10. Oppenheim A. — *Rational Approximations to Irrationals*. Bull. Amer. Math. Soc. t. 47 (1941), p. 602—604.

11. Robinson R. M. — *The Approximation of the Irrational Numbers by Fractions with odd or even terms*. Duke J. Math. vol. 7 (1940), p. 351—359.

12. Sudan G. — *Geometria unor fracţiilor continue*. Editura tehnică, Bucureşti 1959.

13. Tornheim L. — *Approximation to Irrationals by Classes of Rational Numbers*. Proc. Amer. Math. Soc. vol. 6 (1955), p. 260—264.

14. Vahlen K. T. — *Über die Näherungswerte und Kettenbrüche*. J. reine u. angew. Math. t. 115 (1895), p. 221—233.

APROXIMAREA UNOR CLASE DE NUMERE IRAŢIONALE REALE PRIN FRACŢII RAŢIONALE $x/y \in \mathbf{Q}$ $(x, y) = 1$ SI $(x, p^k) = 1$ SAU $(x, pq) = 1$

Rezumat

În paragrafele 2—4 se modifică teoremele $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_3$, enunţate în introducere, în sensul ca acestea să poată fi enunţate pentru anumite clase de numere iraţionale reale cărora li se impun unele condiţii pentru cîturile parţiale a_n din dezvoltarea lor în fracţie continuă regulată. Teoremele principale obţinute aici, sînt $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_3$ şi $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_3$. Ele constituie rezultatele asupra aproximării unor clase de iraţionale prin fracţii raţionale, satisfăcînd condiţii de forma $(x, y) = 1$ şi $(x, p^k) = 1$, unde p este un număr prim şi k un număr natural. În cazul cînd $a_n \geq 1$ (condiţie satisfăcută de orice iraţional real) obţinem rezultatele lui Leonard Tornheim din 1955.

În paragraful 5 se obţine o teoremă de tip Vahlen pentru aproximarea numerelor iraţionale reale cu intrerduse, teoremă ce constituie o îmbunătăţire a unui rezultat cunoscut al lui Alexander Oppenheim. În ultimul paragraf se aplică această teoremă la studiul aproximării numerelor iraţionale reale prin fracţii raţionale x/y satisfăcînd condiţiile $(x, y) = 1$ şi $(x, p^k q^l) = 1$, unde p şi q sînt numere prime distincte şi k şi l numere naturale.

SUR QUELQUES PROBLÈMES DE QUASI-COMPACITÉ

PAR

OLGA COSTINESCU

Dans le cadre de l'étude des espaces quasi-compacts, on peut poser différents problèmes qui réclament, à bon droit, l'attention des mathématiciens (voir par ex. [2]).

Dans la Note présente, nous allons nous occuper de certains problèmes auxquels nous avons fait allusion plus haut.

La première partie contient un théorème de quasi-compactification d'un espace topologique quelconque (c'est le résultat principal), tandis que dans la seconde partie on établit certaines conditions suffisantes de quasi-compacité.

§ 1. Afin de formuler les résultats annoncés, il est nécessaire de préciser d'abord le sens des notions qu'on va utiliser :

Définition 1. *Un espace topologique* (X, τ), *s'appelle* q u a s i - c o m p a c t *si tout filtre* $\mathcal{F}$ *sur* X *admet un point adhérent (c'est-à-dire* $\bigcap_{M \in \mathcal{F}} M^{\tau} \neq \emptyset$, M^{τ} *signifie l'adhérence de* M *par rapport à la topologie* τ*).*

On dit qu'une partie A de (X, τ) este un ensemble quasi-compact s l'espace (A, τ_A) est quasi-compact.

