REFERENCES

1. Dragan I. — *Sur les fonctions lexicographiques monotones croissantes et leurs applications à la résolution des programmes linéaires en variables binaires.* An. şt. Univ. Iaşi, Matematică, T. XIV, 1968, p. 205—210.
2. Dragan I. — *Un algoritm lexicografic pentru rezolvarea programelor polinomiale în variabile binare.* Stud. şi cerc., Mat. Bucureşti, T. 20, 1968, p. 1137—1146.
3. Lawler E. L., Bell M. D. — *A Method for Solving Discrete Optimization Problems.* Op. Res. T. 14, 1966, p. 1098—1112.
4. Финкельштейн Н. — *Алгоритм для решения задачи целочисленного программирования с булевыми переменными.* Экон. и Мат. методы, T. 1, 1965, 5, p. 746—760.

UN ALGORITM LEXICOGRAFIC PENTRU REZOLVAREA PROGRAMELOR POLINOMIALE ÎN VARIABILE ÎNTREGI ŞI MĂRGINITE

Rezumat

Fie mulţimea $B_n^p = \{x | x = (x_i),\ x_i \in M_p,\ (i = 1, \ldots, n)\}$, unde $M_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$; fie polinoamele $P_j(x)$, $(j = 0, 1, \ldots, s)$, cu coeficienţi întregi. În lucrarea de faţă se consideră problema (P): să se găsească $\hat{x} \in B_n^p$, astfel ca

$$P_0(\hat{x}) = \max_{x \in Z} P_0(x).$$

unde

$$Z = \{x | \in x \in B_n^p,\ P_h(x) \geqq 0,\ (h = 1, \ldots, s)\}.$$

Se dă un algoritm denumit algoritmul lexicografic, pentru rezolvarea problemei (P); cazuri particulare ale problemei (P) au fost considerate în [1] şi [2]. Se regăsesc ideile fundamentale din acele lucrări, dar şi idei noi introduse în scopul accelerării convergenţei algoritmului.

THÉORÈMES D'ÉLIMINATION DES NOEUDS DANS LA THÉORIE DES RÉSEAUX

DE

IOAN TOMESCU

I. Définitions et notations. Pour présenter les théorèmes d'élimination des noeuds [2], [3] dans un cas général nous préférerons d'utiliser la structure algébrique de semi-groupe à ordre semi-réticulaire, qui a été introduite dans [5].

Un semi-groupe à ordre semi-réticulaire est un ensemble S muni des deux opérations internes partout définies: la somme $\wedge$ et le produit $\circ$ vérifiant les axiomes:

1) $a \circ b = b \circ a$
2) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
3) $a \circ e = a$
4) $a \wedge b = b \wedge a$
5) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
6) $a \wedge a = a$
7) $a \circ (b \wedge c) = (a \circ b) \wedge (a \circ c)$
8) $a \wedge (a \circ b) = a$, pour tout $a, b, c \in S$ (e est l'élément neutre du semi-groupe).

Dans l'ensemble S on introduit une relation d'ordre partiel: $a \prec b$ si $a \wedge b = a$, qui a les propriétés suivantes: $a \wedge b \prec a \prec a \circ b$ (donc $e \prec a$); si $z \prec a$ et $z \prec b$ alors $z \prec a \wedge b$; şi $a \prec b$ et $c \prec d$ alors $a \wedge c \prec b \wedge d$ et $a \circ c \prec b \circ d$ (pour la démonstration voir [8]).

Si l'on définit la multiplication des matrices carrées $A = \{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,\ldots,p}$ et $B = \{b_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,\ldots,p}$ avec $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta} \in S$ par la relation $\{A \times B\}_{\alpha\beta} = \bigwedge_{\gamma=1,\ldots,p} (a_{\alpha\gamma} \circ b_{\gamma\beta})$, alors dans [5] on démontre que cette loi de composition est associative et, si $a_{\alpha\alpha} = e$ on a la relation $A^{p-1} = A^p = \ldots$, avec $\{A^{p-1}\}_{\alpha\alpha} = e$; $\{A^{p-1}\}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} \wedge \bigwedge_{r} \bigwedge_{(\gamma_1,\ldots,\gamma_r)} (a_{\alpha\gamma_1} \circ a_{\gamma_1\gamma_2} \circ \ldots \circ a_{\gamma_r\beta})$ où $r = 1, \ldots, p-2$ et $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r) \in \{1, 2, \ldots, p\} \setminus \{\alpha, \beta\}$, $\gamma_1 \neq \gamma_2, \ldots, \gamma_{r-1} \neq \gamma_r$.

