$$\bar{\varphi}_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \bar{\varphi}_{(1) i_1} \bar{\varphi}_{(2) i_2} \cdots \bar{\varphi}_{(k) i_k} .$$

Spin-tensorii cu care ne-am ocupat în această lucrare satisfac o ecuație de tip Dirac (vezi [3], [6]) și sînt folosiți în fizica teoretică.

BIBLIOGRAFIE

1. Boerner H. — *Darstellungen von Gruppen*. Berlin, Springer, 1955.
2. Brauer R., Weyl H. — *Spinors in n dimensions*. Amer. Journ. Math. 57, (1935), p. 425–449.
3. Broglie L. de — *Théorie générale des particules à spin*. Paris, Gauthier-Villars, 1954.
4. Cartan E. — *Leçons sur la théorie des spineurs*. Vol. I, II, Paris, Hermann 1938.
5. Rașevski P. K. — *Teoria spinorov*, UMN, t. X, 2(64), (1955).
6. Vescan A. — *Contribuțiuni la generalizarea noțiunii de spinor*. An. șt. Univ. Iași, Secț. I, Tom. IV, (1960), p. 523.
7. Vescan A. — *Algebra spinorilor*. An. șt. Univ. Iași, Secț. I a. Matematică, Tom X, (1964).
8. Vescan A. — *Matrice multidimensionale*. An. șt. Univ. Iași, Secț. I, Tom XII, (1967), f. 1.

PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DE L'ESPACE SPINORIEL

Résumé

On a défini dans un espace spinoriel S_{2^n} les multispineurs et grace à eux l'espace spinoriel d'ordre deux $S_{2^{2n}}$. Puis on a étudié les spins-tenseurs k fois contravariants (covariants ou mixtes) construits comme produits de spineurs, en montrant qu'ils forment une algèbre linéaire. En considérant ensuite un espace pseudo-euclidien réel, on a défini le complexe conjugué d'un tel spin-tenseur. Les spin-tenseurs ainsi obtenus sont les solutions d'une équation du type Dirac, utilisée dans la théorie de la fusion des particules élémentaires.

ASUPRA UNOR TRANSFORMĂRI ALE INELELOR SLABE

DE

TUDORA LUCHIAN

Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Universității „Al. I. Cuza" din 26–28 octombrie 1967

1. În cîteva Note precedente [6]–[10] am studiat unele probleme ale inelelor slabe, noțiune introdusă de Al. Climescu [1], [2] prin următoarea definiție:

Se numește inel slab $\mathfrak{A}$ *un grup aditiv abelian* $\mathfrak{A}_+$, *în care se mai definește o operație, numită înmulțire — notată cu „ · " — care satisface relațiile*

$$(1) \qquad x \cdot 0 = x\varphi + c, \qquad (2) \qquad 0 \cdot x = x\psi + c, \qquad \forall\, x \in \mathfrak{A}$$

unde φ, ψ sînt endomorfisme ale grupului aditiv $\mathfrak{A}_+$, iar c un element fix (se observă că $c = 0 \cdot 0$); înmulțirea este legată de adunare prin legile de distributivitate slăbită

$$(3) \qquad x \cdot (y + z) + x \cdot 0 = x \cdot y + x \cdot z,$$

$$(4) \qquad (y + z) \cdot x + 0 \cdot x = y \cdot x + z \cdot x.$$

Din axiomele inelului slab se deduc relațiile:

$$(\alpha) \quad (-a) \cdot b = -(a \cdot b) + 2(0 \cdot b), \qquad (\alpha') \quad a \cdot (-b) = -(a \cdot b) + 2(a \cdot 0),$$

$$(\beta) \quad (a - b) \cdot z = a \cdot z - b \cdot z + 0 \cdot z, \qquad (\beta') \quad z \cdot (a - b) = z \cdot a - z \cdot b + z \cdot 0.$$

Inelele obișnuite se obțin din definiția celor slabe pentru cazul $\varphi = \psi = 0$ endomorfismul nul, $c = 0$. Pentru $\varphi = \psi = I$ endomorfismul identic și $c = 0$, înmulțirea „ · " este „compunerea cere" utilizată de Perlis [11] și Jacobson [3], [4] în definirea radicalului Jacobson al unui inel asociativ. Un inel slab $\mathfrak{A}$ se numește *corp slab de specia I*, dacă este

grup relativ la înmulțirea „ · ” și *corp slab de specia II-a*, dacă $\mathfrak{A}^{\cdot}$ are un element d cu proprietatea

$$x \cdot d = d \cdot x = d, \qquad \forall x \in \mathfrak{A}^{\cdot} \tag{5}$$

și $\mathfrak{A}^{\cdot} - \{d\}$ este grup multiplicativ.

Un inel slab $\mathfrak{A}^{\cdot}$ poate fi considerat [2], ca obținut dintr-un inel obișnuit $\mathfrak{A}^{\times}$ cu același grup aditiv $\mathfrak{A}_{+}$ și înmulțirea notată „$\times$”, în care se definește o nouă înmulțire „ · ” definită de

$$x \cdot y = x \times y + x\varphi + y\psi + c. \tag{6}$$

Reciproc, unui inel slab $\mathfrak{A}^{\cdot}$ i se poate asocia în mod univoc un inel obișnuit $\mathfrak{A}^{\times}$ cu același grup aditiv $\mathfrak{A}_{+}$ și înmulțirea „$\times$” definită de

$$x \times y = x \cdot y - x \cdot 0 - 0 \cdot y + 0 \cdot 0. \tag{7}$$

În prezenta Notă voi introduce anumite transformări ale unui inel slab $\mathfrak{A}^{\cdot}$, ce sînt endomorfisme ale grupului $\mathfrak{A}_{+}$, analoge cunoscutelor endomorfisme R_a, L_a (multiplicarea la dreapta, respectiv la stînga) definite în inelele obișnuite.

2. Se știe că, în cazul unui inel obișnuit asociativ $\mathfrak{A}^{\times}$, mulțimea multiplicărilor la dreapta $\mathcal{R}(\mathfrak{A}^{\times}) = \{R_a \mid xR_a = x \times a,\ a \in \mathfrak{A}^{\times},\ \forall x\}$ este un subinel al inelului endomorfismelor grupului $\mathfrak{A}_{+}$, $\mathcal{E}(\mathfrak{A}_{+})$, $\mathcal{R}(\mathfrak{A}^{\times}) \text{ subinel} \subseteq \mathcal{E}(\mathfrak{A}_{+})$, și aplicația $a \to R_a$ este un epimorfism $\chi : \mathfrak{A}^{\times} \to \mathcal{R}(\mathfrak{A}^{\times})$, ce devine izomorfism dacă $\mathfrak{A}^{\times}$ are unitate; considerații analoge sînt valabile pentru mulțimea multiplicărilor la stînga $\mathcal{L}(\mathfrak{A}^{\times}) \ni L_a$, în care caz aplicația $a \to L_a$ este un antiepimorfism.