Définition 2. *Un espace* (X, τ) *est un* T_2-e s p a c e *si tout filtre sur* X *peut avoir au plus un point limite.*

Définition 3. *Un espace topologique* (X, τ) *est localement quasi-compact si* (X, τ) *est* T_2-e s p a c e, *et tout point* $x \in X$ *admet un voisinage quasi-compact.*

Définition 4. *Un espace topologique* (X, τ) *est* c o m p a c t *s'il est quasi-compact et* T_2-*espace.*

En partant de la définition 1 et en *utilisant seulement les résultats bien connus de la théorie des filtres*, on peut démontrer facilement les deux propositions suivantes *) :

Proposition 1. *Tout sous-ensemble fermé d'un espace topologique quasi-compact est quasi-compact.*

Proposition 2. *Toute réunion finie d'ensembles quasi-compacts d'un espace* (X, τ) *est un ensemble quasi-compact.*

On peut énoncer maintenant le résultat principal de cette partie:

Théorème 1. *Pour tout espace topologique* (X, τ) *il existe un espace quasi-compact* (X', τ') *et un homéomorphisme* $f : (X, \tau) \to (X_1, \tau_1)$ *où* X_1 *est un ensemble dense en* (X', τ') *et* $\tau_1 = \tau'_{X_1}$.

Démonstration. Nous allons prouver le théorème en utilisant un procédé calqué sur celui employé par P. S. Alexandroff pour la démonstration du théorème sur l'immersion d'un espace localement compact dans un espace compact (voir par ex. [1], p. 93).

Étant donné l'espace (X, τ), soit $X' = X \cup \{X\}$; on peut introduire sur X' une topologie τ' dont les éléments sont tous les ensembles de la famille τ, et tous les ensembles de la forme $(X - C) \cup \{X\}$ où C est un sous-ensemble de (X, τ) quasi-compact et τ-fermé.

Compte tenu des propositions 1 et 2, on vérifie aisément que la famille τ' est une topologie sur X'. Évidemment, la trace de la topologie τ' sur X, c'est-à-dire τ'_X, est égale à la topologie τ.

L'ensemble $X'_1 = X' - \{X\}$ est τ'-dense, et l'application surjective $f = \Delta(X)$ définie sur (X, τ) à valeurs en (X', τ') est un homéomorphisme ($\Delta(X)$ este la relation d'identité sur X).

Il faut démontrer maintenant que (X', τ') est un espace quasi-compact. Supposons, par absurde, qu'il existe un filtre $\mathcal{F}'$ sur X' qui n'admet aucun point adhérent ; en particulier, X n'est pas un point adhérent pour $\mathcal{F}'$, donc il y a un ensemble $M \in \mathcal{F}'$ tel que $X \notin M^{\tau'}$ (nous indiquons par $M^{\tau'}$ l'adhérence de M par rapport à la topologie τ'), donc $M^{\tau'} \subset X' - \{X\}$, et par conséquent $M^{\tau'} = M^{\tau}$.

Du fait que $X \notin M^{\tau'}$ il résulte qu'il existe un ensemble $C_0 \subset X$ τ-quasi-compact et τ-fermé de manière que $M \cap (X - C_0) \cup \{X\} = \emptyset$, donc $M \subset C_0$ et $M^{\tau} \subset C_0$; il résulte d'ici que M^{τ} est un sous-ensemble de X fermé et quasi-compact dans la topologie τ, et par conséquent la trace $\mathcal{F}'_{M^{\tau}}$ du filtre $\mathcal{F}'$ sur M^{τ} admet un point adhérent pour $\mathcal{F}_{M^{\tau}}$ par rapport à la topologie induite par τ' sur M^{τ}).

Un élément arbitraire de $\mathcal{F}'_{M^{\tau}}$ est de la forme $E \cap M^{\tau}$ où $E \in \mathcal{F}'$, et quel que soit l'ensemble E du filtre $\mathcal{F}'$ on a $E \cap M^{\tau} \neq \emptyset$; d'ici et du fait

*) Il s'agit de résultats déjà connus, mais nous voulons souligner ici qu'à l'aide de la théorie des filtres on peut les présenter et les démontrer d'une manière plus unitaire et plus commode.

que x_0 est un point adhérent pour $\mathcal{F}_{M^{\tau}}$, il suit que x_0 est point adhérent pour $\mathcal{F}'$ (par rapport à la topologie τ'). Mais cette conclusion est contraire à l'hypothèse, ce qui achève la démonstration que (X', τ') est un espace quasi-compact dans le sens de la définition 1.

