Théorème 4. *Un espace métrique* (X, τ_ρ) *est quasi-compact (donc, compact) si et seulement s'il satisfait à la condition* (E).

La nécessité est évidente. Réciproquement, supposons que (X, τ_ρ) satisfait à la condition (E); alors, en utilisant le lemme de Tukey, (voire par ex., [3], p. 62), il en résulte que l'espace considéré est séparable, donc il satisfait au deuxième axiome de la dénombrabilité et par conséquent il est un espace de Lindelöff, c'est-à-dire (X, τ_ρ) satisfait aussi à la condition (L_c) du théorème 3, ce qui achève de prouver le théorème 4.

D'autre part, parce que la condition (E) est équivalente à la compacité par des suites, nous avons tout de suite la démonstration du

Théorème 5. *Dans un espace métrique* (X, τ_ρ) *les conditions suivantes sont équivalentes deux par deux.*

1. (X, τ_ρ) *est un espace quasi-compact,*
2. (X, τ_ρ) *satisfait à la propriété de Bolzano-Weierstrass* (toute partie infinie de X admet un point d'accumulation).
3. (X, τ_ρ) *est quasi-compact par des suites* (toute suite (x_n) de points de l'espace X admet une valeur d'adhérence).

BIBLIOGRAPHIE

1. Alexandroff P. S., Hopt H. — *Topologie*. Springer-Verlag, Berlin, 1935.
2. Bourbaki N. — *Éléments de Mathématique, Topologie générale*. Livre III, chap. I, Hermann, Paris, 1964.
3. Hewitt E., Stramberg K. — *Real and Abstract Analysis*. Springer-Verlag, Berlin 1965.

ASUPRA UNOR PROBLEME DE CVASI-COMPACITATE

Rezumat

Rezultatul principal din §1 este o teoremă de imersiune a unui spaţiu topologic oarecare într-un spaţiu cvasi-compact (teorema 1); se arată că această teoremă conţine ca un caz particular binecunoscuta teoremă a lui Alexandrov cu privire la bicompactificarea unui spaţiu local compact.

Teorema 3 din § 2 dă două condiţii suficiente de cvasi-compacitate a unui spaţiu topologic (X, τ):

(L_c) (X, τ) este spaţiu Lindelöff.

(E) Orice filtru elementar pe X admite un punct aderent. Această teoremă permite să se pună în evidenţă, foarte simplu, modul în care se comportă spaţiile metrice din punctul de vedere al cvasi-compacităţii; rezultatele sînt formulate în teoremele 4 şi 5.

SUR LES ESPACES BITOPOLOGIQUES CONNEXES

PAR

T. BÎRSAN

1. La notion d'espace bitopologique a été introduite en 1963 par J. C. Kelly [2]: un ensemble X muni de deux topologies $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{Q}$. Des propriétés de ces espaces se sont occupés J. C. Kelly [2], E. P. Lane [3], etc. En 1967, W. J. Pervin [4] a étudié les espaces bitopologiques connexes.

Dans cette Note, nous nous occupons du produit et de l'espace quotient des espaces bitopologiques connexes. Nous introduirons la notion d'espace bitopologique localement connexe et indiquerons quelques propriétés.

2. Un espace bitopologique est dit *connexe* [4], s'il ne peut pas s'exprimer comme réunion de deux ensembles non vides A et B tels que $(A \cap \bar{B}^{\mathfrak{Q}}) \cup (\bar{A}^{\mathfrak{L}} \cap B) = \varnothing$.

On dit qu'une fonction $f: (X, \mathfrak{L}, \mathfrak{Q}) \to (X^*, \mathfrak{L}^*, \mathfrak{Q}^*)$ est *continue* [4] si les fonctions induites $f_1: (X, \mathfrak{L}) \to (X^*, \mathfrak{L}^*)$ et $f_2: (X, \mathfrak{Q}) \to (X^*, \mathfrak{Q}^*)$ sont continues.

Par le *produit* des espaces bitopologiques $(X_i, \mathfrak{L}_i, \mathfrak{Q}_i)$ $i \in I$, nous entendrons l'espace $(X, \mathfrak{L}, \mathfrak{Q})$, où $X = \Pi X_i$ et $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{Q}$ sont les topologies produits des topologies $\mathfrak{L}_i$ $(i \in I)$ et $\mathfrak{Q}_i$ $(i \in I)$ respectivement.

Théorème 1. *Pour que l'espace bitopologique produit* $(X, \mathfrak{L}, \mathfrak{Q})$ *soit connexe, il faut et il suffit que chacun de ses facteurs* $(X_i, \mathfrak{L}_i, \mathfrak{Q}_i)$, $i \in I$, *soit connexe.*

Nécessité. Supposons que l'espace bitopologique produit est connexe. Parce que les espaces facteurs sont les images de l'espace produit par des fonctions projections et ces fonctions sont évidemment continues, il résulte ([4], théorème D) que les espaces bitopologiques facteurs sont connexes.