On introduit une relation d'ordre partiel dans l'ensemble des matrices aux éléments de S de la façon suivante : $A < B$ si $a_{\alpha\beta} < b_{\alpha\beta}$ pour tout $\alpha, \beta = 1, \ldots, p$. Les relations $A < C$ et $B < D$ impliquent $a_{\alpha\gamma} \circ b_{\gamma\beta} < c_{\alpha\gamma} \circ d_{\gamma\beta}$ pour tout α, β, γ, d'où $\bigwedge_{\gamma=1,\ldots,p} (a_{\alpha\gamma} \circ b_{\gamma\beta}) < \bigwedge_{\gamma=1,\ldots,p} (c_{\alpha\gamma} \circ d_{\gamma\beta})$ pour tout α, β, donc $A \times B < C \times D$.

Si $a_{\alpha\alpha} = e$ pour tout $\alpha = 1, \ldots, p$ alors $\{A^2\}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} \wedge \bigwedge_{\substack{\gamma=1,\ldots,p \\ \gamma \neq \alpha,\beta}} (a_{\alpha\gamma} \circ a_{\gamma\beta}) < a_{\alpha\beta}$, c'est-à-dire $A > A^2$ d'où on déduit : $A > A^2 > \ldots > A^{p-1} = A^p = \ldots$

Si S est l'algèbre booléenne avec deux éléments, 0 et 1 et $(\circ, \wedge, <, e)$ sont respectivement $(., \cup, \geqslant, 1)$, alors la matrice A^{p-1} représente par exemple la matrice d'incidence de la fermeture transitive d'un graphe fini, dont la matrice unitaire d'incidence est A ([4]). Plus généralement, on peut considérer S l'algèbre booléenne des fonctions booléennes définies sur le produit cartésien $\{0, 1\}^n$ avec les valeurs dans $\{0, 1\}$.

Si l'on suppose que $S = \{x \mid x \geqslant 0\} \cup \{\infty\}$ et $(\circ, \wedge, <, e)$ sont donnés par $(+, \min, \leqslant, 0)$, alors la matrice A^{p-1} représente la matrice des plus petites distances entre les sommets du réseau ; si $(\circ, \wedge, <, e)$ sont $(\min, \max, \geqslant, \infty)$ la matrice A^{p-1} représente la matrice des capacités maximales de transport (voir [1], [5], [7], [8], [9]).

Dans le premier cas $a_{\alpha\alpha} = 0$; $a_{\alpha\beta} = l(x_\alpha, x_\beta)$ si $(x_\alpha, x_\beta) \in U$ et $a_{\alpha\beta} = \infty$ si $(x_\alpha, x_\beta) \notin U$ et dans le dernier cas $a_{\alpha\alpha} = \infty$; $a_{\alpha\beta} = c(x_\alpha, x_\beta)$ si $(x_\alpha, x_\beta) \in U$ et $a_{\alpha\beta} = 0$ si $(x_\alpha, x_\beta) \notin U$, U étant l'ensemble des arcs du réseau.

II. Dans ce qui suit, on présente des théorèmes d'élimination des noeuds qui nous permettent d'obtenir économiquement (du point de vue du volume des calculs) une sous-matrice de la matrice A^{p-1}, où la matrice A est la matrice d'incidence associée à un réseau donné.

Pour la matrice $A = \{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,\ldots,p}$ avec $a_{\alpha\beta} \in S$ et $a_{\alpha\alpha} = e$, on définit l'opérateur d'élimination du sommet x_p par l'égalité : $(Ex_p)\, A = B$ si $B = \{b_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,\ldots,p-1}$ et $b_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} \wedge (a_{\alpha p} \circ a_{p\beta})$ pour tout $\alpha, \beta = 1, \ldots, p-1$.

Théorème 1. *On a* $\{((Ex_p)A)^{p-2}\}_{\alpha\beta} = \{A^{p-1}\}_{\alpha\beta}$ *pour tout* $\alpha, \beta = 1, \ldots, p-1$.