Remarques. 1. L'espace (X', τ') introduit dans la démonstration du théorème 1 satisfait à la condition suivante : *quel que soit l'ensemble* $A \subset X'_1$, τ'_1*-fermé, il n'existe pas un espace* Y *quasi-compact, de manière que* $Y \subset X'$, $A \subset Y \subset A^{\tau'}$ *et* $Y \neq A^{\tau'}$, *où* $A^{\tau'}$ *signifie l'adhérence de l'ensemble* A *par rapport à la topologie* τ'.

En effet si l'ensemble A est une partie de l'ensemble $X'_1 = X' - \{X\} = X$, τ'_1-fermé (donc, τ-fermé) et A n'est pas quasi-compact, alors l'adhérence de A par rapport à la topologie τ' est $A \cup \{X\}$, et quel que soit l'espace quasi-compact Y qui satisfait à la condition $Y \subset X'$, $A \subset Y \subset A^{\tau'}$, on a $Y = A \cup \{X\}$, et donc $Y = A^{\tau'}$.

Si l'ensemble A est τ'_1-fermé et τ'_1-quasi-compact, alors $A^{\tau'} = A$, et par conséquent on ne peut pas avoir un espace quasi-compact $Y \subset X'$ tel que $A \subset Y \subset A^{\tau'}$ et $Y \neq A^{\tau'}$. Donc l'espace quasi-compact (X', τ') satisfait à la condition indiquée plus haut par rapport à l'espace $(X_1, \tau'_1) = (X, \tau)$ considéré au commencement : nous disons que l'espace (X', τ') *est non-compressible par rapport à l'espace* (X, τ).

2. Si (X'', τ'') est un autre espace quasi-compact (différent de l'espace (X', τ') considéré plus haut), tel qu'il existe un homéomorphisme $g : (X, \tau) \to (X''_1, \tau''_1)$ où $X''_1 \subset X''$ est un ensemble dont l'ensemble complémentaire par rapport à l'espace X'', est formé par un seul élément ω, $X''_1 = X'' - \{\omega\}$, et τ''_1 est la topologie induite par la topologie τ'' sur X''_1, si, de plus, (X'', τ'') est non-compressible par rapport à (X'_1, τ'_1), et $X''_1 \in \tau''$ alors (X', τ') et (X'', τ'') sont homéomorphes.

Pour démontrer cette proposition, considérons l'application $h : (X', \tau') \to (X'', \tau'')$ donnée par

$$h(x') = \begin{cases} g \circ f^{-1}(x') & \text{si} \quad x' \neq X \\ \omega & \text{si} \quad x' = X. \end{cases}$$

Évidemment, cette application est bijective ; nous allons démontrer qu'elle est aussi bicontinue. Montrons que les images, par h, des ensembles τ'-ouverts sont des ensembles τ''-ouverts. Si $D' \in \tau'$ et $X \notin D'$, alors $D' \in \tau$ et donc $h(D') = g \circ f^{-1}(D')$ est un ensemble τ''_1-ouvert, et vu que X''_1 est τ''-ouvert, il résulte que $h(D')$ est τ''-ouvert.

Si $D' \in \tau'$ et $X \in D'$, alors $D' = (X - C) \cup \{X\}$, où C est un ensemble τ-quasi-compact et τ-fermé, nous avons $h(D') = h(X - C) \cup \{\omega\} =$

$= E'' \cup \{\omega\} \subset X''$, et l'ensemble $X''_1 - E'' = A$ est quasi-compact dans l'espace (X'', τ''). Si A n'est pas τ''-fermé, alors son adhérence par rapport à la topologie τ'' est $A^{\tau''} = A \cup \{\omega\}$ et, donc, il existe un espace quasi-compact $Y = A \subset X''$, de manière que $A \subset Y \subset A^{\tau''}$ et $Y \neq A^{\tau''}$, ce qui contredit le fait que (X'', τ'') est non-compressible. Il suit d'ici que l'ensemble A doit être τ''-fermé et, par conséquent, l'ensemble $X'' - A = E'' \cup \{\omega\} = h(D')$ est τ''-ouvert. Il est évident que, par la même voie, on peut démontrer que quel soit l'ensemble $D'' \in \tau''$, on a $h^{-1}(D'') \in \tau'$.

