$[(l.\, a_k),\ I_3, P_2]$, (les lignes $(l \cdot a_k)$ ont les équations $\omega^1 = \omega^2 = \omega^3 - K dt = 0$, où K est une fonction quelconque qui dépend du point de l'espace E_3 et du temps t). Les relations précédentes sont les conséquences de $\overline{12}^{IV})$ et $\overline{14}^{IV})$.

10. Les relations $\overline{9}^{IV})$, $\overline{10}^{IV})$, $\overline{11}^{IV})$ indiquent la permutabilité des dérivées pfafiennes secondes mixtes de v, $\tilde{\rho}$ et θ par rapport au temps t et à la longueur de l'arc de la trajectorie orthogonale de la variété (W).

Les propriétés générales présentées ci-dessus permettent l'étude des propriétés caractéristiques des mouvements particuliers barotropes non-stationnaires tridimensionnels ayant associée une variété (W), obtenus en imposant aux paramètres du mouvements des conditions supplémentaires.

BIBLIOGRAPHIE

1. Бюшгенс С. С. — *Геометрия неустановшегося потока совершенной несжимаемой жидкости*, ИАН СССР, Т. 24, 1960, стр. 171—202.
2. Бюшгенс С. С.— *Геометрия стационарного потока идеальной несжимаемой жидкости*. ИАН СССР, серия матем. 12 (1948) стр. 481—512.
3. Cartan E. — *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, Paris, 1945.
4. Фиников П. С. — *Метод внешних форм Картана в дифференциальноц геометрии*, Москва, 1948.
5. Gheorghiev Gh. — *Нестационарные движения идеальной жидкости вдоль линейной неголономной поверхности*. Ana, şt. Univ. Iaşi, T. V. (1959), pp. 51—65.
6. Gheorghiev Gh. — *Дифференциально-геометрические свойства нестационарных движений в гидродинамике и в магнитной гидромеханике*. An. şt. Univ. Iaşi, T. VI (1960), pp. 265—288.
7. Miron R. — *Geometria configurațiilor Myller*. Ed. tehnică, București, 1966.

MIŞCĂRI BAROTROPE NESTAŢIONARE ALE UNUI FLUID IDEAL

Rezumat

Se demonstrează teorema: Fie (W) o varietate din E_3 definită de un cîmp de vectori depinzînd de punctul din E_3; printre mişcările barotrope nestaţionare tridimensionale, există mişcări ce depind de 2 funcţii arbitrare v_t, θ_t de 4 argumente, pentru care cîmpul vitezelor este în permanenţă tangent varietăţii (W), (v_t şi θ_t sînt derivatele parţiale în raport cu timpul t ale modulului vitezei şi ale unghiului între vectorul viteză şi vectorul unui cîmp staţionar tangent varietăţii (W)).

Se stabilesc proprietăţi generale ale mişcărilor studiate, pe baza ecuaţiilor obţinute într-un reper local ataşat mişcării. În formularea proprietăţilor generale ale mişcării considerate semnalăm importanţa utilizării invarianţilor unor familii de direcţii în anumite configuraţii Myller.

ASUPRA RESTULUI ÎN FORMULELE DE APROXIMARE PRIN OPERATORII LUI MIRAKYAN DE UNA ŞI DOUĂ VARIABILE

DE

FELICIA STANCU

1. Cazul unei variabile

1. Fie $f(x)$ o funcţie cu a două derivată continuă pe intervalul $[0,\infty)$ şi

$$L_n(f;x) = \sum_{r=0}^{\infty} e^{-nx} \frac{(nx)^r}{r!} f\left(\frac{r}{n}\right) \tag{1}$$

operatorul lui Mirakyan [3] corespunzător.

În această lucrare ne propunem, mai întîi, să găsim unele expresii ale restului $R_n(f;x)$ din următoarea formulă de aproximare a funcţiei $f(x)$ prin operatorul (1):

$$f(x) = L_n(f;x) + R_n(f;x), \tag{2}$$

şi în primul rînd o expresie integrală.