Démonstration. Dans le travail [6], B. Roy a introduit les opérateurs matriciels $T_{ij}^{(k)}$ qui sont définis de la manière suivante : $\{T_{ij}^{(k)}(A)\}_{ij} = a_{ij} \wedge (a_{ik} \circ a_{kj})$ et $\{T_{ij}^{(k)}(A)\}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$ pour tout $\alpha, \beta = 1, \ldots, p$ et $(\alpha, \beta) \neq (i, j)$.

Si l'on note $T_p = \prod_{i,j=1}^{p} T_{ij}^{(p)} = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{p-1} T_{ij}^{(p)}$, le produit des opérateurs $T_{ij}^{(p)}$ est commutatif et dans [8] on démontre que $(T_p(A))^{p-1} = A^{p-1}$ par l'itération de l'égalité $(T_{ij}^{(p)}(A))^{p-1} = A^{p-1}$ qui a lieu pour tout $i, j = 1, \ldots, p$.

Mais $\{(Ex_p)\, A\}_{\alpha\beta} = \{T_p(A)\}_{\alpha\beta}$ pour $\alpha, \beta = 1, \ldots, p-1$; aussi $\{((Ex_p)A)^2\}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} \wedge (a_{\alpha p} \circ a_{p\beta}) \wedge \bigwedge_{i=1,\ldots,p-1} [(a_{\alpha i} \wedge (a_{\alpha p} \circ a_{pi})) \circ (a_{i\beta} \wedge (a_{ip} \circ a_{p\beta}))] = a_{\alpha\beta} \wedge (a_{\alpha p} \circ a_{p\beta}) \wedge \bigwedge_{i=1,\ldots,p} [(a_{\alpha i} \wedge (a_{\alpha p} \circ a_{pi})) \circ (a_{i\beta} \wedge (a_{ip} \circ a_{p\beta}))] = \{(T_p(A))^2\}_{\alpha\beta}$ pour $\alpha, \beta = 1, \ldots, p-1$.

Si l'on suppose que $\{((Ex_p)\, A)^{2^n}\}_{\alpha\beta} > \{(T_p(A))^{2^n}\}_{\alpha\beta}$ pour tout $\alpha, \beta = 1, \ldots, p-1$, alors $\{((Ex_p)A)^{2^{n+1}}\}_{\alpha\beta} = \{((Ex_p)A)^{2^n}\}_{\alpha\beta} \wedge \bigwedge_{\substack{i=1,\ldots,p-1 \\ i \neq \alpha,\beta}} [\{((Ex_p)A)^{2^n}\}_{\alpha i} \circ \{((Ex_p)A)^{2^n}\}_{i\beta}] > \{(T_p(A))^{2^n}\}_{\alpha\beta} \wedge \bigwedge_{\substack{i=1,\ldots,p-1 \\ i \neq \alpha,\beta}} [\{(T_p(A))^{2^n}\}_{\alpha i} \circ \{(T_p(A))^{2^n}\}_{i\beta}] > \{(T_p(A))^{2^n}\}_{\alpha\beta} \wedge \bigwedge_{\substack{i=1,\ldots,p \\ i \neq \alpha,\beta}} (\{(T_p(A))^{2^n}\}_{\alpha i} \circ \{(T_p(A))^{2^n}\}_{i\beta}) = \{(T_p(A))^{2^{n+1}}\}_{\alpha\beta}$, donc $\{((Ex_p)\, A)^{2^n}\}_{\alpha\beta} > \{(T_p(A))^{2^n}\}_{\alpha\beta}$ pour tout $n \in N$ et $\alpha, \beta = 1, \ldots, p-1$.

Pour n suffissament grand, on obtient : $\{((Ex_p)\, A)^{p-2}\}_{\alpha\beta} > \{A^{p-1}\}_{\alpha\beta}$ pour $\alpha, \beta = 1, \ldots, p-1$.

