\rho}_{t3} + [\tilde{\rho}_3 + \tilde{\rho}(q_1 - p_2)]\,v'_3 + [v_3 + v(q_1 - p_2)]\,\tilde{\rho}'_3 + v\tilde{\rho}'_{33} + \rho v'_{33} + v\tilde{\rho}(q'_{13} - p'_{23}) = 0,$$

$$6')\quad v'_3 = v_3,\quad 7')\quad \tilde{\rho}'_3 = \tilde{\rho}_3,\quad 8')\quad \theta'_3 = \theta_3,$$

qui suivent de 1*) — 8*). Signalons les nombres caractéristiques $r_0 = 27$, $r_1 = 19$ et le caractère réduit $s_0 = r_0 - r_1 = 8$. L'élément intégral $\mathcal{E}_2$ peut être déterminé en présentant r'_{21}, Φ'_{11}, Φ'_{21}, Φ'_{31}, $\tilde{\rho}'_{t1}$, v'_1, $\tilde{\rho}'_1$, θ'_1, v'_{31}, $\tilde{\rho}'_{31}$, θ'_{31}, p'_{31}, q'_{31}, r'_{31}, comme des fonctions des autres paramètres en utilisant les relations

$$1'')\quad r'_{21}\cos\theta - p'_{21}\sin\theta - (r_2\sin\theta + p_2\cos\theta)\,\theta'_1 = 0,$$

$$2'')\quad (\theta_t + 2vq_3)\,v'_1 + v\theta'_{t1} + v^2 q'_{31} - \Phi'_{11} = \left(-f''\frac{\tilde{\rho}_1}{\tilde{\rho}} + f'\frac{\tilde{\rho}_1}{\tilde{\rho}^2}\right)\tilde{\rho}'_1 - f'\frac{\tilde{\rho}'_{11}}{\tilde{\rho}},$$

$$3'')\quad 2vp_3\,v'_1 + v^2 p'_{31} + \Phi'_{21} = \left(f''\frac{\tilde{\rho}_2}{\tilde{\rho}} - f'\frac{\tilde{\rho}_2}{\tilde{\rho}^2}\right)\tilde{\rho}'_1 + f'\frac{\tilde{\rho}'_{21}}{\tilde{\rho}},$$

$$4'')\quad v'_{t1} + v_3 v'_1 + v v'_{31} - \Phi'_{31} = \left(-f''\frac{\tilde{\rho}_3}{\tilde{\rho}} + f'\frac{\tilde{\rho}_3}{\tilde{\rho}^2}\right)\tilde{\rho}'_1 - f'\frac{\tilde{\rho}'_{31}}{\tilde{\rho}},$$

$$5'')\quad \tilde{\rho}'_{t1} + [\tilde{\rho}_3 + \tilde{\rho}(q_1 - p_2)]\,v'_1 + [v_3 + v(q_1 - p_2)]\,\tilde{\rho}'_1 + v\tilde{\rho}'_{31} + \rho v'_{31} + v\tilde{\rho}(q'_{11} - p'_{21}) = 0,$$

$$6'')\quad v'_1 = v_1,\qquad 7'')\quad \tilde{\rho}'_1 = \tilde{\rho}_1,\qquad 8'')\quad \theta'_1 = \theta_1,$$

$$9'')\quad v'_{31} - v'_{13} - v_1 q_1 + v_2(r_3 + p_1) - v_3 q_3 = 0,$$

$$10'')\quad \tilde{\rho}'_{31} - \tilde{\rho}'_{13} - \tilde{\rho}_1 q_1 + \tilde{\rho}_2(r_3 + p_1) - \tilde{\rho}_3 q_3 = 0,$$

$$11'')\quad \theta'_{31} - \theta'_{13} - \theta_1 q_1 + \theta_2(r_3 + p_1) - \theta_3 q_3 = 0,$$

$$12'')\quad p'_{31} - p'_{13} - p_1 q_1 + p_2(r_3 + p_1) - p_3 q_3 = r_1 q_3 - r_3 q_1,$$

$$13'')\quad q'_{31} - q'_{13} - q_1^2 + q_2(r_3 + p_1) - q_3^2 = p_1 r_3 - p_3 r_1,$$