Într-un inel slab $\mathfrak{A}^{\cdot}$, nu se pot face considerații analoge asupra multiplicărilor la dreapta $R_a^{\cdot}$ sau la stînga $L_a^{\cdot}$, măcar pentru faptul că acestea nici nu sînt endomorfisme ale lui $\mathfrak{A}_{+}$.

În inelul slab $\mathfrak{A}^{\cdot}$, să definim transformările D_a, S_a prin relațiile

$$xD_a = x \cdot a - 0 \cdot a, \qquad (8') \quad xS_a = a \cdot x - a \cdot 0, \qquad \forall x \in \mathfrak{A}^{\cdot} \tag{8}$$

unde a este un element fixat în $\mathfrak{A}^{\cdot}$, dar arbitrar.

Lema 1. *D_a și S_a sînt endomorfisme ale grupului aditiv $\mathfrak{A}_{+}$ și satisfac relațiile*

$$D_a = R_a + \varphi;\ S_a = L_a + \psi;\ x \cdot y = xD_y + yS_0 + c = yS_x + xD_0 + c.$$

În adevăr, conform cu (8) și (4)

$$(x_1 + x_2) D_a = (x_1 + x_2) \cdot a - 0 \cdot a = x_1 \cdot a + x_2 \cdot a - 0 \cdot a - 0 \cdot a = (x_1 \cdot a - 0 \cdot a) + (x_2 \cdot a - 0 \cdot a) = x_1 D_a + x_2 D_a,$$

deci

$$(x_1 + x_2) D_a = x_1 D_a + x_2 D_a. \tag{9}$$

Analog se verifică

$$(x_1 + x_2) S_a = x_1 S_a + x_2 S_a. \tag{9'}$$

Ținînd seama de (7), (1), (2), avem

$$xD_a = x \cdot a + x\varphi, \quad \forall x, \quad \text{sau} \quad (11) \quad D_a = R_a + \varphi \tag{10}$$

$$xS_a = a \times x + x\psi \quad \text{sau} \quad (11') \quad S_a = L_a + \psi. \tag{10'}$$

În particular, pentru $a = 0$,

$$D_0 = \varphi, \qquad S_0 = \psi.$$

Din (6) și (10), (10′) se deduce

$$x \cdot y = xD_y + yS_0 + c = yS_x + xD_0 + c. \tag{12}$$

Din faptul că D_a, S_a sînt endomorfisme ale grupului $\mathfrak{A}_{+}$, rezultă

Lema 2. *În orice inel slab $\mathfrak{A}^{\cdot}$, submulțimile $\mathfrak{A}^{\cdot} D_a$, $\mathfrak{A}^{\cdot} S_a$ sînt subgrupuri ale grupului aditiv $\mathfrak{A}_{+}$.*

Se știe, că, într-un inel obișnuit $\mathfrak{A}^{\times}$ (asociativ sau nu), o submulțime $B < \mathfrak{A}^{\times}$ este un ideal stîng (drept) cînd B este un subgrup al grupului $\mathfrak{A}_{+}$, invariant la orice L_r (R_r), $BL_r \subseteq B$, ($BR_r \subseteq B$), pentru orice $r \in \mathfrak{A}_{+}$. Considerînd definiția dată unui ideal slab stîng (drept) într-un inel slab $\mathfrak{A}^{\cdot}$, [9], anume B este ideal slab stîng (drept), dacă

1° B_{+} subgrup $\subseteq \mathfrak{A}^{\cdot}_{+}$,

2° $r \cdot b = r \cdot 0 \in B, \quad \forall b \in B, \forall r \in \mathfrak{A}^{\cdot}$,

(2′ $b \cdot r = 0 \cdot r \in B$, pentru ideal slab drept)

se constată că:

Observația 1. Definiția unui ideal slab stîng (drept) se mai poate enunța:

O submulțime nevidă B a unui ideal slab $\mathfrak{A}^{\cdot}$ se numește ideal slab stîng (drept) dacă este un grup aditiv $B_{+} \subseteq \mathfrak{A}^{\cdot}_{+}$, invariant la oricare transformare S_r (D_r), $B_{+} S_r \subseteq B$ ($B_{+} D_r \subseteq B$), $\forall r \in \mathfrak{A}^{\cdot}$.

3. Într-un grupoid multiplicativ oarecare G, un element a se numește *inversabil la stînga* (dreapta) dacă ecuația $xa = b$ are soluție $x \in G$ ($ay = b$ are soluție $y \in G$) pentru orice $b \in G$; să observăm că definiția se mai poate enunța: a este inversabil la stînga (dreapta), dacă $R_a(L_a)$ este o aplicație *pe*, $GR_a = G(GL_a = G)$.

Aceeași definiție se mai poate da în grupoidul multiplicativ al unui inel obișnuit oarecare $\mathfrak{A}^{\times}$, în care caz a este inversabil la stînga (dreapta), dacă și numai dacă $R_a(L_a)$ este epimorfism al grupului aditiv $\mathfrak{A}_{+}$.

Faptul analog în inelele slabe ni-l dă:

Lema 3. *Condiția necesară și suficientă ca un element $a \in \mathfrak{A}^{\cdot}$ ($\mathfrak{A}^{\cdot}$ — inel slab), să fie inversabil la stînga (dreapta) este ca $D_a(S_a)$ să fie un epimorfism în $\mathfrak{A}^{\cdot}_{+}$.*