Pour démontrer l'inégalité contraire, nous considérons l'expression $a_{\alpha\gamma_1} \circ a_{\gamma_1\gamma_2} \circ \ldots \circ a_{\gamma_r\beta}$ avec $\max(\alpha, \beta) < p-1$; $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r \in \{1, 2, \ldots, p\} \setminus \{\alpha, \beta\}$ et $\gamma_1 \neq \gamma_2$; $\gamma_1 \neq \gamma_3$; ... ; $\gamma_{r-1} \neq \gamma_r$. Si l'on a $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r \neq p$, alors

$$a_{\alpha\gamma_1} \circ a_{\gamma_1\gamma_2} \circ \ldots \circ a_{\gamma_r\beta} > (a_{\alpha\gamma_1} \wedge (a_{\alpha p} \circ a_{p\gamma_1})) \circ (a_{\gamma_1\gamma_2} \wedge (a_{\gamma_1 p} \circ a_{p\gamma_2})) \circ \ldots \circ (a_{\gamma_r\beta} \wedge (a_{\gamma_r p} \circ a_{p\beta})) = \{(Ex_p)\, A\}_{\alpha\gamma_1} \circ \{(Ex_p)\, A\}_{\gamma_1\gamma_2} \circ \ldots \circ \{(Ex_p)\, A\}_{\gamma_r\beta} > \{((Ex_p)A)^{p-2}\}_{\alpha\beta}.$$

S'il y a un indice $\gamma_i = p$, alors

$$a_{\alpha\gamma_1} \circ \ldots \circ a_{\gamma_{i-1}p} \circ a_{p\gamma_{i+1}} \circ \ldots \circ a_{\gamma_r\beta} > (a_{\alpha\gamma_1} \wedge (a_{\alpha p} \circ a_{p\gamma_1})) \circ \ldots \circ (a_{\gamma_{i-1}\gamma_{i+1}} \wedge (a_{\gamma_{i-1}p} \circ a_{p\gamma_{i+1}})) \circ \ldots \circ (a_{\gamma_r\beta} \wedge (a_{\gamma_r p} \circ a_{p\beta})) = \{(Ex_p)\, A\}_{\alpha\gamma_1} \circ \ldots \circ \{(Ex_p)\, A\}_{\gamma_{i-1}\gamma_{i+1}} \circ \ldots \circ \{(Ex_p)\, A\}_{\gamma_r\beta} > ((Ex_p)\, A)^{p-2})_{\alpha\beta}.$$

Evidemment $a_{\alpha\beta} > \{((Ex_p)\, A)^{p-2}\}_{\alpha\beta}$ et par conséquent $\{A^{p-1}\}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} \wedge \bigwedge_{r} \bigwedge_{(\gamma_1,\ldots,\gamma_r)} (a_{\alpha\gamma_1} \circ a_{\gamma_1\gamma_2} \circ \ldots \circ a_{\gamma_r\beta}) > \{(Ex_p)\, A)^{p-2}\}_{\alpha\beta}$, où $r = 1, \ldots, p-2$ et $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r) \in \{1, \ldots, p\} \setminus \{\alpha, \beta\}$, $\gamma_1 \neq \gamma_2, \ldots, \gamma_{r-1} \neq \gamma_r$, c'est-à-dire $\{((Ex_p)A)^{p-2}\}_{\alpha\beta} = \{A^{p-1}\}_{\alpha\beta}$ pour tout $\alpha, \beta = 1, \ldots, p-1$. C.Q.F.D.

En s'appuyant sur cette relation, on déduit par l'itération que $\{(Ex_{k+1}, \ldots, x_p)\, A)^{k-1}\}_{\alpha\beta} = \{A^{p-1}\}_{\alpha\beta}$ pour tout $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, k$ et $k = 2, 3, \ldots, p-1$ où, par définition, $(Ex_{k+1}, \ldots, x_p)\, A = (Ex_{k+1})(Ex_{k+2}) \ldots (Ex_p)\, A$.

Lemme. *Pour tout* $\alpha, \beta = 1, \ldots, k$ *on a*

$$\{(Ex_{k+1}, \ldots, x_p)\, A\}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} \wedge \bigwedge_{r} \bigwedge_{(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_r)} (a_{\alpha\gamma_1} \circ a_{\gamma_1\gamma_2} \circ \ldots \circ a_{\gamma_r\beta}) \tag{1}$$

où $r = 1, \ldots, p-k$ et $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r) \in \{k+1, \ldots, p\}$, $\gamma_1 \neq \gamma_2, \ldots, \gamma_{r-1} \neq \gamma_r$.

