associative, commutative, and distributive and the last one associative, commutative, and distributive with respect to addition.

The above considered products are obtained by preserving the places of all indices u, v, w, and i, j, k.

By keeping only the places of the indices u, v, w we obtain another classification containing as a very special case the Cayley-Scott's product. Namely, if we consider

$$c_{uvw} = \varepsilon_{ijk}\, a_{uij}\, b_{kvw}$$

with

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{for } i = j = k \\ 0 & \text{in the other cases,} \end{cases}$$

we get

$$c_{uvw} = a_{uik}\, b_{kvw}.$$

REFERENCES

1. Brânzei, M. et. Reischer, C. — *Functions de matrices à trois dimensions*. Mathematica, 9(32), (1967), 219—224.
2. Cayley, A. — *On the notations and properties of certain functions resolvable into a series of determinants*. Trans. Cambridge Philos. Soc. 8, (1842/9), 85—88.
3. Oldenburger, R. — *Composition and rank of n-way matrices and multilinear forms*. Ann. Math. 35 (1934), 622—657.
4. Reischer, C. and Brânzei, M. — *Asupra matricelor tridimensionale*. An. şt. Univ. Iaşi, T. XIII, 1, (1967), 29—32.
5. Rice, L. H. — *P-way determinants with an application to transvectants*. Amer. J. Math. 40 (1918), 242—262.
6. Sokolov, N. N. — *Prostransvennye matricy i ih priloženija*. Gos. izd. fiz. mat. lit. Moskva (1960).
7. Sokolov, N. N. — *Ob operacijah nad mnogomernymi matricami*. DAN SSSR 163(6), (1965), 1322—1325.
8. Scott, R. F. — *On cubic determinants and other determinants of higher class and on determinants of alternate numbers*. Proc. London Math. Soc. (1), 11, (1879/80), 71—79.

ASUPRA PRODUSULUI A DOUĂ MATRICE TRIDIMENSIONALE

Rezumat

Folosind simboli scalari ε_{ijk} şi păstrînd locurile indicilor de sumare şi liberi s-au obţinut 4 clase distincte de produse pentru două matrice tridimensionale şi astfel ca matricea produs să fie tot tridimensională.

Dacă se păstrează numai locurile indicilor liberi se poate obţine o altă clasificare care conţine ca un caz particular produsul introdus de Cayley-Scott.

SPAŢIUL SPINORIAL

DE

AGNETA VESCAN

În lucrările anterioare am introdus noţiunea de spaţiu spinorial în felul următor: Fie R_n un spaţiu liniar euclidian complex n-dimensional, iar C_n algebra spinorilor din acest spaţiu. Această algebră este $m = 2^n$ dimensională şi poate fi privită ca un spaţiu liniar, formînd spaţiul spinorial S_{2^n}. Vectorii din acest spaţiu sînt spinori, iar tensorii spin-tensori. (Vezi [5], [7]). Orice spinor poate fi scris sub forma

$$\varphi = \varphi^0 + \sum_{i_1} \varphi^{i_1} \underset{(1)}{\vec{e}_{i_1}} + \sum_{i_1 < i_2} \varphi^{i_1 i_2} \underset{(2)}{\vec{e}_{i_1 i_2}} + \dots + \varphi^{12\dots n} \underset{(n)}{\vec{e}_{12\dots n}},$$

descompus după multivectorii de bază. Să mai amintim că înmulţirea multivectorilor de bază se face după regula

$$\underset{(k)}{\vec{e}_{q_1 q_2 \dots q_k}} \underset{(l)}{\vec{e}_{j_1 j_2 \dots j_l}} = (-1)^N \underset{(s)}{\vec{e}_{q_1 q_2 \dots q_s}},$$

unde indicii $q_1, q_2, \dots, q_s$ sînt în ordine crescătoare şi sînt egali cu indicii $i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots j_l$, după ce s-au eliminat indicii care se întîlnesc de două ori, iar N este numărul inversiunilor prezentat de şirul de indici $i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_l$.