În adevăr, fie D_a epimorfism al grupului aditiv $\mathfrak{A}^{\cdot}_{+}$, $\mathfrak{A}^{\cdot} D_a = \mathfrak{A}^{\cdot}_{+}$, adică pentru orice $b \in \mathfrak{A}^{\cdot}$ există un $x \in \mathfrak{A}^{\cdot}$ cu $xD_a = b$ sau $x \cdot a + 0 \cdot a = b$; aceasta înseamnă că ecuația $x \cdot a = b + 0 \cdot a$ are soluție x pentru orice a. Punînd $b + 0 \cdot a = b_1$, avem că ecuația $x \cdot a = b_1$ are soluție x și aceasta este adevărat pentru orice b_1, căci orice b_1 se poate scrie $b_1 = b' + 0 \cdot a$, cu $b' = b_1 - 0 \cdot a$ și deci ecuația $x \cdot a = b_1$ devine $x \cdot a = 0 \cdot a = b'$, $xD_a = b'$, care prin ipoteză are soluție pentru orice b'. Reciproc, dacă a este inversabil la stînga în $\mathfrak{A}^{\cdot}$, ecuația $x \cdot a = b$ se poate scrie $x \cdot a = 0 \cdot a = b - 0 \cdot a$,

$$xD_a = b_1, \text{ cu } b_1 = b - 0 \cdot a, \tag{13}$$

deci, prin ipoteză, ecuația (13) are soluție; aceasta este adevărat pentru orice $b_1 \in \mathfrak{A}^{\cdot}$, căci orice b_1 se poate scrie $b_1 = (b_1 + 0 \cdot a) - 0 \cdot a = b - 0 \cdot a$ și întrebarea dacă $xD_a = b - 0 \cdot a$ are soluție x se reduce evident la problema dacă $x \cdot a = b$ are soluție ceea ce, prin ipoteză, este adevărat. Deci $\mathfrak{A}^{\cdot} D_a = \mathfrak{A}^{\cdot}$. Analog se demonstrează lema pentru S_a.

Observația 2. Lema 3 generalizează următoarea proprietate a elementelor evasiregulate la stînga (dreapta), (J a c o b s o n [3], [4]): într-un inel (obișnuit) asociativ $\mathfrak{A}^{\times}$, elementul a este evasiinversabil la stînga (dreapta) atunci și numai atunci cînd a este evasiregulat la stînga (dreapta).

În adevăr, într-un inel obișnuit asociativ $\mathfrak{A}^{\times}$, Jacobson numește un element $a \in \mathfrak{A}$ evasiinversabil la stînga (dreapta) dacă ecuația $x \circ a = 0$ are soluție x ($a \circ y = 0$ are soluție y) — unde „$\circ$" este „compunerea cere" — iar elementul $a \in \mathfrak{A}^{\times}$ este numit evasiregulat la stînga (dreapta) dacă $\mathfrak{A}^{\times} a + \mathfrak{A}^{\times} = \mathfrak{A}^{\times}$, ($a\mathfrak{A}^{\times} + \mathfrak{A}^{\times} = \mathfrak{A}^{\times}$) unde

$$\mathfrak{A}^{\times} a + \mathfrak{A}^{\times} = \{x \times a + x \mid a \text{ fixat}, \ \forall x \in \mathfrak{A}^{\times}\}.$$

Dar, cum s-a observat mai sus, în § 1, structura algebrică $\{\mathfrak{A}^{\cdot}, \circ\}$ este un inel slab $\mathfrak{A}^{\circ}$ cu $\varphi = \psi = I$, $c = 0$, asociativ și cu zero drept unitate principală; iar într-un semigrup multiplicativ cu unitate — cum este $\mathfrak{A}^{\circ}$ — existența inversului la stînga (dreapta) relativ la unitate este echivalentă cu inversabilitatea la stînga (dreapta), definită la începutul acestui paragraf, [5]. Pe de altă parte, conform cu (10), ((10'))

$$x \times a + x = x \times a + x\varphi = xD_a, \text{ de unde}$$

$$\mathfrak{A}^{\times} a + \mathfrak{A}^{\times} = \mathfrak{A}^{\circ} D_a, \qquad (a\mathfrak{A}^{\times} + \mathfrak{A}^{\times} = \mathfrak{A}^{\circ} S_a),$$

așa încît afirmația „a evasiregulat la stînga (dreapta)" se exprimă prin „$\mathfrak{A}^{\circ} D_a = \mathfrak{A}^{\circ}$" ($\mathfrak{A}^{\circ} S_a = \mathfrak{A}^{\circ}$), adică „$D_a(S_a)$ epimorfism".

Generalitatea lemei 3, față de proprietatea mai sus citată, constă în aceea că — în timp ce această proprietate este valabilă în ipoteza că inelul $\mathfrak{A}$ și inelul slab $\mathfrak{A}^{\cdot}$ sînt asociative, cu unitate și proprietatea citată se demonstrează pe baza faptului că $\mathfrak{A}^{\cdot} a + \mathfrak{A}^{\cdot}$ este ideal stîng ($a\mathfrak{A}^{\times} + \mathfrak{A}^{\cdot}$ este ideal drept) — lema 3 este valabilă fără nici una din aceste ipoteze și pentru φ, ψ endomorfisme oarecare ale lui $\mathfrak{A}^{\cdot}$.

Pe baza considerațiilor din acest paragraf, apare naturală introducerea următoarei definiții:

Într-un inel obișnuit $\mathfrak{A}^{\cdot}$, *un element a se numește evasiregulat sau evasiinversabil la stînga (dreapta) relativ la perechea de endomorfisme $\varphi, \psi \in \mathcal{E}(\mathfrak{A}^{\cdot})$, dacă a este inversabil la stînga (dreapta) în inelul slab $\mathfrak{A}^{\cdot}$, construit cu φ, ψ* și (6), sau — ceea ce este tot una, conform lemei 3 — dacă endomorfismul D_a (S_a) este epimorfism, $\mathfrak{A}^{\cdot} D_a = \mathfrak{A}^{\cdot}_{+}$ ($\mathfrak{A}^{\cdot} S_a = \mathfrak{A}^{\cdot}_{+}$). Convenim să mai spunem, în acest caz, că elementul a este evasiregulat în inelul slab $\mathfrak{A}^{\cdot}$.

4. Într-un inel obișnuit $\mathfrak{A}^{\cdot}$, afirmația „dacă $z R_a = z \cdot a = 0$ are soluție unică (obligatoriu $z = 0$), atunci R_a este monomorfism (căci nucleul endomorfismului R_a, $N_{R_a} = 0$)", este banală. Pentru un inel slab $\mathfrak{A}^{\cdot}$ este valabilă

Lema 4. *Dacă ecuația $z \cdot a = 0$ ($a \cdot y = 0$) are soluție unică z(y), atunci $D_a(S_a)$ este monomorfism.*

În adevăr, D_a fiind un endomorfism al grupului $\mathfrak{A}^{\cdot}_{+}$, există nucleul N_{D_a},

$$N_{D_a} = \{x \mid x \in \mathfrak{A}^{\cdot}_{+}, \ xD_a = x \cdot a + 0 \cdot a = 0, \text{ sau } x \cdot a = 0 \cdot a\}.$$

Ipoteza că $z \cdot a = 0$ are soluție unică z înseamnă $z \cdot a + 0 \cdot a = 0 \cdot a$, adică ecuația $zD_a = -0 \cdot a$ are soluția unică z, sau

$$0 \cdot a = -zD_a = (-z) D_a, \tag{14}$$

deci ecuația

$$uD_a = 0 \cdot a \tag{14'}$$

are soluție unică $u = -z$, cu z soluția unică pentru $z \cdot a = 0$. Să căutăm soluțiile ecuației

$$x \cdot a = 0 \cdot a, \quad x \in N_{D_a}. \tag{15}$$

Cum, pentru orice x, avem $x \cdot a = xD_a + 0 \cdot a$ și cu (14), $x \cdot a = (x - z)D_a$, atunci ecuația (15) se scrie $(x - z)D_a = 0 \cdot a$, care este ecuația (14') cu soluția unică $u = x - z = -z$, de unde $x = 0$, deci $N_{D_a} = 0$, D_a monomorfism. Demonstrație analogă pentru S_a.