$$14'')\quad r'_{31} - r'_{13} - r_1 q_1 + r_2(r_3 + p_1) - r_3 q_3 = q_1 p_3 - q_3 p_1,$$

qui suivent de 1*) — 14*) compte tenu de l'indépendence des formes ω^3, ω^1. Signalons le nombre caractéristiques $r_2 = 13$ et le caractère réduit $s_1 = r_1 - r_2 = 6$. L'élément intégral $\mathcal{E}_3$ peut être déterminé en présentant les paramètres r'_{22}, Φ'_{12}, Φ'_{22}, Φ'_{32}, $\tilde{\rho}'_{t2}$, v'_2, $\tilde{\rho}'_2$, θ'_2, v'_{32}, $\tilde{\rho}'_{32}$, θ'_{32}, p'_{32}, q'_{32}, r'_{32}, v'_{12}, $\tilde{\rho}'_{12}$, θ'_{12}, p'_{12}, q'_{12}, r'_{12} comme des fonctions des autres paramètres en utilisant les relations

$$1''')\quad r'_{22}\cos\theta - p'_{22}\sin\theta - (r_2\sin\theta + p_2\cos\theta)\,\theta'_2 = 0\,,$$

$$2''')\quad (\theta_t + 2vq_3)\,v'_2 + v\,\theta t_2 + v^2 q'_{32} - \Phi'_{12} = \left(-f''\frac{\tilde{\rho}_1}{\tilde{\rho}} + f'\frac{\tilde{\rho}_1}{\tilde{\rho}_2}\right)\tilde{\rho}'_2 - f'\frac{\tilde{\rho}'_{12}}{\tilde{\rho}}\,,$$

$$3''')\quad 2vp_3 v'_2 + v^2 p'_{32} + \Phi'_{22} = \left(f''\frac{\tilde{\rho}_2}{\tilde{\rho}} - f'\frac{\tilde{\rho}_2}{\tilde{\rho}_2}\right)\tilde{\rho}'_2 + f'\frac{\tilde{\rho}'_{22}}{\tilde{\rho}}\,,$$

$$4''')\quad v'_{t2} + v_3 v'_2 + vv'_{32} - \Phi'_{32} = \left(-f''\frac{\tilde{\rho}_3}{\tilde{\rho}} + f'\frac{\tilde{\rho}_3}{\tilde{\rho}_2}\right)\tilde{\rho}'_2 - f'\frac{\tilde{\rho}'_{32}}{\tilde{\rho}}\,,$$

$$5''')\quad \tilde{\rho}'_{t2} + [\tilde{\rho}_3 + \tilde{\rho}(q_1 - p_2)]\,v'_2 + [v_3 + v(q_1 - p_2)]\,\tilde{\rho}'_2 +$$

$$+ v\tilde{\rho}_{32} + \tilde{\rho}v_{32} + v\tilde{\rho}(q'_{12} - p'_{22}) = 0\,,$$

$$6''')\quad v'_2 = v_2\,,\qquad 7''')\quad \rho'_2 = \tilde{\rho}_2\,,\qquad 8''')\quad \theta'_2 = \theta_2\,,$$

$$9''')\quad v'_{12} - v'_{21} - v_1 r_1 - v_2 r_2 + v_3(p_1 + q_2) = 0\,,$$

$$\overline{9}''')\quad v'_{23} - v'_{32} + v_1(q_2 + r_3) - v_2 p_2 - v_3 p_3 = 0\,,$$

$$10''')\quad \tilde{\rho}'_{12}\tilde{\rho}'_{21} - \tilde{\rho}_1 r_1 - \tilde{\rho}_2 r_2 + \tilde{\rho}_3(p_1 + q_2) = 0\,,$$

$$\overline{10}''')\quad \rho'_{23} - \rho'_{32} + \rho_1(q_2 + r_3) - \tilde{\rho}^2 p_2 - \tilde{\rho}_3 p_3 = 0\,,$$

$$11''')\quad \theta'_{12} - \theta'_{21} - \theta_1 r_1 - \theta_2 r_2 + \theta_3(p_1 + q_2) = 0\,,$$

$$\overline{11}''')\quad \theta'_{23} - \theta'_{32} + \theta_1(q_2 + r_3) - \theta_2 p_2 - \theta_3 p_3 = 0\,,$$