3. Nous pouvons démontrer maintenant que le théorème d'Alexandroff, sur l'immersion d'un espace localement compact, apparaît comme un cas particulier du théorème 1 et de ses conséquences.

Théorème 2. *Pour tout espace localement quasi-compact (X, τ) il existe un espace compact (X', τ') et un homéomorphisme $f : (X, \tau) \to (X'_1, \tau'_1)$ où $X'_1 = X' - \{x'\}$ (x' étant un élément de X'). Si (X'', τ'') est un autre espace compact, tel qu'il existe un homéomorphisme $g : (X, \tau) \to (X''_1, \tau''_1)$, où $X''_1 = X'' - \{x''\}$, (x'' étant un point de X''), alors les espaces (X', τ') et (X'', τ'') sont homéomorphes.*

L'existence d'un espace quasi-compact (X', τ') et d'un homéomorphisme f satisfaisant à la condition du théorème 2, résulte du théorème 1. De plus, si (X, τ) est un T_2-espace, alors (X', τ') l'est aussi et, par conséquent, (X', τ') apparaît comme un espace compact.

Soit (X'', τ'') un autre espace compact tel qu'il existe un homéomorphisme $g : (X, \tau) \to (X''_1, \tau''_1)$, où $X''_1 = X'' - \{x''\}$ et τ''_1 est la topologie induite par τ'' sur X''_1; l'espace (X'', τ'') est non-compressible par rapport à l'espace (X''_1, τ''_1); en effet, si A est un ensemble quelconque fermé dans l'espace (X''_1, τ''_1), alors quel que soit l'espace quasi-compact $Y \subset X''$, ainsi que $A \subset Y \subset A^{\tau''}$ ($A^{\tau''}$ étant l'adhérence de A par rapport à la topologie τ''), on a $Y = A^{\tau''}$. D'ici, du fait que $X''_1 \in \tau''$ et de la remarque 2, il résulte que les espaces (X', τ') et (X'', τ'') sont homéomorphes; ainsi le théorème d'Alexandroff est complètement démontré.

§ 2. Dans cette partie, comme nous l'avons dit plus haut, nous allons nous occuper de certaines conditions de quasi-compacité.

D'abord, quelques définitions:

Définition 5. *Un espace topologique (X, τ) est un espace de Lindelöff si tout recouvrement ouvert $\mathfrak{D}$ de l'espace (X, τ) contient un sous-recouvrement dénombrable.*

Définition 6. *Un filtre $\mathfrak{F}$ sur X est, par définition, filtre élémentaire associé à la suite $(x_n)_{n \in N}$ si, quel que soit l'élément M de $\mathfrak{F}$, on a $x_n \in M$ à l'exception d'un nombre fini de termes x_n.*

Théorème 3. *Si (X, τ) est un espace topologique satisfaisant aux conditions:*

(L) *(X, τ) est un espace de Lindelöff,*

(E) *tout filtre élémentaire sur X admet un point adhérent,*

alors (X, τ) est quasi-compact.