La démonstration se fait par induction par rapport à $p-k$:

Si $p-k=1$, nous obtenons la définition. Si l'égalité (1) est vraie, alors pour tout $\alpha, \beta = 1, \ldots, k-1$ on a $\{(Ex_k, \ldots, x_p) A\}_{\alpha\beta} = \{(Ex_{k+1}, \ldots, x_p) A\}_{\alpha\beta} \wedge (\{(Ex_{k+1}, \ldots, x_p) A\}_{\alpha k} \circ \{(Ex_{k+1}, \ldots, x_p) A\}_{k\beta}) = a_{\alpha\beta} \wedge \bigwedge_r \bigwedge_{(\gamma_1,\ldots,\gamma_r)} (a_{\alpha\gamma_1} \circ a_{\gamma_1\gamma_2} \circ \ldots \circ a_{\gamma_r\beta}) \wedge [a_{\alpha k} \wedge \bigwedge_s \bigwedge_{(\delta_1,\ldots,\delta_s)} (a_{\alpha\delta_1} \circ a_{\delta_1\delta_2} \circ \ldots \circ a_{\delta_s k})] \circ [a_{k\beta} \wedge \bigwedge_t \bigwedge_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_t)} (a_{k\varepsilon_1} \circ a_{\varepsilon_1\varepsilon_2} \circ \ldots \circ a_{\varepsilon_t\beta})] = a_{\alpha\beta} \wedge \bigwedge_r \bigwedge_{(\gamma_1,\ldots,\gamma_r)} (a_{\alpha\gamma_1} \circ a_{\gamma_1\gamma_2} \circ \ldots \circ a_{\gamma_r\beta}) \wedge (a_{\alpha k} \circ a_{k\beta}) \wedge \bigwedge_t \bigwedge_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_t)} (a_{\alpha k} \circ a_{k\varepsilon_1} \circ \ldots \circ a_{\varepsilon_t\beta}) \wedge \bigwedge_s \bigwedge_{(\delta_1,\ldots,\delta_s)} (a_{\alpha\delta_1} \circ a_{\delta_1\delta_2} \circ \ldots \circ a_{\delta_s k} \circ a_{k\beta}) \wedge [\bigwedge_s \bigwedge_{(\delta_1,\ldots,\delta_s)} (a_{\alpha\delta_1} \circ a_{\delta_1\delta_2} \circ \ldots \circ a_{\delta_s k})] \circ [\bigwedge_t \bigwedge_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_t)} (a_{k\varepsilon_1} \circ a_{\varepsilon_1\varepsilon_2} \circ \ldots \circ a_{\varepsilon_t\beta})]$, où $r, s, t = 1, \ldots, p-k$ et $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$, $(\delta_1, \ldots, \delta_s)$, $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t) \in \{k+1, \ldots, p\}$, $\gamma_1 \neq \gamma_2, \ldots, \gamma_{r-1} \neq \gamma_r$, $\delta_1 \neq \delta_2, \ldots, \delta_{s-1} \neq \delta_s$, $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{t-1} \neq \varepsilon_t$.

Dans cette somme, nous avons $\bigwedge_r \bigwedge_{(\gamma_1,\ldots,\gamma_r)} (a_{\alpha\gamma_1} \circ a_{\gamma_1\gamma_2} \circ \ldots \circ a_{\gamma_r\beta}) \wedge [\bigwedge_s \bigwedge_{(\delta_1,\ldots,\delta_s)} (a_{\alpha\delta_1} \circ a_{\delta_1\delta_2} \circ \ldots \circ a_{\delta_s k})] \circ [\bigwedge_t \bigwedge_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_t)} (a_{k\varepsilon_1} \circ a_{\varepsilon_1\varepsilon_2} \circ \ldots \circ a_{\varepsilon_t\beta})] = \bigwedge_r \bigwedge_{(\gamma_1,\ldots,\gamma_r)} (a_{\alpha\gamma_1} \circ a_{\gamma_1\gamma_2} \circ \ldots a_{\gamma_r\beta}) \wedge \bigwedge_{(s,t)} \bigwedge_{(\delta_1,\ldots,\varepsilon_t)} (a_{\alpha\delta_1} \circ a_{\delta_1\delta_2} \circ \ldots \circ a_{\delta_s k} \circ a_{k\varepsilon_1} \circ a_{\varepsilon_1\varepsilon_2} \circ \ldots \circ a_{\varepsilon_t\beta})]$ où $(s, t) \in \{1, \ldots, p-k\}$, $s+t \leqslant p-k$ et $(\delta_1, \ldots, \delta_s, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t) \in \{k+1, \ldots, p\}$, $\delta_1 \neq \delta_2 \ldots, \delta_1 \neq \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{t-1} \neq \varepsilon_t$.