$$12''')\quad p'_{12} - p'_{21} - p_1 r_1 - p_2 r + p_3(p_1 + q_2) = r_2 q_1 - r_1 q_2\,,$$

$$\overline{12}''')\quad p'_{23} - p'_{32} + p_1(q_2 + r_3) - p_2^2 - p_3^2 = r_3 q_2 - r_2 q_3\,,$$

$$\overline{13}''')\quad q'_{12} - q'_{21} - q_1 r_1 - q_2 r_2 + q_3(p_1 + q_2) = p_2 r_1 - p_1 r_2\,,$$

$$13'')\quad q'_{23} - q'_{32} + q_1(q_2 + r_3) - q_2 p_2 - q_3 p_3 = p_3 r_2 - p_2 r_3\,,$$

$$14''')\quad r'_{12} - r'_{21} - r_1^2 - r_2^2 + r_3(p_1 + q_2) = q_2 p_1 - q_1 p_2\,,$$

$$\overline{14}''')\quad r'_{23} - r'_{32} + r_1(q_2 + r_3) - r_2 p_2 - r_3 p_3 = q_3 p_2 - q_2 p_3\,.$$

Signalons que $r_3 = 7$ et $s_2 = r_2 - r_3 = 6$.

L'élément intégral $\mathcal{E}_4$ peut être déterminé en présentant les paramètres Φ'_{1t}, Φ'_{2t}, Φ'_{3t}, $\tilde{\rho}'_{tt}$, v'_t, $\tilde{\rho}'_t$, θ'_t, v'_{3t}, $\tilde{\rho}'_{3t}$, θ'_{3t}, p'_{3t}, q'_{3t}, r'_{3t}, v'_{1t}, $\tilde{\rho}'_{1t}$, θ'_{1t}, p'_{1t}, q'_{1t}, r'_{1t}, v'_{2t}, $\tilde{\rho}'_{2t}$, θ'_{2t}, p'_{2t}, q'_{2t}, r'_{2t}, comme des fonctions des autres paramètres en utilisant les relations.

$$1^{\text{IV}})\quad r'_{2t}\cos\theta - p'_{2t}\sin\theta - (r_2\sin\theta + p_2\cos\theta)\,\theta'_t = 0\,,$$

$$2^{\text{IV}})\quad (\theta_t + 2vq_3)\,v'_t + v\theta'_{tt} + v^2 q'_{3t} - \Phi'_{1t} = \left(-f''\frac{\tilde{\rho}_1}{\tilde{\rho}} + f'\frac{\tilde{\rho}_1}{\tilde{\rho}^2}\right)\tilde{\rho}'_t - f'\frac{\tilde{\rho}'_{1t}}{\tilde{\rho}}\,,$$

$$3^{\text{IV}})\quad 2vp_3 v'_t + v^2 p'_{3t} + \Phi'_{2t} = \left(f''\frac{\tilde{\rho}_2}{\tilde{\rho}} - f'\frac{\tilde{\rho}_2}{\tilde{\rho}^2}\right)\rho'_t + f'\frac{\tilde{\rho}'_{2t}}{\tilde{\rho}}\,,$$

$$4^{\text{IV}})\quad v'_{tt} + v_3 v'_t + vv'_{3t} - \Phi'_{3t} = \left(-f''\frac{\tilde{\rho}_3}{\tilde{\rho}} + f'\frac{\tilde{\rho}_3}{\tilde{\rho}^2}\right)\tilde{\rho}'_t - f'\frac{\tilde{\rho}'_{3t}}{\tilde{\rho}}\,,$$

$$5^{\text{IV}})\quad \tilde{\rho}'_{tt} + [\tilde{\rho}_3 + \tilde{\rho}(q_1 - p_2)]\,v'_t + [v_3 + v(q_1 - p_2)]\,\tilde{\rho}'_t + v\tilde{\rho}'_{3t} + \tilde{\rho}v'_{3t} +$$

$$+ v\tilde{\rho}(q'_{1t} - q'_{2t}) = 0\,,$$

$$6^{\text{IV}})\quad v'_t = v_t\,,\qquad 7^{\text{IV}})\quad \tilde{\rho}'_t = \tilde{\rho}_t\,,\qquad 8^{\text{IV}})\quad \theta'_t = \theta_t\,,$$