Démonstration. Supposons, par absurde, qu'il existe un filtre $\mathfrak{F}$ sur X qui n'admet aucun point adhérent, donc $\bigcap_{M \in \mathfrak{F}} M^{\tau} = \emptyset$, il en résulte que la famille $\mathfrak{D} = \{X - M^{\tau};\ M \in \mathfrak{F}\}$ représente un recouvrement ouvert pour l'espace X; étant donné que cet espace satisfait à la condition (L) il suit qu'il existe une sous-famille dénombrable $\mathfrak{D}_0 \subset \mathfrak{D}$, de sorte que $X \subset \bigcup \mathfrak{D}_0$, où

$$\mathfrak{D}_0 = \{X - M_1^{\tau},\ X - M_2^{\tau}, \ldots, X - M_n^{\tau} \ldots\}$$

et $M_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$

La classe $\mathfrak{G}$ des ensembles M_i considérés plus haut est un système de générateurs pour un filtre $\mathfrak{G}''$ sur X et de plus on a

$$(*) \qquad \bigcap_{M_i \in \mathfrak{G}} M_i^{\tau} = \emptyset .$$

La famille $\mathfrak{G}' = \{\bigcap_{\alpha \in \Gamma} M_\alpha,\ \Gamma \text{ fini},\ M_\alpha \in \mathfrak{G}\}$ est une base de filtre pour $\mathfrak{G}''$.

Il est évident que cette base est dénombrable (car le système de générateurs $\mathfrak{G}$ a ce même caractère).

Soit $\mathfrak{G}' = \{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$ et $B_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, $n = 1, 2, \ldots$ On voit immédiatement que $(B_n)_{n \in N}$ est également une base pour $\mathfrak{G}''$, et que la suite $(B_n)_{n \in N}$ est descendante. Nous associons à la suite $(B_n)_{n \in N}$ une suite de points (a_n) de sorte que $a_n \in B_n$; si $\mathfrak{F}''$ est le filtre élémentaire associé à la suite (a_n), alors

$$\mathfrak{G}'' < \mathfrak{F}''$$

(parce que si $\mathfrak{B}$ est une base pour $\mathfrak{F}''$, alors quel que soit l'élément B_n de la base du filtre $\mathfrak{G}''$, on trouve dans B_n, à l'exception d'un nombre fini, tous les points de la suite (a_n) et, par conséquent, il existe un $B \in \mathfrak{B}$ de manière que $B_n \supset \mathfrak{B}$)

Conformément à la condition (E), $\mathfrak{F}''$ admet un point adhérent; d'ici et du fait que $\mathfrak{G}'' < \mathfrak{F}''$ il résulte $\bigcap_{E \in \mathfrak{G}''} E^{\tau} \neq \emptyset$ et parce que $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{G}''$ il suit que $\bigcap_{E \in \mathfrak{G}} E^{\tau} \neq \emptyset$, ce qui contredit la relation (*) et de cette façon le théorème est complètement démontré.

Le résultat obtenu nous permet de présenter d'une manière plus commode et plus précise le comportement des espaces métriques du point de vue de la quasi-compacité; nous pouvons démontrer notamment le

Théorème 4. *Un espace métrique* (X, τ_ρ) *est quasi-compact (donc, compact) si et seulement s'il satisfait à la condition* (E).

La nécessité est évidente. Réciproquement, supposons que (X, τ_ρ) satisfait à la condition (E); alors, en utilisant le lemme de Tukey, (voire par ex., [3], p. 62), il en résulte que l'espace considéré est séparable, donc il satisfait au deuxième axiome de la dénombrabilité et par conséquent il est un espace de Lindelöff, c'est-à-dire (X, τ_ρ) satisfait aussi à la condition (L_i) du théorème 3, ce qui achève de prouver le théorème 4.

D'autre part, parce que la condition (E) est équivalente à la compacité par des suites, nous avons tout de suite la démonstration du

Théorème 5. *Dans un espace métrique* (X, τ_ρ) *les conditions suivantes sont équivalentes deux par deux.*

1. (X, τ_ρ) *est un espace quasi-compact,*
2. (X, τ_ρ) *satisfait à la propriété de Bolzano-Weierstrass* (toute partie infinie de X admet un point d'accumulation).
3. (X, τ_ρ) *est quasi-compact par des suites* (toute suite (x_n) de points de l'espace X admet une valeur d'adhérence).