Observația 3. Reciproca lemei 4 nu este adevărată decît în forma mai restrînsă: dacă D_a este monomorfism și $z \cdot a = 0$ are soluție, atunci această soluție este unică.

5. Să observăm că, pentru două elemente $a, r \in \mathfrak{A}^{\cdot}$, proprietatea de permutabilitate $D_a S_r = S_r D_a$ este echivalentă cu relația

$$(16) \qquad r \cdot (x \cdot a) = r \cdot (0 \cdot a) = (r \cdot x) \cdot a = (r \cdot 0) \cdot a, \qquad \forall\, x \in \mathfrak{A}^{\cdot}$$

sau

$$(16'') \qquad r \cdot (x \cdot a) = (r \cdot x) \cdot a = r \cdot (0 \cdot a) = (r \cdot 0) \cdot a.$$

Aceasta rezultă din definiția lui D_a, S_r și (3), (4). Se deduce:

Observația 4. Într-un inel slab, $\mathfrak{A}^{\cdot}$, transformările D sînt permutabile cu transformările S atunci și numai atunci cînd are loc relația (16) sau (16'') pentru orice x, a, r.

$$(16') \qquad D_a S_r = S_r D_a \iff (16), \text{ pentru } \forall\, a, r, x \in \mathfrak{A}^{\cdot}.$$

Se știe că într-un inel obișnuit, condiția de asociativitate este echivalentă cu permutabilitatea endomorfismelor R și L.

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c) \iff L_a R_c = R_c L_a, \qquad \forall\, a, b, c \in \mathfrak{A}^{\times}.$$

Lema 5. *Într-un inel slab $\mathfrak{A}^{\cdot}$, asociativitatea înmulțirii „$\cdot$" este suficientă dar nu necesară pentru permutabilitatea transformărilor D și S.*

În adevăr, dacă înmulțirea în $\mathfrak{A}^{\cdot}$ este asociativă, atunci (16) este satisfăcută, deci la fel (16'). Să arătăm printr-un exemplu că permutabilitatea endomorfismelor D și S nu implică asociativitatea înmulțirii. În adevăr, fie $\mathfrak{A}^{\times}$ un inel obișnuit asociativ; să construim inelul slab $\mathfrak{A}^{\cdot}$ cu ajutorul formulei (6), definind

$$x\varphi = x \times u, \qquad y\psi = v \times y,$$

pentru v, u elemente fixate din $\mathfrak{A}^{\times}$, atunci

$$xD_a = x \times (a + u), \qquad yS_r = (r + v) \times y,$$

$$xD_a S_r = (r + v) \times [x \times (a + u)], \qquad x(S_r D_a) = [(r + v) \times x] \times (a + u)$$

și în virtutea asociativității în $\mathfrak{A}^{\times}$, avem $D_a S_r = S_r D_a$ pentru orice $a, r \in \mathfrak{A}^{\cdot}$. Dar înmulțirea în $\mathfrak{A}^{\cdot}$ nu este asociativă, căci notînd

$$A = r \times x + r \times u + v \times x + c \text{ și } B = x \times a + x \times u + v \times a + c,$$

avem

$$(r \cdot x) \cdot a = A \times a + A \times u + v \times a + c,$$

$$r \cdot (x \cdot a) = r \times B + r \times u + v \times B + c$$

și în general $r \times u \times a + c \times a + r \times u^2 + c \times u + v \times a \neq r \times v \times a + r \times c + r \times u + v^2 \times a + v \times c$.

Lema 6. *Dacă inelul slab $\mathfrak{A}^{\cdot}$ are endomorfismele D și S (ale lui $\mathfrak{A}^{\cdot}$) permutabile, atunci:*

1° Inelul obișnuit $\mathfrak{A}^{\times}$, asociat cu $\mathfrak{A}^{\cdot}$ prin (7), este asociativ (endomorfismele R și L sînt permutabile).

2° Endomorfismele D și S sînt permutabile respectiv cu orice L și orice R.

$$(17) \qquad D_a L_r = L_r D_a,$$

$$(18) \qquad S_r R_a = R_a S_r, \qquad \forall\, a, r \in \mathfrak{A}$$

sau

$$(17') \qquad r \times (x \cdot a) = (r \times x) \cdot a = r \times (0 \cdot a) = 0 \cdot a, \qquad \forall\, a, r, x \in \mathfrak{A}_+$$

$$(18') \qquad (r \cdot x) \times a = r \cdot (x \times a) = (r \cdot 0) \times a = r \cdot 0,$$

în particular endomorfismele $\varphi = D_0$, $\psi = S_0$ din (1), (2) sînt permutabile respectiv cu orice L și orice R

$$(17_0) \qquad \varphi L_r = L_r \varphi \quad \textit{sau} \quad (17'_0) \quad r \times (x\varphi) = (r \times x)\varphi,$$

$$(18_0) \qquad \psi R_a = R_a \psi \quad \textit{sau} \quad (18'_0) \quad (x\psi) \times a = (x \times a)\psi.$$

În adevăr, dacă (16') $D_a S_r = S_r D_a$, $\forall\, a, r \in \mathfrak{A}_+$, în particular

$$(19) \qquad \varphi S_r = S_r \varphi, \quad D_a \psi = \psi D_a, \quad \varphi\psi = \psi\varphi,$$

atunci, servindu-ne de (11), (11'), (16') și (19),

$$R_a L_r = (D_a - \varphi)(S_r - \psi) = D_a S_r - D_a \psi - \varphi S_r + \varphi\psi,$$

$$L_r D_a = (S_r - \psi)(D_a - \varphi) = S_r D_a - \psi D_a - S_r \varphi + \psi\varphi,$$

rezultă $R_a L_r = L_r R_a$, $\forall\, a, r \in \mathfrak{A}_+$, deci $\mathfrak{A}^{\times}$ este inel asociativ.