$$9^{\text{IV}})\quad v'_{1t} - v'_{t1} + v_3\theta_t = 0,\qquad 9^{\text{IV}})\quad v'_{2t} - v'_{t2} = 0,\qquad \overline{9}^{\text{IV}})\quad v'_{3t} - v'_{t3} - v_1\theta_t = 0,$$

$$10^{\text{IV}})\quad \tilde{\rho}'_{1t} - \tilde{\rho}'_{t1} + \tilde{\rho}_3\theta_t = 0,\qquad \overline{10}^{\text{IV}})\quad \tilde{\rho}'_{2t} - \tilde{\rho}'_{t2} = 0,\qquad \overline{\overline{10}}^{\text{IV}})\quad \tilde{\rho}'_{3t} - \tilde{\rho}'_{t3} - \tilde{\rho}_1\theta_t = 0,$$

$$11^{\text{IV}})\quad \theta'_{1t} - \theta'_{t1} + \theta_3\theta_t = 0,\qquad \overline{11}^{\text{IV}})\quad \theta'_{2t} - \theta'_{t2} = 0,\qquad \overline{\overline{11}}^{\text{IV}})\quad \theta'_{3t} - \theta'_{t3} - \theta_1\theta_t = 0,$$

$$12^{\text{IV}})\quad p'_{1t} + p_3\theta_t = -r_1\theta_t\,,\qquad \overline{12}^{\text{IV}})\quad p'_{2t} = -r_2\theta_t\,,\qquad \overline{\overline{12}}^{\text{IV}})\quad p'_{3t} - p_1\theta_t = -r_3\theta_t\,,$$

$$13^{\text{IV}})\quad q'_{1t} - \theta'_{t1} + q_3\theta_t = 0,\qquad \overline{13}^{\text{IV}})\quad q'_{2t} - \theta'_{t2} = 0,\qquad \overline{\overline{13}}^{\text{IV}})\quad q'_{3t} - \theta'_{t3} - q_1\theta_t = 0,$$

$$14^{\text{IV}})\quad r'_{1t} + r_3\theta_t = p_1\theta_t\,,\qquad \overline{14}^{\text{IV}})\quad r'_{2t} = p_2\theta_t\,,\qquad \overline{\overline{14}}^{\text{IV}})\quad r'_{3t} - r_1\theta_t = p_3\theta_t\,,$$

(la relation 1^{IV}) est la conséquence des relations $\overline{12}^{\text{IV}}$), $\overline{14}^{\text{IV}}$)). Signalons $r_4 = 2$, $s_3 = r_3 - r_4 = 5$, $s_4 = r_4 = 2$.

On observe facilement que le nombre de Cartan $4s_0 + 3s_1 + 2s_2 + s^3$ est égal au nombre des relations indépendantes entre les paramètres de la famille des éléments intégraux et par conséquent le système (S') est en involution. Il existe donc des variétés intégrales à quatre dimensions,

du système (S') sur lesquellles $[\omega^1, \omega^2, \omega^3, dt] \neq 0$. On peut énoncer le théorème suivant :

Soit (W) *une variété de l'espace* E_3 *définie par un champ de vecteurs qui dépendent du point de l'espace* E_3 : *il existe parmi les mouvements barotropes nonstationnaires tridimensionels, des mouvements, qui dépendent de deux fonctions* v_t, θ_t *de quatre arguments, pour lesquels le champ des vitesses est tangent à* (W).

2. Propriétés générales des mouvements barotropes nonstationnaires tridimensionels ayant associée une variété de l'espace E_3, définie par un champ orthogonal au champ des vitesses

1. La courbure moyenne du champ (I_3) à un moment t donné est la somme de la dérivée de $\ln \tilde{\rho}$ le long de la trajectoire d'une particule et de la dérivée de $\ln v$ le long de la ligne du courant $(v = |\bar{v}|)$:

$$p_2 - q_1 = \frac{d}{ds_{tr}} \ln \tilde{\rho} + \frac{d}{ds_c} \ln v,$$

(tr indique la trajectoire d'une particule et c indique la ligne de courant) ; la relation précédente est la conséquence de l'équation de la continuité.