BIBLIOGRAPHIE

1. Alexandroff P. S., Hopf H. — *Topologie*. Springer-Verlag, Berlin, 1935.
2. Bourbaki N. — *Eléments de Mathématique, Topologie générale*. Livre III, chap. I, Hermann, Paris, 1964.
3. Hewitt E., Stramberg K. — *Real and Abstract Analysis*. Springer-Verlag, Berlin 1965.

ASUPRA UNOR PROBLEME DE CVASI-COMPACITATE

Rezumat

Rezultatul principal din §1 este o teoremă de imersiune a unui spaţiu topologic oarecare într-un spaţiu cvasi-compact (teorema 1); se arată că această teoremă conţine ca un caz particular binecunoscuta teoremă a lui Alexandrov cu privire la bicompactificarea unui spaţiu local compact.

Teorema 3 din § 2 dă două condiţii suficiente de cvasi-compacitate a unui spaţiu topologic (X, τ):

(L_i) (X, τ) este spaţiu Lindelöff.

(E) Orice filtru elementar pe X admite un punct aderent. Această teoremă permite să se pună în evidenţă, foarte simplu, modul în care se comportă spaţiile metrice din punctul de vedere al cvasi-compacităţii; rezultatele sînt formulate în teoremele 4 şi 5.

SUR LES ESPACES BITOPOLOGIQUES CONNEXES

PAR

T. BÎRSAN

1. La notion d'espace bitopologique a été introduite en 1963 par J. C. Kelly [2]: un ensemble X muni de deux topologies $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$. Des propriétés de ces espaces se sont occupés J. C. Kelly [2], E. P. Lane [3], etc. En 1967, W. J. Pervin [4] a étudié les espaces bitopologiques connexes.

Dans cette Note, nous nous occupons du produit et de l'espace quotient des espaces bitopologiques connexes. Nous introduirons la notion d'espace bitopologique localement connexe et indiquerons quelques propriétés.

2. Un espace bitopologique est dit *connexe* [4], s'il ne peut pas s'exprimer comme réunion de deux ensembles non vides A et B tels que $(A \cap \bar{B}^{\mathfrak{P}}) \cup (\bar{A}^{\mathfrak{Q}} \cap B) = \emptyset$.

On dit qu'une fonction $f: (X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) \to (X^*, \mathfrak{P}^*, \mathfrak{Q}^*)$ est *continue* [4] si les fonctions induites $f_1: (X, \mathfrak{P}) \to (X^*, \mathfrak{P}^*)$ et $f_2: (X, \mathfrak{Q}) \to (X^*, \mathfrak{Q}^*)$ sont continues.

Par le *produit* des espaces bitopologiques $(X_i, \mathfrak{P}_i, \mathfrak{Q}_i)$ $i \in I$, nous entendrons l'espace $(X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$, où $X = \Pi X_i$ et $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ sont les topologies produits des topologies $\mathfrak{P}_i$ $(i \in I)$ et $\mathfrak{Q}_i$ $(i \in I)$ respectivement.

Théorème 1. *Pour que l'espace bitopologique produit* $(X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ *soit connexe, il faut et il suffit que chacun de ses facteurs* $(X_i, \mathfrak{P}_i, \mathfrak{Q}_i)$, $i \in I$, *soit connexe.*

Nécessité. Supposons que l'espace bitopologique produit est connexe. Parce que les espaces facteurs sont les images de l'espace produit par des fonctions projections et ces fonctions sont évidemment continues, il résulte ([4], théorème D) que les espaces bitopologiques facteurs sont connexes.

Suffisance. Montrons d'abord que le produit d'un nombre fini d'espaces bitopologiques connexes est connexe. Soient $(X_i, \mathfrak{P}_i, \mathfrak{Q}_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, les espaces bitopologiques connexes et $(X_0, \mathfrak{P}_0, \mathfrak{Q}_0)$ leur produit. Supposons par absurde, que l'espace X_0 n'est pas connexe. En vertu du théorème B [4], il existe une fonction continue $f: (X_0, \mathfrak{P}_0, \mathfrak{Q}_0) \xrightarrow{sur} (D, \mathfrak{L}|D, \mathfrak{R}|D)$,