En effet, s'il existe $\delta_i = \varepsilon_j$ (par exemple dans le cas où $s+t > p-k$), alors, en vertu de la loi d'absorption on a:

$$(a_{\alpha\delta_1} \circ a_{\delta_1\delta_2} \circ \ldots \circ a_{\delta_{i-1}\delta_i} \circ a_{\delta_i\varepsilon_{j+1}} \circ \ldots \circ a_{\varepsilon_t\beta}) \wedge (a_{\alpha\delta_1} \circ \ldots \circ a_{\delta_i\delta_{i+1}} \circ \ldots \circ a_{\delta_s k} \circ a_{k\varepsilon_1} \circ \ldots \circ a_{\varepsilon_{j-1}\varepsilon_j} \circ a_{\varepsilon_j\varepsilon_{j+1}} \circ \ldots \circ a_{\varepsilon_t\beta}) = a_{\alpha\delta_1} \circ a_{\delta_1\delta_2} \circ \ldots \circ a_{\delta_{i-1}\delta_i} \circ a_{\delta_i\varepsilon_{j+1}} \circ \ldots \circ a_{\varepsilon_t\beta}$$

(ce terme se trouve dans la somme $\bigwedge_r \bigwedge_{(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r)} (a_{\alpha\gamma_1} \circ a_{\gamma_1\gamma_2} \circ \ldots \circ a_{\gamma_r\beta})$).

En conclusion $\{(Ex_k, \ldots, x_p) A\}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} \wedge \bigwedge_r \bigwedge_{(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r)} (a_{\alpha\gamma_1} \circ a_{\gamma_1\gamma_2} \circ \ldots \circ a_{\gamma_r\beta})$ où $r = 1, \ldots, p-k+1$ et $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r) \in \{k, \ldots, p\}$, $\gamma_1 \neq \gamma_2, \ldots, \gamma_{r-1} \neq \gamma_r$ pour tout $\alpha, \beta = 1, \ldots, k-1$, C.Q.F.D.

Etant donnée la matrice $A = \{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,\ldots,p}$ nous délimitons pour un indice $2 \leqslant k \leqslant p-1$ les sous-matrices $A_{(k,k)} = \{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,\ldots,k}$, $B_{(k,p-k)} = \{a_{\alpha\beta}\}_{\substack{\alpha=1,\ldots,k \\ \beta=k+1,\ldots,p}}$ $C_{(p-k,p-k)} = \{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=k+1,\ldots,p}$ et $D_{(p-k,k)} = \{a_{\alpha\beta}\}_{\substack{\alpha=k+1,\ldots,p \\ \beta=1,\ldots,k}}$ (voir la figure 1).

Théorème 2. *On a*

$(Ex_{k+1}, \ldots, x_p) A = A_{(k,k)} \wedge (B_{(k,p-k)} \times C^{p-k-1}_{(p-k,p-k)} \times D_{(p-k,k)})$ *si l'on définit l'opération matricielle* $A \wedge B$ *par l'égalité* $\{A \wedge B\}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} \wedge b_{\alpha\beta}$ *pour tout* α, β.

$$A = \left\| \begin{array}{c:c} e & \\ A_{(k,k)} & B_{(k,p-k)} \\ \hdashline D_{(p-k,k)} & C_{(p-k,p-k)} \\ & e \end{array} \right\|$$

Figure 1

Démonstration. Considérons l'élément $\{A_{(k,k)} \wedge [B_{(k,p-k)} \times C^{p-k-1}_{(p-k,p-k)} \times D_{(p-k,k)}]\}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} \wedge \bigwedge_{(i,j)} [a_{\alpha i} \circ \{C^{p-k-1}_{(p-k,p-k)}\}_{ij} \circ a_{j\beta}] = a_{\alpha\beta} \wedge \bigwedge_{(i,j)} [a_{\alpha i} \circ (a_{ij} \wedge \bigwedge_r \bigwedge_{(\gamma_1,\ldots,\gamma_r)} (a_{i\gamma_1} \circ a_{\gamma_1\gamma_2} \circ \ldots \circ a_{\gamma_r j})) \circ a_{j\beta}] = a_{\alpha\beta} \wedge \bigwedge_{(i)} (a_{\alpha i} \circ a_{i\beta}) \wedge \bigwedge_{\substack{(i,j) \\ i \neq j}} (a_{\alpha i} \circ a_{ij} \circ a_{j\beta}) \wedge \bigwedge_{\substack{(i,j) \\ i \neq j}} \bigwedge_r \bigwedge_{(\gamma_1,\ldots,\gamma_r)} (a_{\alpha i} \circ a_{i\gamma_1} \circ \ldots \circ a_{\gamma_r j} \circ a_{j\beta})$ où $(i, j) \in \{k+1, \ldots, p\}$, $r = 1, \ldots, \ldots, p-k-2$, $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r) \in \{k+1, \ldots, p\}$, $\gamma_1 \neq \gamma_2, \ldots, \gamma_{r-1} \neq \gamma_r$, puisque $a_{ii} = e$.