În spaţiul spinorial putem introduce şi produsul scalar cu ajutorul axiomelor cunoscute:

1. $(\varphi, \psi) = \overline{(\psi, \varphi)}$
2. $(\lambda\varphi, \psi) = \lambda(\varphi, \psi)$
3. $(\varphi_1 + \varphi_2, \psi) = (\varphi_1, \psi) + (\varphi_2, \psi)$
4. $(\varphi, \varphi) \geq 0$, egalitatea avînd loc atunci şi numai atunci cînd $\varphi = 0$.

deci spaţiul devine euclidian. De la baza spinorială dată se poate trece la o bază ortonormată prin procedeul cunoscut.

Fie φ^{ih} un spin-tensor de 2 ori contravariant.

Dacă

$$\varphi^{ih} = -\varphi^{hi},$$

atunci spin-tensorul îl vom denumi *bi-spinor* *. Cînd bi-spinorul este dat de doi spinori φ_1, φ_2, daţi într-o ordine determinată după formula

$$\varphi^{ih} = \varphi_1^i \varphi_2^h - \varphi_1^h \varphi_2^i,$$

el se numeşte *bi-spinor simplu*.

În general, dacă componentele unui spin-tensor de k ori contravariant sînt antisimetrice în toţi indicii, ei se numesc *multi-spinori* şi dacă în plus sînt date de k spinori $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$, într-o ordine determinată, după legea

$$\varphi^{i_1 i_2 \ldots i_k} = \begin{vmatrix} \varphi_1^{i_1} & \varphi_1^{i_2} & \ldots & \varphi_1^{i_k} \\ \varphi_2^{i_1} & \varphi_2^{i_2} & \ldots & \varphi_2^{i_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_k^{i_1} & \varphi_k^{i_2} & \ldots & \varphi_k^{i_k} \end{vmatrix}$$

îi vom numi *multi-spinori simpli*.

Un sistem format dintr-un scalar, dintr-un spinor, dintr-un bi-spinor, ..., dintr-un m-spinor:

$$a, \varphi^{i_1}, \varphi^{i_1 i_2}, \ldots, \varphi^{i_1 i_2 \ldots i_m},$$

unde $i_1, i_2, \ldots, i_m = 1, 2, \ldots, m$ este tot un spinor, pe care îl vom numi *spinor de ordin doi*. Aceşti spinori formează tot o algebră Clifford: C_m $2^m = 2^{2^n}$-dimensională, care poate fi privită ca un spaţiu liniar S_{2^n}, denumit de ordin doi, din spaţiul R_n.

Construcţia aceasta poate fi continuată.

Ne vom ocupa acum cu o clasă de spin-tensori de ordin superior din spaţiul spinorial S_{2^n}, definiţi ca produse de spinori de ordin inferior, introduşi în teoria fuziunii particulelor elementare.

Fie spinorii $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ şi să alcătuim produsele

$$\underset{(1)}{\varphi^{i_1}} \underset{(2)}{\varphi^{i_2}} \ldots \underset{(k)}{\varphi^{i_k}} = \varphi^{i_1 i_2 \ldots i_k} \tag{1}$$

unde $i_1, i_2, \ldots, i_k = 1, 2, \ldots, m$; $m = 2^n$. Obţinem astfel $m^k = 2^{nk}$ cantităţi

* Acest bi-spinor nu este identic cu bi-spinorul folosit în fizica teoretică. Bi-spinorul din fizică nu este altceva decît un spinor scris ca o sumă directă de un spinor par şi de un spinor impar. (Vezi [5], [7].)

care formează componentele unui tensor de k ori contravariant Φ. Într-adevăr fie $A = (a_j^k)$ matricea unei transformări liniare, atunci Φ se va transforma în felul următor

$$\varphi'^{i_1 i_2 \ldots i_k} = a_{i_1}^{i_1} \underset{(1)}{\varphi^{i_1}} a_{i_2}^{i_2} \underset{(2)}{\varphi^{i_2}} \ldots a_{i_k}^{i_k} \underset{(k)}{\varphi^{i_k}} = a^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{i_1 i_2 \ldots i_k} \varphi^{i_1 i_2 \ldots i_k},$$

unde $a^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ este elementul general dintr-o matrice multi-dimensională. (Vezi [6], [8].)