Pentru a demonstra 2°, ne servim de aceleași relații, observînd că putem scrie (16') sub forma

$$D_a(L_r + \psi) = (L_r + \psi) D_a \Rightarrow D_a L_r = L_r D_a \qquad (17)$$

$$(R_a + \varphi) S_r = S_r (R_a + \varphi) \Rightarrow R_a S_r = S_r R_a \qquad (18)$$

În particular, pentru $a = 0$, (17) ne dă (17_0) sau $(17'_0)$, iar pentru $r = 0$, (18) ne dă (18_0) sau $(18'_0)$.

Să observăm că reciproca lemei 6, 1° nu este adevărată; dacă dintr-un inel obișnuit asociativ $\mathfrak{A}^{\times}$ se construiește inelul slab $\mathfrak{A}^{\cdot}$ prin (6), endomorfismele D și S nu sînt necesar permutabile; dacă, de exemplu, luăm φ și ψ nepermutabile, evident D și S nu vor fi permutabile. Dar este adevărată:

Lema 6'. *Condițiile necesare și suficiente ca un inel slab $\mathfrak{A}^{\cdot}$ să aibă endomorfismele D și S permutabile sînt:*

1) *Inelul obișnuit $\mathfrak{A}^{+}$, asociat cu $\mathfrak{A}^{\cdot}$, să fie asociativ.*

2) $\varphi\psi = \psi\varphi$. 3) $\psi L_r = L_r \varphi$, $\psi R_a = R_a \psi$, $\forall\, a, r \in \mathfrak{A}^{\cdot}$.

Necesitatea condițiilor a fost demonstrată prin lema 6. Suficiența lor rezultă utilizînd (11), (11').

Din lemele 5 și 6 (1) rezultă imediat:

Observația 5. Dacă inelul slab $\mathfrak{A}^{\cdot}$ este asociativ, atunci și inelul obișnuit asociat $\mathfrak{A}^{+}$ este asociativ; deci *dintr-un inel obișnuit neasociativ nu se poate construi un inel slab asociativ.*

6. În § 3 (Obs. 2) am arătat în ce mod Lema 3 este generalizarea faptului că, într-un inel obișnuit asociativ $\mathfrak{A}^{+}$, evasiregularitatea (în sens Jacobson [3], [4]) la stînga (dreapta) este echivalentă cu evasiinversabilitatea la stînga (dreapta) și am remarcat că această echivalență a fost stabilită de Jacobson pe baza faptului că $\mathfrak{A}^{\cdot} a + \mathfrak{A}^{\cdot}$ ($= \mathfrak{A}^{\cdot} D_a$, în notația mea) este ideal stîng ($a\mathfrak{A}^{\cdot} + \mathfrak{A}^{\cdot}$ este ideal drept). În cazul inelelor slabe generale ($\varphi \neq \psi \neq I$, $c \neq 0$), se demonstrează simplu:

Lema 7. *Într-un inel slab $\mathfrak{A}^{\cdot}$, subgrupul aditiv $\mathfrak{A}^{\cdot} D_a$ este ideal slab stîng ($\mathfrak{A}^{\cdot} S_r$ este ideal slab drept) pentru orice a, dacă și numai dacă este satisfăcută condiția* (16') *de permutabilitate a endomorfismelor D și S (sau echivalenta sa, relația* (16)), *pentru orice r (pentru orice a).*

În adevăr, conform cu Observația 1 (§ 2), subgrupul aditiv $\mathfrak{A}^{\cdot} D_a$ este ideal slab stîng dacă și numai dacă $(\mathfrak{A}^{\cdot} D_a) S_r \subseteq \mathfrak{A}^{\cdot} D_a$ pentru $\forall r$.

Dar, în ipoteza permutabilității (16'), avem

$$\mathfrak{A}^{\cdot}(D_a S_r) = \mathfrak{A}^{\cdot}(S_r D_a) = (\mathfrak{A}^{\cdot} S_r) D_a \subseteq \mathfrak{A}^{\cdot} D_a, \quad \forall\, a, r \in \mathfrak{A}^{\cdot},$$

căci, evident $\mathfrak{A}^{\cdot} S_r \subseteq \mathfrak{A}^{\cdot}$. Sau, pentru elemente, utilizînd definiția idealului slab stîng, apoi relația (3') din § 1, și, în sfîrșit, ipoteza sub forma (16), avem

$$\forall\, x D_a = x \cdot a - 0 \cdot a, \quad \forall\, r \in \mathfrak{A}^{\cdot},$$

$$r \cdot (xD_a) = r \cdot 0 = r \cdot (x \cdot a - 0 \cdot a) - r \cdot 0 = r \cdot (x \cdot a) -$$

$$- r \cdot (0 \cdot a) + r \cdot 0 - r \cdot 0 = (r \cdot x) \cdot a - (r \cdot 0) \cdot a =$$

$$= (r \cdot x) D_a \in \mathfrak{A}^{\cdot} D_a.$$

Din demonstrație reiese evident și necesitatea condiției (16'); demonstrație analogă pentru $\mathfrak{A}^{\cdot} S_r$ ideal slab drept.

7. Să notăm cu $\mathfrak{D}$, respectiv $\mathfrak{S}$, mulțimile de endomorfisme D_a, S_a, $\forall\, a \in \mathfrak{A}^{\cdot}$.

$\{D_a \mid \forall\, a \in \mathfrak{A}^{\cdot}\} = \mathfrak{D} \subseteq \mathcal{E}(\mathfrak{A}^{+})$ inelul endomorfismelor grupului $\mathfrak{A}^{+}$,

$\{S_a \mid \forall\, a \in \mathfrak{A}^{\cdot}\} = \mathfrak{S} \subseteq \mathcal{E}(\mathfrak{A}^{+})$.

Să definim aplicațiile

$\chi : \mathfrak{A}^{\cdot} \to \mathfrak{D}$ prin $a\chi = D_a$,

$\chi' : \mathfrak{A}^{\cdot} \to \mathfrak{S}$ prin $a\chi' = S_a$.