2. Se verifică imediat că au loc identităţile

$$L_n(1;x) = 1, \quad L_n(x;x) = x. \tag{3}$$

În baza formulei lui Maclaurin, cu restul sub formă integrală, avem

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + g(f;x),$$

unde

$$g(f;x) = g(x) = \int_0^x (x-t) f''(t)\, dt.$$

Avînd în vedere că $L_n(f;x)$ este un operator liniar, $R_n(f;x)$ va fi de asemenea liniar şi vom avea

$$R_n(f;x) = f(0) R_n(1;x) + f'(0) R_n(x;x) + R_n(g;x).$$

Ţinînd seama de definiţia lui $R_n(f;x)$ şi de identităţile (3) obţinem de aici relaţia importantă

$$R_n(f;x) = R_n(g;x) = g(f;x) - L_n(g;x). \tag{4}$$

În continuare putem scrie

$$L_n(g;x) = \sum_{r=0}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^r}{r!}\, g\left(\frac{r}{n}\right) =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^r}{r!}\int_0^{\frac{r}{n}}\left(\frac{r}{n}-t\right) f''(t)\,dt =$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} e^{-nx}\int_{\frac{r-1}{n}}^{\frac{r}{n}}\left|\sum_{j=k}^{\infty}\frac{(nx)^j}{j!}\left(\frac{j}{n}-t\right)\right| f''(t)\,dt.$$

Dar

$$\sum_{j=r}^{\infty}\left(\frac{j}{n}-t\right)\frac{(nx)^j}{j!} = (x-t)\,e^{-nx} - \sum_{j=0}^{r-1}\left(\frac{j}{n}-t\right)\frac{(nx)^j}{j!}. \tag{5}$$

Rezultă că

$$R_n(f;x) = \int_0^x (x-t)\,f''(t)\,dt -$$

$$-\sum_{r=1}^{\infty}\int_{\frac{r-1}{n}}^{\frac{r}{n}}\left[x-t-e^{-nx}\sum_{j=0}^{r-1}\left(\frac{j}{n}-t\right)\frac{(nx)^j}{j!}\right] f''(t)\,dt.$$

Aceasta se poate scrie mai compact astfel

$$R_n(f;x) = \int_0^{\infty} G_n(t;x)\,f''(t)\,dt, \tag{6}$$

unde, dacă presupunem că $x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, k fiind un număr natural, avem

$$G_n(t;x) = \begin{cases} e^{-nx}\sum_{j=0}^{r-1}\left(\frac{j}{n}-t\right)\frac{(nx)^j}{j!} & \text{dacă } t \in \left[\frac{r-1}{n}, \frac{r}{n}\right],\ 1 \leqq r \leqq k-1, \\ e^{-nx}\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{j}{n}-t\right)\frac{(nx)^j}{j!} & \text{dacă } t \in \left[\frac{k-1}{n}, x\right], \\ t-x+e^{-nx}\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{j}{n}-t\right)\frac{(nx)^j}{j!} & \text{dacă } t \in \left[x, \frac{k}{n}\right], \\ t-x+e^{-nx}\sum_{j=0}^{r-1}\left(\frac{j}{n}-t\right)\frac{(nx)^j}{j!} & \text{dacă } t \in \left[\frac{r-1}{n}, \frac{r}{n}\right], r \geqq k+1. \end{cases} \tag{7}$$

În felul acesta am obţinut o reprezentare printr-o integrală definită a restului formulei de aproximare (2).

3. Ţinînd seamă de expresia nucleului $G_n(t;x)$ şi de faptul că din identitatea (5) se deduce că pentru m număr natural avem

$$t - x + e^{-nx}\sum_{j=0}^{m-1}\left(\frac{j}{n}-t\right)\frac{(nx)^j}{j!} = -e^{-nx}\sum_{j=m}^{\infty}\left(\frac{j}{n}-t\right)\frac{(nx)^j}{j!},$$

se constată că oricare ar fi $t \in [0, \infty)$ avem $G_n(t;x) \leqq 0$, x fiind un punct fix de pe intervalul $[0, \infty)$.

În consecinţă putem aplica teorema întîi a mediei din calculul integral şi obţinem

$$R_n(f;x) = f''(\xi)\int_0^{\infty} G_n(t;x)\,dt,$$

unde $0 < \xi < \infty$.

Luînd $f(x) = x^2$ găsim

$$x^2 = \frac{x}{n} + x^2 + 2\int_0^{\infty} G_n(t;x)\,dt,$$

astfel că

$$\int_0^{\infty} G_n(t;x)\,dt = -\frac{x}{2n}.$$

În felul acesta am ajuns la următoarea expresie simplă pentru restul $R_n(f;x)$:

$$R_n(f;x) = -\frac{x}{2n}f''(\xi), \quad 0 < \xi < \infty. \tag{8}$$

Formula aceasta pune în evidenţă faptul că formula de aproximare (2) are gradul de exactitate unu.

4. În continuare vom stabili o expresie cu ajutorul diferenţelor divizate de ordinul al doilea pentru restul $R_n(f;x)$.