Ordinea în care luăm spinorii $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ este indiferentă, deoarece în produsul (1) putem schimba ordinea factorilor.

Dacă generatorul spin-tensorului Φ este un singur spinor φ, atunci spin-tensorul Φ este simetric în raport cu toţi indicii.

Este evident că spin-tensorul Φ poate fi privit ca generator de un spin-tensor de ordin p şi de un spin-tensor de ordin q, $p + q = k$; sau în general de un anumit număr de spin-tensori de ordin inferior.

Se poate defini suma spin-tensorilor Φ şi Ψ de forma considerată:

$$\begin{cases} \varphi^{i_1 i_2 \ldots i_k} = \underset{(1)}{\varphi^{i_1}} \underset{(2)}{\varphi^{i_2}} \ldots \underset{(k)}{\varphi^{i_k}} \\ \psi^{i_1 i_2 \ldots i_k} = \underset{(1)}{\psi^{i_1}} \underset{(2)}{\psi^{i_2}} \ldots \underset{(k)}{\psi^{i_k}} \end{cases} \tag{2}$$

în felul următor $X = \Phi + \Psi$, X fiind spin-tensorul dat de sume de spinori $\varphi_{(1)} + \psi_{(1)}; \varphi_{(2)} + \psi_{(2)}; \ldots; \varphi_{(k)} + \psi_{(k)}$, deci cu componentele

$$\chi^{i_1 i_2 \ldots i_k} = [\varphi_{(1)} + \psi_{(1)}]^{i_1} [\varphi_{(2)} + \psi_{(2)}]^{i_2} \ldots [\varphi_{(k)} + \psi_{(k)}]^{i_k}.$$

Observăm însă că această sumă nu este definită ca suma obişnuită între tensori. Suma astfel definită satisface toate proprietăţile cunoscute. Spin-tensorul nul se obţine din spinorul nul luat de k ori.

Între spin-tensorii definiţi ca produse de spinori se poate defini şi un produs în felul următor:

Fie spin-tensorii Φ şi Ψ de la (2) şi să considerăm produsul lor $\Phi\Psi = X$ dat de produsele de spinori $\varphi_{(1)}\psi_{(1)}; \varphi_{(2)}\psi_{(2)}; \ldots; \varphi_{(k)}\psi_{(k)}$, deci cu componentele

$$\chi^{i_1 i_2 \ldots i_k} = [\varphi_{(1)} \psi_{(1)}]^{i_1} [\varphi_{(2)} \psi_{(2)}]^{i_2} \ldots [\varphi_{(k)} \psi_{(k)}]^{i_k}.$$

Produsul este un spin-tensor de tipul considerat. Se arată uşor că el este şi asociativ.

Ca element-unitate se poate considera spin-tensorul obţinut din spinorul-unitate, avînd o componentă egală cu 1 şi restul 0:

$$\mathcal{J}^{i_1 i_2 \dots i_k} = \mathcal{J}^{i_1} \mathcal{J}^{i_2} \dots \mathcal{J}^{i_k},$$

deci numai $\mathcal{J}^{11\dots1}$ va fi 1, iar restul componentelor 0. Într-adevăr, să formăm produsul $\Phi\mathcal{J}$:

$$[\varphi_{(1)}\mathcal{J}]^{i_1}[\varphi_{(2)}\mathcal{J}]^{i_2}\dots[\varphi_{(k)}\mathcal{J}]^{i_k} = \varphi^{i_1}_{(1)}\varphi^{i_2}_{(2)}\dots\varphi^{i_k}_{(k)} = \varphi^{i_1 i_2 \dots i_k}$$