Ele au următoarele proprietăți:

$$(a_1 + a_2)\chi = a_1\chi + a_2\chi = 0\chi \quad \text{sau}$$

(19) $D_{a_1 + a_2} = D_{a_1} + D_{a_2} - D_0$, (19') $S_{a_1 + a_2} = S_{a_1} + S_{a_2} - S_0$,

(20) $D_{a_1 - a_2} = D_{a_1} - D_{a_2} + D_0$, (20') $S_{a_1 - a_2} = S_{a_1} - S_{a_2} + S_0$,

(21) $D_{-a} = -D_a + 2D_0$, (21') $S_{-a} = -S_a + 2S_0$,

(22) $D_{\sum_1^n a_i} = \sum_1^n D_{a_i} - (n-1) D_0$, (22') $S_{\sum_1^n a_i} = \sum_1^n S_{a_i} - (n-1) S_0$,

(22$_1$) $D_{na} = nD_a - (n-1) D_0$, (22$_1$) $S_{na} = nS_a - (n-1) S_0$, $\forall\, n \in \mathfrak{J}$

Aceste proprietăți sînt valabile indiferent dacă $\mathfrak{A}^{+}$, inelul obișnuit asociat cu $\mathfrak{A}^{\cdot}$, este sau nu asociativ.

Să presupunem că χ este un homomorfism (deci obligatoriu epimorfism) al grupoidului multiplicativ $\mathfrak{A}^{\cdot}$, adică $(x \cdot a)\chi = (x\chi)(a\chi)$, sau

(23') $D_{x \cdot a} = D_x D_a$, $\forall\, x, a \in \mathfrak{A}^{\cdot}$ (în particular $D_x = \varphi^2$).

Condiția (23') este echivalentă cu următoarea condiție între elementele inelului slab

(23) $r \cdot (x \cdot a) - 0 \cdot (x \cdot a) = (r \cdot x) \cdot a - (0 \cdot x) \cdot a$, $\forall\, r, x, a \in \mathfrak{A}^{\cdot}$ sau

(23'') $r \cdot (x \cdot a) - (r \cdot x) \cdot a = 0 \cdot (x \cdot a) - (0 \cdot x) \cdot a$.

Evident că, în condiția (23') (sau echivalentele (23), (23'')) mulțimea $\mathfrak{D}$ este un subsemigrup multiplicativ $\mathfrak{D}^{\cdot}$ al semigrupului multiplicativ al inelului $\mathcal{E}(\mathfrak{A}^{+})$.

Observația 6. Dacă inelul slab $\mathfrak{A}^{\cdot}$ este asociativ, atunci (23) (sau (23'')) este evident satisfăcută, deci și (23'), adică χ este un homomorfism al semigrupului multiplicativ $\mathfrak{A}^{\cdot}$ pe semigrupul $\mathfrak{D}^{\cdot}$. Dar χ poate fi homomorfism (condiția (23) valabilă) fără asociativitatea lui $\mathfrak{A}^{\cdot}$, ceea ce reiese din următorul exemplu:

Să considerăm un inel obișnuit asociativ $\mathfrak{A}$ care are măcar un divizor absolut al lui zero la dreapta (dar nu la stînga), w, $(r \times w = 0,\ \forall\, r \in \mathfrak{A})$ ($w \neq r \neq 0$ măcar pentru un r) și din $\mathfrak{A}^{\times}$ prin (6) construim inelul slab $\mathfrak{A}^{\cdot}$, cu $x\varphi = x \times u = xu$, $x\psi = ux$; atunci $rD_x D_u = r(x \times u)$ $(a \times u)$ iar $rD_{u,a} = r(xa + xu + ua + c + u)$.

Dacă luăm $u^2 - c - u = w$, atunci avem

$$rD_x D_u - rD_{x,u} = r(u^2 - c - u) = 0, \quad \forall\, r \in \mathfrak{A}^{\cdot},$$

dar $\mathfrak{A}^{\cdot}$ nu este un inel slab asociativ, căci

$$(r \cdot x) \cdot a - r \cdot (x \cdot a) = (cu - uc) + r(u^2 - c - u) - (u^2 - c - u)a = (cu - uc) - (u^2 - c - u)a$$

nu poate fi zero pentru orice a căci, în general, $cu \neq uc$ și $(u^2 - c - u)a$ nu este zero pentru orice a. Să mai observăm că, în acest exemplu, expresia

$$aS_x S_r - aS_{r,x} = (u^2 - c - u)a,$$

nu este 0 pentru orice $a \in \mathfrak{A}^{\cdot}$.

Considerații analoge cu acelea expuse mai sus pentru aplicația χ sînt valabile și pentru $'\chi$; condiția ca $'\chi$ să fie un antihomomorfism al grupoidului multiplicativ $\mathfrak{A}^{\cdot}_{\times}$ este

(24′) $S_x S_r = S_{r,x}$ $\forall\, x, r \in \mathfrak{A}^{\cdot}$ (în particular $S_c = \psi^2$) și este echivalentă cu condiția

(24) $r \cdot (x \cdot a) - r \cdot (x \cdot 0) = (r \cdot x) \cdot a - (r \cdot x) \cdot 0$ sau

(24″) $r \cdot (x \cdot a) - (r \cdot x) \cdot a = r \cdot (x \cdot 0) - (r \cdot x) \cdot 0$.

Observația 6′. Asociativitatea lui $\mathfrak{A}^{\cdot}$ este suficientă dar nu necesară pentru ca $'\chi$ să fie un antihomomorfism ($\mathfrak{S}_{\times}$ semigrup multiplicativ).

8. În paragrafele precedente s-au pus în evidență mai multe condiții necesare ca un inel slab să fie asociativ. Să demonstrăm acum

Teorema 1. *Condițiile necesare și suficiente pentru ca inelul slab $\mathfrak{A}^{\cdot}$ să fie asociativ sînt*

(16′) $D_r S_a = S_a D_r$ (*echivalentă cu „$\mathfrak{A}^{\cdot}_{+}$ D_a ideal slab sting, $\forall\, a$″ sau „$\mathfrak{A}^{\cdot}_{+}$ S_r ideal slab drept, $\forall\, r$″*),

(23′) $D_{x,a} = D_x D_a$ (*echivalentă cu „$\mathfrak{D}_{\times}$ semigrup multiplicativ″ sau „χ homomorfism: $\mathfrak{A}^{\cdot}_{\times} \to \mathfrak{D}^{\cdot}_{\times}$″*),

(24′) $S_x S_r = S_{r,x}$ (*echivalentă cu „$\mathfrak{S}_{\times}$ semigrup multiplicativ″ sau „$'\chi$ antihomomorfism: $\mathfrak{A}^{\cdot}_{\times} \to \mathfrak{S}_{\times}$″*),

(25′) $c\varphi = c\psi$ (*echivalentă din* (1), (2) *cu*

(25) $c \cdot 0 = 0 \cdot c$ *sau* $(0 \cdot 0) \cdot 0 = 0 \cdot (0 \cdot 0)$) *sau* $cD_0 = cS_0$.