2. Les deux premières équations du mouvement permettent d'obtenir la relation

$$\left(\frac{v^2}{R_{(tr.,\, I_3)}}\right)^2 = (\Phi - c^2 \operatorname{grad} \ln \tilde{\rho})_n^2,$$

où $[R_{(tr.,\, I_3)}]^{-1}$ est la courbure de la famille des directions (tr, I_3), c'est-à-dire des directions I_3 le long des trajectoires, n indique la composante du plan normal de la ligne du courant et c est la vitesse locale du son.

3. La troisième équation du mouvement permet d'établir les relations suivantes

$$\frac{d}{ds_{tr}}\left(\frac{v^2}{2}\right) = I_3, \ (\Phi - c^2 \operatorname{grad} \ln \tilde{\rho}),$$

$$v_t = I_3 \ (\Phi - c^2 \operatorname{grad} \ln \tilde{\rho}) - \frac{d}{ds_c}\left(\frac{v^2}{2}\right),$$

où v_t est la dérivée partielle de $|\bar{v}|$ par rapport à t, en un point donné.

4. La dérivée de $|\bar{v}|$ par rapport à t, en un point donné peut toujours s'exprimer par :

$$v_t = \left(\frac{d}{ds_{tr}} - \frac{d}{ds_c}\right)\left(\frac{v^2}{2}\right).$$

5. La vitesse de rotation du vecteur vitesse en un point donné peut être exprimée par la relation

$$\theta_t = v\left(\frac{1}{R^{(2)}_{g\,(tr)}} - \frac{1}{R^{(2)}_{g\,(l.c)}}\right),$$

où $1/R^{(2)}_{g\,(tr)}$ et $1/R^{(2)}_{g\,(l.c)}$ sont les courbures géodésiques des familles des directions $[(tr), I_3]$ et $[(l.c)], I_3]$ dans les configurations Myller $[(tr), I_3, P_2]$ et $[(l.c.), I_3, P_2]$*) respectivement [6].

6. Signalons aussi une autre expression de la vitesse de rotation du vecteur vitesse

$$\theta_t = \frac{1}{v}\,[I_1 \cdot (\Phi - c^2 \operatorname{grad} \ln \tilde{\rho})] - \frac{v}{R^{(2)}_{g\,(l.c)}}.$$

7. La vitesse de la variation de la densité en un point donné peut être exprimée par

$$\tilde{\rho}_t = v\left(\frac{d}{ds_{tr}} - \frac{d}{ds_c}\right)(\tilde{\rho}).$$

8. De l'équation de la continuité il suit encore

$$\tilde{\rho}_t = v\tilde{\rho}\,(p_2 - q_1) - \frac{d}{ds_c}(v\tilde{\rho}).$$

9. Voici d'autres relations qui permettent d'exprimer la vitesse de rotation du vecteur vitesse

$$\theta_t\,(m_1 + m_2) + \frac{d}{dt}\ln\left(\frac{1}{R^{(2)}_{n\,(l.a_k)}}\right) = 0,$$

$$\theta_t\,(m'_1 + m'_2) + \frac{d}{dt}\ln\left(\frac{1}{\tau^{(2)}_{g\,(l.a_k)}}\right) = 0,$$

où m_1, m_2 sont les directions asymptotiques du champ (I_2) rapportées au repère (I_1, I_3) à un moment donné, m'_1, m'_2 sont les directions des lignes de courbure du champ (I_2) à un moment donné (rapportées au même repère (I_1, I_3) et $1/R_{(n(l.a_k)}$, $1/\tau^{(2)}_{g\,(l.a_k)}$ sont la courbure normale et la torsion géodésique de la famille des directions $[(l \cdot a_k), I_3]$ dans la configuration Myller.

---

* P_2 est le plan dont le vecteur normal unité est I_2.

$[(l.\, a_k),\ I_3, P_2]$, (les lignes $(l \cdot a_k)$ ont les équations $\omega^1 = \omega^2 = \omega^3 - K dt = 0$, où K est une fonction quelconque qui dépend du point de l'espace E_3 et du temps t). Les relations précédentes sont les conséquences de $\overline{12}^{IV})$ et $\overline{14}^{IV})$.