Dans le cas $i = \gamma_s$, le terme $a_{\alpha i} \circ a_{i\gamma_1} \circ \ldots \circ a_{\gamma_{s-1} i} \circ a_{i\gamma_{s+1}} \circ \ldots a_{\gamma_r j} \circ a_{j\beta}$ est absorbé par le terme $a_{\alpha i} \circ a_{i\gamma_{s+1}} \circ \ldots \circ a_{\gamma_r j} \circ a_{j\beta}$ qui appartient aussi à la somme $\bigwedge_{\substack{(i,j) \\ i \neq j}} \bigwedge_r \bigwedge_{(\gamma_1,\ldots,\gamma_r)} (a_{\alpha i} \circ a_{i\gamma_1} \circ \ldots \circ a_{\gamma_r j} \circ a_{j\beta})$ ou à la somme $\bigwedge_{\substack{(i,j) \\ i \neq j}} (a_{\alpha i} \circ a_{ij} \circ a_{j\beta})$ (dans le cas $s = r$).

Une conclusion analogue s'obtient dans le cas où $j = \gamma_t$, donc nous pouvons considérer $i, j \neq \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$, c'est-à-dire $\{A_{(k,k)} \wedge (B_{(k,p-k)} \times C^{p-k-1}_{(p-k,p-k)} \times D_{(p-k,k)})\}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} \wedge \bigwedge_r \bigwedge_{(\gamma_1,\ldots,\gamma_r)} (a_{\alpha\gamma_1} \circ a_{\gamma_1\gamma_2} \circ \ldots \circ a_{\gamma_r\beta})$ où $r = 1, \ldots, p-k$ et $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r) \in \{k+1, \ldots, p\}$, $\gamma_1 \neq \gamma_2, \ldots, \gamma_{r-1} \neq \gamma_r$ pour tout $\alpha, \beta = 1, \ldots, k$.

Compte tenu du lemme, le théorème résulte. C. Q. F. D.

Pour calculer la matrice $C^{p-k-1}_{(p-k,p-k)}$ on peut employer les méthodes proposées dans [7], [8], qui vont au résultat plus vite que par la méthode de la détermination de la suite $\{C^{2^n}_{(p-k,p-k)}\}_{n \in N}$.

Il résulte encore que:

$\{A^{p-1}\}_{12} = \{(Ex_3)(Ex_4, x_5) \ldots (Ex_{p-1}, x_p) A\}_{12}$ si p est impair et

$\{A^{p-1}\}_{12} = \{(Ex_3, x_4) \ldots (Ex_{p-1}, x_p) A\}_{12}$ si p est pair et un résultat analogue pour $\{A^{p-1}\}_{21}$, l'opération d'élimination d'un ou de deux noeuds ne nécessitant plus la détermination de certaines puissances de la matrice $C_{(p-k,p-k)}$.