Dacă spinorii $\varphi_{(1)}, \varphi_{(2)}, \dots, \varphi_{(k)}$ au invers, atunci spin-tensorul Φ, format cu ajutorul lor, va avea invers acesta fiind dat de inversele spinorilor $\varphi_{(1)}, \varphi_{(2)}, \dots, \varphi_{(k)}$:

$$\overset{(-1)}{\varphi}{}^{i_1 i_2 \dots i_k} = \overset{(-1)}{\varphi}{}^{i_1}_{(1)}\overset{(-1)}{\varphi}{}^{i_2}_{(2)}\dots\overset{(-1)}{\varphi}{}^{i_k}_{(k)}.$$

Într-adevăr, produsul lui Φ cu Φ^{-1} ne va da succesiv

$$\varphi^{i_1 i_2 \dots i_k}\overset{(-1)}{\varphi}{}^{i_1 i_2 \dots i_k} = [\varphi_{(1)}\overset{(-1)}{\varphi}_{(1)}]^{i_1}[\varphi_{(2)}\overset{(-1)}{\varphi}_{(2)}]^{i_2}\dots[\varphi_{(k)}\overset{(-1)}{\varphi}_{(k)}]^{i_k} = \mathcal{J}^{i_1}\mathcal{J}^{i_2}\dots\mathcal{J}^{i_k}\mathcal{J}^{i_1 i_2 \dots i_k}.$$

În general, deci, nu există spin-tensor invers de tipul considerat, față de înmulțirea definită mai sus.

Prin produsul lui Φ cu scalarul α vom înțelege spin-tensorul cu componentele $\alpha\varphi^{i_1 i_2 \dots i_k}$ dat de spinorii $\varphi_{(1)}, \varphi_{(2)}, \dots, \varphi_{(k)}$, unul fiind înmulțit cu scalarul α.

Produsul cu un scalar posedă proprietățile obișnuite.

Se pot demonstra ușor și proprietățile de distributivitate între operațiile definite.

Mulțimea spin-tensorilor, față de operațiile definite mai inainte, formează deci o algebră liniară.

Vom cerceta acum spin-tensorii dați ca produse de spinori, din alt punct de vedere.

Să considerăm mulțimea spin-tensorilor de k ori contravarianți din spațiul R_m. După cum se știe această mulțime formează un spațiu liniar R_k, $h = m^k = 2^{n k}$-dimensional: spin-tensorii de bază fiind cei cu cîte o componentă egală cu 1, iar restul 0.

Printre spin-tensorii (1) se află și acești spin-tensori de bază; ei se obțin formînd spin-tensorul de tipul (1) cu ajutorul unui spinor de bază: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{m-1}$ (vezi [5], [7]) luînd pe fiecare de k ori. În consecință, formînd sistemul liniar generat de spin-tensorii de tipul (1) obținem tot spațiul R_k al spin-tensorilor de k ori contravarianți.

Spin-tensorii simetrici de k ori contravarianți formează un sub-spațiu în R_k care poate fi construit formînd toate combinațiile liniare ale spin-tensorilor de tip (1) dați de un singur spinor $\varphi = \varphi^1 = \varphi^2 = \dots = \varphi^k$.

Se pot forma spin-tensori de ordin superior, folosind componentele covariante ale spinorilor $\varphi_{(1)}, \varphi_{(2)}, \dots, \varphi_{(k)}$. Obținem

$$\varphi_{(1)i_1}\varphi_{(2)i_2}\dots\varphi_{(k)i_k} = \varphi_{i_1 i_2 \dots i_k}.$$

Avem în acest caz legătura între componentele contravariante și cele covariante ale lui Φ exprimată cu ajutorul spin-tensorului fundamental c_{ik} (vezi [5].)

$$\varphi_{i_1 i_2 \dots i_k} = c_{i_1 j_1}\varphi^{j_1}_{(1)}c_{i_2 j_2}\varphi^{j_2}_{(2)}\dots c_{i_k j_k}\varphi^{j_k}_{(k)} = c_{i_1 j_1}c_{i_2 j_2}\dots c_{i_k j_k}\varphi^{j_1 j_2 \dots j_k}.$$

Spin-tensorii mieşti de ordin superior se obțin dintr-un anumit număr de componente contravariante și covariante ale spinorilor generatori.