10. Les relations $\overline{9}^{IV})$, $\overline{10}^{IV})$, $\overline{11}^{IV})$ indiquent la permutabilité des dérivées pfafiennes secondes mixtes de v, $\tilde{\rho}$ et θ par rapport au temps t et à la longueur de l'arc de la trajectorie orthogonale de la variété (W).

Les propriétés générales présentées ci-dessus permettent l'étude des propriétés caractéristiques des mouvements particuliers barotropes non-stationnaires tridimensionnels ayant associée une variété (W), obtenus en imposant aux paramètres du mouvements des conditions supplémentaires.

BIBLIOGRAPHIE

1. Бюшгенс С. С. — *Геометрия неустановшегося потока совершенной несжимаемой жидкости*, ИАН СССР, Т. 24, 1960, стр. 171—202.
2. Бюшгенс С. С.— *Геометрия стационарного потока идеальной несжимаемой жидкости*. ИАН СССР, серия матем. 12 (1948) стр. 481—512.
3. Cartan E. — *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, Paris, 1945.
4. Фиников П. С. — *Метод внешних форм Картана в дифференциальноц геометрии*, Москва, 1948.
5. Gheorghiev Gh. — *Нестационарные движения идеальной жидкости вдоль линейной неголономной поверхности*. Ana, şt. Univ. Iaşi, T. V. (1959), pp. 51—65.
6. Gheorghiev Gh. — *Дифференциально-геометрические свойства нестационарных движений в гидродинамике и в магнитной гидромеханике*. An. şt. Univ. Iaşi, T. VI (1960), pp. 265—288.
7. Miron R. — *Geometria configurațiilor Myller*. Ed. tehnică, București, 1966.

MIŞCĂRI BAROTROPE NESTAŢIONARE ALE UNUI FLUID IDEAL

Rezumat

Se demonstrează teorema: Fie (W) o varietate din E_3 definită de un cîmp de vectori depinzînd de punctul din E_3; printre mişcările barotrope nestaţionare tridimensionale, există mişcări ce depind de 2 funcţii arbitrare v_t, θ_t de 4 argumente, pentru care cîmpul vitezelor este în permanenţă tangent varietăţii (W), (v_t şi θ_t sînt derivatele parţiale în raport cu timpul t ale modulului vitezei şi ale unghiului între vectorul viteză şi vectorul unui cîmp staţionar tangent varietăţii (W)).

Se stabilesc proprietăţi generale ale mişcărilor studiate, pe baza ecuaţiilor obţinute într-un reper local ataşat mişcării. În formularea proprietăţilor generale ale mişcării considerate semnalăm importanţa utilizării invarianţilor unor familii de direcţii în anumite configuraţii Myller.

ASUPRA RESTULUI ÎN FORMULELE DE APROXIMARE PRIN OPERATORII LUI MIRAKYAN DE UNA ŞI DOUĂ VARIABILE

DE

FELICIA STANCU

1. Cazul unei variabile

1. Fie $f(x)$ o funcţie cu a două derivată continuă pe intervalul $[0,\infty)$ şi

$$L_n(f;x) = \sum_{r=0}^{\infty} e^{-nx} \frac{(nx)^r}{r!} f\left(\frac{r}{n}\right) \tag{1}$$

operatorul lui Mirakyan [3] corespunzător.

În această lucrare ne propunem, mai întîi, să găsim unele expresii ale restului $R_n(f;x)$ din următoarea formulă de aproximare a funcţiei $f(x)$ prin operatorul (1):

$$f(x) = L_n(f;x) + R_n(f;x), \tag{2}$$

şi în primul rînd o expresie integrală.

2. Se verifică imediat că au loc identităţile

$$L_n(1;x) = 1, \quad L_n(x;x) = x. \tag{3}$$

În baza formulei lui Maclaurin, cu restul sub formă integrală, avem

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + g(f;x),$$

unde

$$g(f;x) = g(x) = \int_0^x (x-t) f''(t)\, dt.$$

Avînd în vedere că $L_n(f;x)$ este un operator liniar, $R_n(f;x)$ va fi de asemenea liniar şi vom avea

$$R_n(f;x) = f(0) R_n(1;x) + f'(0) R_n(x;x) + R_n(g;x).$$