BIBLIOGRAFIE

1. Berge C. — *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, Paris, 1963.
2. Brown F. M. — *A node-elimination theorem for Boolean matrices*, IEEE Transactions on electronic computers, EC-12, No. 2(April, 1963).
3. Lunts A. G. — *Méthodes algébriques d'analyse et de synthèse des schémas à contacts* (en russe), Izvestiia Akad. Nauk SSSR, Série math. 1952, pp. 405–427.
4. Maghout K. — *Applications de l'algèbre de Boole à la théorie des graphes et aux programmes linéaires et quadratiques*, Cahiers du Centre d'études de Rech. Opérationnelle, vol. 5, No. 1–2, 1963, Bruxelles.
5. Moisil Gr. C. — *Asupra unor reprezentări ale grafurilor ce intervin în probleme de economia transporturilor*, Comunicările Acad. R.P.R., Tome X, No. 8, 1960.
6. Roy B. — *Cheminement et connexité dans les graphes. Application aux problèmes d'ordonnancement*, Metra, Série Spéciale, No. 1, 1962.
7. Tomescu I. — *Sur les méthodes matricielles dans la théorie des réseaux*, C.R. Ac. Sc. Paris, Tome 263, pp. 826–829, 1966.
8. Tomescu I. — *Sur l'algorithme matriciel de B. Roy*, Revue Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, série rouge, No. 7, 1968.
9. Nolin L. — *Traitement des données grenpées*, Publication de l'Institut Blaise Pascal, Paris, Mai 1964.

TEOREME DE ELIMINARE A NODURILOR ÎN TEORIA REȚELELOR

Rezumat

În această lucrare este prezentată legătura dintre metodele de eliminare a nodurilor ale lui A. G. Lunts [3] și F. Brown [2] și se generalizează aceste metode de la cazul boolean la cazul rețelelor descrise prin matrice cu elemente într-un semigrup semilaticial ordonat.

RECENZII

INSTITUT DE FRANCE: *Troisième Centenaire de l'Académie des Sciences*. Tome 1–2. Paris: Gauthier-Villars 1967. Tome 1: XIV + 496 p. Tome 2: 482 p.

Franța a sărbătorit la 22 decembrie 1966 un eveniment de mare răsunet pentru întreaga lume — trei sute de ani de existență a Academiei de Științe din Paris. Cu acest prilej, diferite organizații internaționale, academii, universități, instituții științifice au trimis spre academia sărbătorită, omagiul lor. În legătură cu aceasta, trebuie să subliniem că darul României este indicat cu o mențiune specială (aflată în josul paginii XII, vol. I) — cele două medalii de aur trimise de țara noastră (una din partea Academiei Republicii Socialiste România și alta din partea Universității din București) — sînt așa cum se spune în sublinierea la care ne-am referit mai sus, „o dovadă materială a legăturilor care unesc pe savanții români și francezi".

Primul din cele două volume omagiale tipărite cu prilejul menționat începe cu o amplă prezentare a istoricului Academiei de Științe; de reținut că se insistă nu numai asupra datelor și numelor care s-au impus începînd cu anul înființării ei, ci sînt amintite numele acelora care au contribuit, prin activitatea și prestigiul lor, la pregătirea cadrului social-științific care a făcut posibilă fondarea, de către Colbert, a acestui însemnat for de cultură. În această ordine de idei Pierre Gauja menționează în primul rînd pe Descartes, Père Mersenne, Claude Mydorge, Claude Hardy etc. În continuare, Lucien Plantefol prezintă, în cadrul a șase capitole, o expunere amplă cu privire la modul de organizare a Academiei de Științe, problemele mai importante care s-au conturat și discutat în cadrul ei, legăturile acestei Academii cu instituții științifice din alte țări, observații cu privire la caracterul publicațiilor ei etc.

Partea a doua a primului volum, ca și întreg volumul al doilea, conține expunerile prezentate de cele 12 secții care funcționează în cadrul Academiei: Matematica, Mecanica, Astronomia, Geografia și navigația, Fizica, Chimia, Mineralogia și geologia, Botanica, Zoologia, Economia rurală, Medicina și chirurgia, Aplicațiile științei în industrie.

Raportul secției de matematică a fost prezentat de Paul Lévy și el a fost întocmit cu colaborarea lui Henri Cartan, J. Dieudonné, Charles Ehresmann, Laurent Schwartz și Paul Vincensini. În cadrul acestui raport sînt prezentate, cu multe detalii prețioase, problemele și realizările mai importante care s-au impus în matematică în decursul celor trei secole, realizări indisolubil legate de activitatea impresionantă a Academiei de Științe din Paris.

Olga Costinescu

J. C. R. LICKLIDER: *Libraries of the future*. 3rd ed. Cambridge Mass.: The Massachusetts Institute of Technology Press 1966. XVIII + 219 p.

Cartea este raportul final asupra studiului întreprins timp de doi ani (nov. 1961 — nov. 1963) de un grup de ingineri și psihologi de la Bolt Beranek și New-