În cazul unui spațiu pseudo-euclidian real $R^{(s)}_m$ complex-conjugatele spinorilor $\varphi_{(1)}, \varphi_{(2)}, \dots, \varphi_{(k)}$ satisfac, prin definiție, relațiile

$$\bar{\varphi}^{\dot\beta}_{(i)} = \pi^{\dot\beta}_{\alpha}\varphi^{\alpha}_{(i)},$$

avînd aici $(\varphi^{\alpha}) = (\varphi^{\alpha})'$, unde accentul înseamnă complex-conjugatul și φ^{α} se supune legii de transformare a spinorilor, dar cu matricea complex conjugată, iar $\pi^{\dot\beta}_{\alpha}$ este spin-tensorul fundamental din spațiul considerat (vezi [5].)

Atunci

$$\bar{\varphi}^{i_1 i_2 \dots i_k} = \bar{\varphi}^{i_1}_{(1)}\bar{\varphi}^{i_2}_{(2)}\dots\bar{\varphi}^{i_k}_{(k)}$$

va fi complex-conjugatul lui Φ. Într-adevăr avem

$$\bar{\varphi}^{i_1 i_2 \dots i_k} = \pi^{i_1}_{j_1}\varphi^{j_1}_{(1)}\pi^{i_2}_{j_2}\varphi^{j_2}_{(2)}\dots\pi^{i_k}_{j_k}\varphi^{j_k}_{(k)} = \pi^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_k}\varphi^{j_1 j_2 \dots j_k}.$$

Să vedem acum, *care vor fi componentele lui* $\bar{\Phi}$:

$$\bar{\varphi}^{i_1 i_2 \dots i_k} = \overline{\pi^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_k}\varphi^{j_1 j_2 \dots j_k}} = \overline{\pi^{i_1}_{j_1}\varphi^{j_1}_{(1)}}\;\overline{\pi^{i_2}_{j_2}\varphi^{j_2}_{(2)}}\dots\overline{\pi^{i_k}_{j_k}\varphi^{j_k}_{(k)}} =$$

$$= \pi^{i_1}_{j_1}\left(\pi^{i_1}_{j_1}\varphi^{j_1}_{(1)}\right)'\pi^{i_2}_{j_2}\left(\pi^{i_2}_{j_2}\varphi^{j_2}_{(2)}\right)'\dots\pi^{i_k}_{j_k}\left(\pi^{i_k}_{j_k}\varphi^{j_k}_{(k)}\right)' =$$

$$= \left(\pm\delta^{i_1}_{j_1}\varphi^{j_1}_{(1)}\right)\left(\pm\delta^{i_2}_{j_2}\varphi^{j_2}_{(2)}\right)\dots\left(\pm\delta^{i_k}_{j_k}\varphi^{j_k}_{(k)}\right) = \pm\varphi^{i_1 i_2 \dots i_k},$$

deci obținem spin-tensorul cu componentele $\pm\varphi^{i_1 i_2 \dots i_k}$.

La fel putem forma complex-conjugatele spin-tensorilor covarianți sau mieşti. De exemplu avem

$$\bar{\varphi}_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \bar{\varphi}_{(1) i_1} \bar{\varphi}_{(2) i_2} \cdots \bar{\varphi}_{(k) i_k} .$$

Spin-tensorii cu care ne-am ocupat în această lucrare satisfac o ecuație de tip Dirac (vezi [3], [6]) și sînt folosiți în fizica teoretică.