Se observă că putem scrie succesiv

$$R_n(f;x) = f(x) - L_n(f;x) = \sum_{r=0}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^r}{r!}\left(f(x) - f\left(\frac{r}{m}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^r}{r!}(nx - r)\left[x, \frac{r}{n}; f\right] =$$

$$= x\sum_{r=0}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^r}{r!}\left[x, \frac{r}{n}; f\right] -$$

$$- x\sum_{r=1}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^{r-1}}{(r-1)!}\left[x, \frac{r}{n}; f\right].$$

Făcînd în ultima sumă schimbarea $r = i + 1$ şi înlocuind apoi iar variabila de însumare prin r avem

$$R_n(f;x) = x\sum_{r=0}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^r}{r!}\left[x, \frac{r}{n}; f\right] - x\sum_{r=0}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^r}{r!}\left[x, \frac{r+1}{r}; f\right]$$

$$= x\sum_{r=0}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^r}{r!}\left\{\left[x, \frac{r}{n}; f\right] - \left[x, \frac{r+1}{n}; f\right]\right\}.$$

Dar în baza relaţiei de recurenţă a diferenţelor divizate avem

$$-n\left(\left[x, \frac{r}{n}; f\right] - \left[x, \frac{r+1}{n}; f\right]\right) = \left[x, \frac{r}{n}, \frac{r+1}{n}; f\right]$$

şi în felul acesta obţinem rezultatul final

$$R_n(f;x) = -\frac{x}{n}\sum_{r=0}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^r}{r!}\left[x, \frac{r}{n}, \frac{r+1}{n}, f\right]. \tag{9}$$

Această formulă este analogă formulei stabilite în [7] în cazul polinoamelor lui Bernstein şi a fost obţinută prima dată în [8] pe o cale diferită.

Dacă se notează cu $M_2(f)$ marginea superioară a valorilor absolute ale diferenţelor divizate pe trei puncte oarecare de pe axa $[0,\infty)$ a funcţiei $f(x)$ şi ţinem seama de prima relaţie de la (3), putem scrie

$$|R_n(f;x)| \leq \frac{x}{n} M_2(f).$$

Avînd în vedere că formula de aproximare (2) are gradul de exactitate unu şi că în conformitate cu formula (9) restul $R_n(f;x)$ nu se anulează dacă funcţia f este convexă de ordinul întîi pe intervalul $[0, \infty,)$

adică diferenţele sale, divizate pe trei puncte oarecare distincte din acest interval sînt pozitive, în baza unui rezultat al acad. T. Popoviciu [4, 5] există trei puncte distincte ξ_1, ξ_2, ξ_3 din acest interval astfel încît să avem

$$R_n(f;x) = R_n(x^2;x)\,[\xi_1, \xi_2, \xi_3; f].$$

Cum

$$R_n(x^2;x) = -\frac{x}{n},$$

rezultă următoarea formulă

$$R_n(f;x) = -\frac{x}{n}[\xi_1, \xi_2, ; \xi_3; f], \tag{10}$$

care a fost dedusă recent, fără ajutorul formulei (9), de către A. Lupaş [2]. O formulă similară pentru restul formulei de aproximare prin polinomul lui Bernstein a fost stabilită mai întîi de către O. Arama [1].

2. Cazul a două variabile

5. În cazul unei funcţii de două variabile $f(x, y)$, definită pe domeniul $D: 0 \leq x, y < \infty$, se poate considera operatorul lui Mirakyan în două variabile

$$L_{n,m}(f;x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} e^{-(nx+my)}\frac{(nx)^r(my)^s}{r!\,s!} f\left(\frac{r}{n}, \frac{s}{m}\right).$$

Presupunînd că $f(x,y)$ are derivate continue de ordinul al doilea în raport cu x şi în raport cu y, ne propunem în continuare să evaluăm restul $R_{n,m}(f;x,y)$ al formulei de aproximare

$$f(x,y) = L_{n,m}(f;x,y) + R_{n,m}(f;x,y). \tag{11}$$

Folosind rezultatul stabilit la (6) se poate deduce o reprezentare prin integrale definite a acestui rest. Ţinînd seama de (1) şi (6) putem scrie

$$f(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^r}{r!} f\left(\frac{r}{n}, y\right) + \int_0^{\infty} G_n(t;x)\, f''_{t^2}(t,y)\, dt.$$

Dezvoltînd apoi funcţia $f\left(\frac{r}{n}, y,\right)$, în raport cu variabila y, conform aceluiaşi rezultat, avem

$$f\left(\frac{r}{n}, y\right) = \sum_{s=0}^{\infty} e^{-my}\frac{(my)^s}{s!} f\left(\frac{r}{n}, \frac{s}{m}\right) + \int_0^{\infty} G_m(\tau; y) f''_{\tau^2}\left(\frac{r}{n}, \tau\right) d\tau.$$