Necesitatea condițiilor s-a observat din scrierea lor sub forma (16″), (23″), (24″), (25). Pentru demonstrarea suficienței, să observăm că (23″) pentru $x = a = 0$ devine

(23$_0$) $r \cdot c = (r \cdot 0) \cdot 0 = 0 \cdot c = c \cdot 0$,

apoi (16″) pentru $a = 0$ devine

(16$_0$) $r \cdot (x \cdot 0) = (r \cdot x) \cdot 0 = r \cdot c = (r \cdot 0) \cdot 0$,

iar din acestea și (24″) se obține

(24$_0$) $r \cdot (x \cdot a) = (r \cdot x) \cdot a = 0 \cdot c = c \cdot 0$,

apoi (24$_0$) cu (25) ne dă

$$r \cdot (x \cdot a) = (r \cdot x) \cdot a, \quad \forall\, r, x, a \in \mathfrak{A}^{\cdot},$$

deci inelul slab $\mathfrak{A}^{\cdot}$ este asociativ.

Grupa de condiții din teorema 1 rămîne suficientă dacă se înlocuiește *una* dintre primele trei condiții, (16′), (23′), (24′), prin cazul ei particular pentru zero, anume respectiv

(16′) cu $D_0 S_0 = S_0 D_0$ adică (16°) $\varphi\psi = \psi\varphi$,

(23′) cu $D_{0,0} = D_0^2$ adică (23°) $\varphi^2 = D_c$,

(24′) cu $S_{0,0} = S_0^2$ adică (24°) $\psi^2 = S_c$.

Teorema 1′. *Condițiile* (16°), (23′), (24′), (25′) *sînt necesare și suficiente pentru ca $\mathfrak{A}^{\cdot}$ să fie asociativ.*

În adevăr, din (23″), cu $a = 0$, avem

(23$_1$) $r \cdot (x \cdot 0) = (r \cdot x) \cdot 0 = 0 \cdot (x \cdot 0) = (0 \cdot x) \cdot 0$,

iar din (1), (2), (25), (16°) rezultă $0 \cdot (x \cdot 0) = (0 \cdot x) \cdot 0 = (x\varphi + c)\psi + c = (x\psi + c)\varphi + c = x(\varphi\psi + \psi\varphi) = x0 = 0$,

unde 0 este endomorfismul nul; atunci din (23$_1$) și (24″) rezultă $\mathfrak{A}^{\cdot}$ asociativ (din care rezultă (16″)).

Teorema 1″. *Condițiile* (16′), (23°), (24′), (25′) *sînt necesare și suficiente pentru ca $\mathfrak{A}^{\cdot}$ să fie asociativ.*

În adevăr, din (16″) pentru $a = 0$, se obține

(16$_1$) $r \cdot (x \cdot 0) = (r \cdot x) \cdot 0 = r \cdot (0 \cdot 0) = (r \cdot 0) \cdot 0$

apoi cu (1), (2), (25′), (23°) se calculează

$$r \cdot c = (r \cdot 0) \cdot 0 = (r \cdot c - 0 \cdot c) + 0 \cdot c = (r\varphi + c) \cdot 0 = rD_c + c\varphi +$$
$$+ c = [(r\varphi + c)\varphi + c] = r(D_c - \varphi^2) + c(\varphi - \varphi) = r0 + c0 = 0.$$

Acum, din $(16_1) \Rightarrow r \cdot (x \cdot 0) = (r \cdot x) \cdot 0 = 0$ și din $(24'') \Rightarrow \mathfrak{A}$ asociativ (ceea ce implică condiția generală) (23').

Analog se justifică

Teorema 1'''. *Condițiile* (16'), (23'), (24''), (25') *sînt necesare și suficiente pentru ca* $\mathfrak{A}$ *să fie asociativ.*

9. În paragraful precedent s-a văzut că dacă inelul slab $\mathfrak{A}$ este asociativ, atunci semigrupul său multiplicativ $\mathfrak{A}_\cdot$ se aplică prin epimorfismul χ ($\cdot\chi$) pe semigrupul de endomorfisme $\mathfrak{D}$ ($\mathfrak{S}$). Utilizînd, în acest caz, rezultatele din paragrafele precedente și unele teoreme din teoria semigrupurilor, se obțin noi proprietăți ale inelelor slabe. Dăm mai jos cîteva exemple.

Se știe ([5] Cap. VI) că într-un semigrup $\mathfrak{A}_\cdot$ mulțimea elementelor inversabile la stînga (dreapta) formează un subsemigrup al semigrupului $\mathfrak{A}_\cdot$. Din aceasta, împreună cu lema 3 și definiția evasiregularității de la sfîrșitul paragrafului 3, rezultă:

Lema 8. *Într-un inel slab asociativ* $\mathfrak{A}$, *mulțimea elementelor evasiregulate la stînga (dreapta) formează un subsemigrup multiplicativ* $\Delta \subset \mathfrak{A}$ ($\Gamma \subset \mathfrak{A}$) *și* $\Delta \cdot \chi$ *este subsemigrup de elemente inversabile la stînga în semigrupul* $\mathfrak{D}$ ($\Gamma \cdot \chi$ *este subsemigrup de elemente inversabile la dreapta în* $\mathfrak{S}$).

Se mai știe că: Într-un semigrup mulțimea elementelor inversabile bilater — dacă nu este vidă — formează un grup G și unitatea acestui grup este unitatea semigrupului. Din această teoremă rezultă:

Teorema 2. *Într-un inel slab asociativ* $\mathfrak{A}$, *mulțimea elementelor evasiregulate bilater, dacă nu este vidă, este un subgrup multiplicativ* G *al semigrupului multiplicativ* $\mathfrak{A}_\cdot$ *și unitatea lui este unitatea inelului* $\mathfrak{A}$; *atunci* $G\chi$ *este un subgrup în semigrupul* Δ, $G\chi \subseteq \Delta$ *și* $G \cdot \chi$ *este semigrup în* Γ, *adică pentru elementele a evasiregulate bilater în* $\mathfrak{A}$, *epimorfismele* D_a, S_a *sînt automorfisme ale grupului aditiv* $\mathfrak{A}_+$.

Consecința 1. Pentru ca un inel slab asociativ $\mathfrak{A}$ să aibă elemente inversabile bilater (evasiregulate bilater), este necesar și suficient ca $\mathfrak{A}$ să aibă unitate.