BIBLIOGRAFIE

1. Boerner H. — *Darstellungen von Gruppen*. Berlin, Springer, 1955.
2. Brauer R., Weyl H. — *Spinors in n dimensions*. Amer. Journ. Math. 57, (1935), p. 425—449.
3. Broglie L. de — *Théorie générale des particules à spin*. Paris, Gauthier-Villars, 1954.
4. Cartan E. — *Leçons sur la théorie des spineurs*. Vol. I, II, Paris, Hermann 1938.
5. Rașevski P. K. — *Teoria spinoroc*. UMN, t. X, 2(64), (1955).
6. Vescan A. — *Contribuțiuni la generalizarea noțiunii de spinor*. An. șt. Univ. Iași, Secț. I, Tom. IV, (1960), p. 523.
7. Vescan A. — *Algebra spinorilor*. An. șt. Univ. Iași, Secț. Ia, Matematică, Tom X, (1964).
8. Vescan A. — *Matrice multidimensionale*. An. șt. Univ. Iași, Secț. I, Tom XII, (1967), f. 1.

PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DE L'ESPACE SPINORIEL

Résumé

On a défini dans un espace spinoriel S_{2^n} les multispineurs et grace à eux l'espace spinoriel d'ordre deux $S_{2^{2n}}$. Puis on a étudié les spins-tenseurs k fois contravariants (covariants ou mixtes) construits comme produits de spineurs, en montrant qu'ils forment une algèbre linéaire. En considérant ensuite un espace pseudo-euclidien réel, on a défini le complexe conjugué d'un tel spin-tenseur. Les spin-tenseurs ainsi obtenus sont les solutions d'une équation du type Dirac, utilisée dans la théorie de la fusion des particules élémentaires.

ASUPRA UNOR TRANSFORMĂRI ALE INELELOR SLABE

DE

TUDORA LUCHIAN

Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Universității „Al. I. Cuza" din 26—28 octombrie 1967

1. În cîteva Note precedente [6]—[10] am studiat unele probleme ale inelelor slabe, noțiune introdusă de Al. Climescu [1], [2] prin următoarea definiție:

Se numește inel slab $\mathfrak{A}$ *un grup aditiv abelian* $\mathfrak{A}_+$, *în care se mai definește o operație, numită înmulțire — notată cu „ · " — care satisface relațiile*

$$(1) \qquad x \cdot 0 = x\varphi + c, \qquad (2) \qquad 0 \cdot x = x\psi + c, \qquad \forall\, x \in \mathfrak{A}$$

unde φ, ψ sînt endomorfisme ale grupului aditiv $\mathfrak{A}_+$, iar c un element fix (se observă că $c = 0 \cdot 0$); înmulțirea este legată de adunare prin legile de distributivitate slăbită

$$(3) \qquad x \cdot (y + z) + x \cdot 0 = x \cdot y + x \cdot z,$$

$$(4) \qquad (y + z) \cdot x + 0 \cdot x = y \cdot x + z \cdot x.$$

Din axiomele inelului slab se deduc relațiile:

$$(\alpha) \quad (-a) \cdot b = -(a \cdot b) + 2(0 \cdot b), \qquad (\alpha') \quad a \cdot (-b) = -(a \cdot b) + 2(a \cdot 0),$$

$$(\beta) \quad (a - b) \cdot z = a \cdot z - b \cdot z + 0 \cdot z, \qquad (\beta') \quad z \cdot (a - b) = z \cdot a - z \cdot b + z \cdot 0 .$$

Inelele obișnuite se obțin din definiția celor slabe pentru cazul $\varphi = \psi = 0$ endomorfismul nul, $c = 0$. Pentru $\varphi = \psi = I$ endomorfismul identic și $c = 0$, înmulțirea „ · " este „compunerea cere" utilizată de Perlis [11] și Jacobson [3], [4] în definirea radicalului Jacobson al unui inel asociativ. Un inel slab $\mathfrak{A}$ se numește *corp slab de specia I*, dacă este