În consecinţă

$$f(x, y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} e^{-(nx+my)}\frac{(nx)^r (my)^s}{r!\, s!} f\left(\frac{r}{n}, \frac{s}{m}\right) + R_{n,m}(f; x, y),$$

unde

$$R_{n,m}(f; x, y) = \int_0^{\infty} G_n(t; x) f''_{t^2}(t, y) dt +$$

$$+ \int_0^{\infty} G_m(\tau; y)\left[\sum_{r=0}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^r}{r!} f''_{\tau^2}\left(\frac{r}{n}, \tau\right)\right] d\tau.$$

Dar

$$\sum_{r=0}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^r}{r!} f''_{\tau^2}\left(\frac{r}{n}, \tau\right) = f''_{\tau^2}(x, \tau) - \int_0^{\infty} G_n(t; x) f^{(IV)}_{t^2\tau^2}(t, \tau) dt.$$

Înlocuind mai sus, obţinem următoarea reprezentare prin integrale definite a restului formulei de aproximare (11)

$$R_{n,m}(f; x, y) = \int_0^{\infty} G_n(t; x) f''_{t^2}(t, y) dt + \int_0^{\infty} G_m(\tau; y) f''_{\tau^2}(x, \tau) d\tau - \tag{12}$$

$$- \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} G_n(t; x) G_m(\tau; y) f^{(IV)}_{t^2\tau^2}(t, \tau) dt\, d\tau.$$

De aici, pe baza formulei întîi a mediei din calculul integral, se poate deduce imediat următoarea expresie a restului

$$R_{n,m}(f; x, y) = -\frac{x}{2n} f''_{x^2}(\xi, y) - \frac{y}{2m} f''_{y^2}(x, \eta) - \frac{xy}{4nm} f^{(IV)}_{x^2y^2}(\xi, \eta),$$

ξ şi η avînd anumite valori din intervalul $(0, \infty)$.

6. O reprezentare similară cu cea de la (10) se poate deduce de asemenea şi pentru restul formulei (11). Mai întîi avem

$$f(x, y) = \sum_{r=0}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^r}{r!} f\left(\frac{r}{n}, y\right) - \frac{x}{n}\left[\xi_1, \xi_2, \xi_3; f(x, y)\right]_x.$$

Apoi

$$f\left(\frac{r}{n}, y\right) = \sum_{s=0}^{\infty} e^{-my}\frac{(my)^s}{s!} f\left(\frac{r}{n}, \frac{s}{m}\right) - \frac{y}{m}\left[\eta_1, \eta_2, \eta_3; f\left(\frac{r}{n}, y\right)\right]_y,$$

η_1, η_2, η_3 fiind puncte distincte din intervalul $(0, \infty.)$

În consecinţă

$$f(x, y) = L_{n,m}(f; x, y) - \frac{x}{n}[\xi_1, \xi_2, \xi_3; f(x, y)]_x -$$

$$- \frac{y}{m}\sum_{r=0}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^r}{r!}\left[\eta_1, \eta_2, \eta_3; f\left(\frac{r}{n}, y\right)\right]_y.$$

Dar

$$\sum_{r=0}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^r}{r!}\left[\eta_1, \eta_2, \eta_3; f\left(\frac{r}{n}, y\right)\right]_y =$$

$$= \left[\eta_1, \eta_2, \eta_3; \sum_{r=0}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^r}{r!} f\left(\frac{r}{n}, y\right)\right] =$$

$$= \left[\eta_1, \eta_2, \eta_3; f(x, y) - \frac{x}{n}\left[\xi_1, \xi_2, \xi_3; f(x, y)\right]_x\right]_y =$$

$$= \left[\eta_1, \eta_2, \eta_3; f(x, y)\right]_y - \frac{x}{n}\left[\begin{matrix}\xi_1, \xi_2, \xi_3\\ \eta_1, \eta_2, \eta_3\end{matrix}; f(x, y)\right],$$

unde

$$\left[\begin{matrix}\xi_1, \xi_2, \xi_3\\ \eta_1, \eta_2, \eta_3\end{matrix}; f(x, y)\right] = [\xi_1, \xi_2, \xi_3; [\eta_1, \eta_2, \eta_3; f(x, y)]_y]_x$$

$$= [\eta_1, \eta_2, \eta_3; [\xi_1, \xi_2, \xi_3; f(x, y)]_x]_y$$

este diferenţa divizată bidimensionlă a lui $f(x, y)$ pe punctele puse în evidenţă.