Consecința 2. Dacă $\mathfrak{A}$ este corp slab de specia I (corp slab de specia II) atunci grupul $G = \mathfrak{A}$ ($G = \mathfrak{A} - \{d\}$) și deci semigrupurile $G\chi = \Delta = \mathfrak{D}$, $G \cdot \chi = \Gamma = \mathfrak{S}$ ($G\chi = [\mathfrak{A} - \{d\}]\chi = \mathfrak{D} - \{0\}$, $G \cdot \chi = \mathfrak{S} - \{0\}$) sînt grupuri de automorfisme ale grupului aditiv $\mathfrak{A}_+$.

10. În articolul de față am pus în evidență cum — cu ajutorul inelelor slabe — se pot generaliza unele proprietăți ale inelelor obișnuite; mi se pare interesant mai ales faptul că s-a putut generaliza noțiunea de evasiregularitate, a cărei eficacitate este bine cunoscută în teoria radicalului inelelor asociative. Apare astfel clară utilitatea inelelor slabe ca metodă de cercetare în teoria inelelor obișnuite.

BIBLIOGRAFIE

1. Climescu M. — *Inelele slabe*. Bul. Inst. polit. Iași, t. VII(XI), 1961, p. 1.
2. Climescu M. — *O nouă clasă de inele slabe*. Bul. Inst. polit. Iași, T. X (XIV), 1964, p. 29.
3. Jacobson N. — *Structure of Rings*. Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. XXXVII, 1956.
4. Jacobson N. — *The Radical and semisimplicity for Arbitrary Rings*. Amer. J. Math., 67, 1945, p. 300—320.
5. Лялин Е. С. — *Полугруппы*. Физматгиз, 1963.
6. Luchian T. — *Asupra algebrelor slabe de ordin 3 cu diviziune*. An. șt. Univ. Iași, t. X, 1964, p. 29—42.
7. Luchian T. — *Observații asupra inelelor slabe*. An. șt. Univ. Iași, t. XI, 1965, p. 99—111.
8. Luchian T. — *Asupra unor algebre slabe generalizate, de ordin 2*. An. șt. Univ. Iași, T. XII, 1966, p. 19—36.
9. Luchian T. — *Homomorfisme în inele slabe*. An. șt. Univ. Iași, T. XIII, f. 1, 1967, p. 17—28.
10. Luchian T. — *Asupra noțiunii de domeniu de integritate în inele slabe*. An. șt. Univ. Iași, T. XIII, f. 2, 1967, p. 257—262.
11. Perlis S. — *A Characterization of the radical of an algebra*. Bull. Amer. Math. Soc., 48, 1942.

ON SOME TRANSFORMATIONS OF WEAK-RINGS

Summary

A weak-ring $\mathfrak{A}$, [1], [2], is an additive group $\mathfrak{A}_+$ in which a multiplication „ · " is defined and (1), (2), (3), (4) hold, where φ, ψ are endomorphisms of $\mathfrak{A}_+$ and $c \in \mathfrak{A}$ a fixed element. We obtain a weak-ring $\mathfrak{A}$ from an ordinary ring $\mathfrak{A}$ by keeping the additive group $\mathfrak{A}_+$ and defining a new multiplication „ · " by (6); conversely, to $\mathfrak{A}$ corresponds $\mathfrak{A}$ with the same additive group $\mathfrak{A}_+$ and the multiplication „ · " defined by (7). In the present Note, we introduce the transformations D_a, S_a, of $\mathfrak{A}$, by (8), (8'). D_a, S_a are endomorphisms of $\mathfrak{A}_+$ and we proove that they satisfy some properties, which are analogous to those of R_a, L_a (right and left multiplication) for ordinary rings. *Lemma* 3. The element $a \in \mathfrak{A}$ is left-(right-) invertible — (there exist $x, y \in \mathfrak{A}$ with $x \cdot a = b$ or $a \cdot y = b$, for any $b \in \mathfrak{A}$) — if and only if D_a (S_a) is an epimorphism in $\mathfrak{A}_+$. Then, we

call $a \in \mathfrak{A}^{\cdot}$ a left (right) quasi-regular, or quasi-invertible element with respect to the endomorphisms φ, $\dot{\varphi}$. *Lemma* 6'. D_a permutes with S_r, for any $a, r \in \mathfrak{A}^{\cdot}$, if and only if 1), 2), 3) (from Lemma 6' in the text) hold. *Lemma* 7. The additive subgroup $\mathfrak{A}^{\cdot}_{\cdot} D_a$ is a left weak-ideal for any a ($\mathfrak{A}^{\cdot}_{\cdot} S_r$ is a right weak-ideal for any r) if and only if (16') holds for any r (any a). *Theorem* 1. $\mathfrak{A}^{\cdot}$ is an associative weak-ring if and only if (16'), (23'), (24'), (25') hold. *Theorem* 2. In an associative weak-ring $\mathfrak{A}^{\cdot}$, the set of all its two-sided quasi-regular elements is a multiplicative subgroup G of the multiplicative semigroup of $\mathfrak{A}^{\cdot}$; the identity element of G is the identity element of $\mathfrak{A}^{\cdot}$; for any $a \in G$, D_a, S_a are automorphisms of $\mathfrak{A}^{\cdot}$.

SOME NUMBER THEORETIC APPLICATIONS OF CERTAIN POLYNOMIALS RELATED TO BERNOULLI POLYNOMIALS

BY

DIMITRIJE UGRIN-ŠPARAC

(Zagreb)

Let us introduce the notations

$$t_r = r(r+1)/2 , \tag{1}$$

$$S_n(r) = \sum_{k=1}^{r} k^n . \tag{2}$$

As concerns the designation t_r, subscript r will be omitted whenever it is possible, hence $t = t_r = S_1(r)$. Also t will designate an indeterminate, if r need not be an integer.

By use of the known relations

$$S_{2m-1}(r) = \frac{1}{2m}\left[B_{2m}(r+1) - B_{2m}\right] = \frac{1}{2m}\sum_{s=0}^{2m-1}\binom{2m}{s}(r+1)^{2m-s} B_s ,$$

where Bernoulli numbers appear in the even-suffix notation (except for B_1), we find

$$2S_{2m-1}(r) = S_{2m-1}(r) + S_{2m-1}(r-1) + r^{2m-1} =$$

$$= \frac{1}{2m}\sum_{s=0}^{2m-1}\binom{2m}{s}\left[(r+1)^{2m-s} + r^{2m-s}\right] B_s + r^{2m-1} =$$

$$= \frac{1}{2m}\sum_{s=0}^{2m-1}\binom{2m}{s}\left[(r+1)^{2m-s} + (1-2\delta_{1,s})\, r^{2m-s}\right] B_s .$$

Here $\delta_{i,k}$ is Kronecker's symbol. By introduction of the designation