În consecinţă ajungem la următoarea expresie pentru restul formulei de aproximare (11)

$$(13)\qquad R_{n,m}(f;x,y) = -\frac{x}{n}[\xi_1,\xi_2,\xi_3;f(x,y)]_x - \frac{y}{m}[\eta_1,\eta_2,\eta_3;f(x,y)]_y - \frac{xy}{nm}\left[\begin{matrix}\xi_1,\xi_2,\xi_3\\ \eta_1,\eta_2,\eta_3\end{matrix};f(x,y)\right].$$

În încheiere menționăm că rezultatele analoge cu cele de la (12) și (13) pentru resturile formulelor de aproximare prin polinoamele lui Bernstein de două variabile au fost stabilite în lucrarea [6].

Relativ la extinderea la trei și mai multe variabile a formulelor stabilite în această lucrare putem spune că aceasta se poate face imediat conform procedeelor folosite în ultimul paragraf.

BIBLIOGRAFIE

1. Aramă O. — *Proprietăți privind monotonia șirului polinoamelor de interpolare ale lui S. N. Bernstein și aplicarea lor la studiul aproximării funcțiilor.* Studii și cercetări de matematică, Cluj, 8 (1957), 195–210.
2. Lupaș A. — *On Bernstein power series.* Mathematica, 8(31) (1966), 287–296.
3. Mirakyan G. — *Approximation des fonctions continues au moyen de polynomes de la forme ...* Dokl. Akad. Nauk SSSR, 31 (1941), 201–205.
4. Popoviciu T. — *Asupra formei restului în unele formule de aproximare ale analizei.* Lucr. Ses. Gen. Șt. Acad. R.P.R., (1950), 183–185.
5. — *Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse.* Mathematica, 1 (24) (1959), 95–142.
6. Stancu D. D. — *Evaluation of the remainder term in approximation formulas by Bernstein polynomials.* Mathematics of Computation, 17 (1963), 270–278.
7. — *The remainder of certain linear approximation formulas in two variables.* Journ. SIAM Numer. Anal. Ser. B, 1 (1964) 137–164.
8. — *Approximation of functions by a new class of linear polynominal operators.* Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 13 (1968), 1173–1194.

ON THE REMAINDER IN THE APPROXIMATION FORMULAE BY THE MIRAKYAN OPERATORS OF ONE AND TWO VARIABLES

In the first part of this paper one establishes the integral representation (6) of the remainder of approximation formula (2) of $f(x)$ by means of the linear positive operator (1) of Mirakyan. As a corollary one deduces the simple formula (8). Then one also establishes the formula (9), which gives a representation of the remainder in terms of the divided differences of the second order of $f(x)$.

In the second part of the paper one extends these results to the case of two independent variables.

TENSIONS THERMIQUES DANS DES BARRES ÉLASTIQUES ANISOTROPES

PAR

D. IEȘAN

Dans [7], [8] nous avons étudié le problème des tensions thermiques dans des barres cylindriques anisotropes en supposant que la température varie linéairement dans la direction de la génératrice. Dans ce qui suit nous allons étudier le problème des tensions thermiques dans des barres anisotropes pour le cas où la température est donnée sous la forme d'un polynôme dont la variable est la coordonnée axiale x_3.

Nous considérons le cas d'une barre orthotrope et homogène (§§ 1, 2) et le cas où la barre est composée de différents matériaux homogènes (§ 3). Aux §§ 4, 5 on présente les résultats qui s'obtiennent dans le cas des matériaux qui ont un plan de symétrie élastique.

§ **1.** Considérons une barre cylindrique avec un profil simplement connexe, de longueur l. Nous supposons que les forces de masse sont nulles et la surface latérale est libre de tensions. Nous supposons que la barre est en équilibre sous l'action d'un champ thermique donné, les forces qui actionnent sur les extrémités étant statiquement équivalentes à zéro.

Nous choisissons le système de coordonnées cartésiennes orthogonales tel que l'axe Ox_3 soit parallèle aux génératrices de la surface latérale et que le plan Ox_1,x_2 contienne une extrémité de la barre, l'autre étant dans le plan $x_3 = l$.

Nous allons noter par u_i, ε_{ij}, σ_{ij} $(i, j = 1,2,3)$ respectivement les composantes du vecteur déplacement, du tenseur déformation et du tenseur tension et par T, la variation de la température absolue du milieu par rapport à la température de l'état naturel.

Les équations constitutives pour le cas des milieux orthotropes sont