Suffisance. Montrons d'abord que le produit d'un nombre fini d'espaces bitopologiques connexes est connexe. Soient $(X_i, \mathfrak{L}_i, \mathfrak{Q}_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, les espaces bitopologiques connexes et $(X_0, \mathfrak{L}_0, \mathfrak{Q}_0)$ leur produit. Supposons par absurde, que l'espace X_0 n'est pas connexe. En vertu du théorème B [4], il existe une fonction continue $f: (X_0, \mathfrak{L}_0, \mathfrak{Q}_0) \xrightarrow{\text{sur}} (D, \mathfrak{L}|D, \mathfrak{R}|D)$,

où le dernier espace bitopologique est le sous-espace induit sur $D = \{0,1\}$ par l'espace $(R, \mathfrak{L}, \mathfrak{R})$ ($\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{R}$ sont les topologies à gauche et à droite, respectivement, sur R).

Soit $a_0 = (a_i)$ un point arbitraire appartenant à X_0 et $f_1 : X_1 \to D$ une fonction partielle définie de la manière suivante : $f_1(x_1) = f((y_i))$, où $y_i = a_i$ pour $i = 2, 3, \ldots, n$ et $y_1 = x_1$; évidemment f_1 est continue. X_1 étant connexe, il résulte que f_1 est une fonction constante et par suite $f(x) = f(a_0)$ pour tout $x = (x_i)$ dont $x_i = a_i$, $i \neq 1$. Par induction, il résulte que $f(x) = f(a_0)$ pour tout $x = (x_i) \in X_0$; c'est-à-dire f est constante, ce qui est absurde.

Soit, maintenant, $a = (a_i)$, $i \in I$, un point arbitraire de l'espace $(X, \mathfrak{L}, \mathfrak{R})$ et A l'ensemble des points $x = (x_i) \in X$ tels que $x_i = a_i$, sauf pour un nombre fini d'indices i. On constate que $A = \bigcup A_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, où $A_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ est l'ensemble des points $(x_i) \in X$ tels que $x_i = a_i$ si $i \neq i_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, et la réunion s'étend à tous les systèmes finis de n indices. D'après ce qui précède, $A_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ est un sous-ensemble connexe de X, car il est, évidemment, homéomorphe au produit $\prod_{k=1}^{n} X_{i_k}$. Il suit que A est connexe, comme réunion d'ensembles $A_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ qui ont en commun le point $a = (a_i)$ (corollaire 2, [4]).

On peut démontrer ([1], p. 136) que l'ensemble A est dense dans X dans les deux topologies $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{R}$. Or, il est facile d'établir que le fait que A est connexe et dense dans X dans les deux topologies $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{R}$ implique que l'espace $(X, \mathfrak{L}, \mathfrak{R})$ est connexe.

Comme dans [1], p. 139, on démontre le

Théorème 2. *Dans l'espace produit $(X, \mathfrak{L}, \mathfrak{R})$ des espaces bitopologiques $(X_i, \mathfrak{L}_i, \mathfrak{R}_i)$, $i \in I$, la composante connexe [4] du point $x = x_i$ est le produit des composantes connexes des points x_i dans les espaces facteurs X_i.*

3. Soit $(X, \mathfrak{L}, \mathfrak{R})$ un espace bitopologique et R une relation d'équivalence sur X. L'espace *quotient* de $(X, \mathfrak{L}, \mathfrak{R})$ par rapport à R est l'espace bitopologique $(X|R, \mathfrak{L}|R, \mathfrak{R}|R)$, c'est-à-dire l'ensemble quotient $X|R$ muni des topologies quotient $\mathfrak{L}|R$ et $\mathfrak{R}|R$.

Théorème 3. *Tout espace quotient d'un espace bitopologique connexe est connexe.*

C'est une conséquence du théorème D [4], parce que la fonction canonique $\varphi : (X, \mathfrak{L}, \mathfrak{R}) \to (X|R, \mathfrak{L}|R, \mathfrak{R}|R)$ est continue.

Théorème 4. *Soit $(X, \mathfrak{L}, \mathfrak{R})$ un espace bitopologique et R une relation d'équivalence sur X. Si l'espace quotient $(X|R, \mathfrak{L}|R, \mathfrak{R}|R)$ est connexe et toute classe d'équivalence suivant R est connexe, l'espace bitopologique $(X, \mathfrak{L}, \mathfrak{R})$ est connexe.*

En supposant que X n'est pas connexe, il existerait une disconnexion $X = A|B$, où A est $\mathfrak{L}$-ouvert, et B est $\mathfrak{R}$-ouvert (théorème A, [4]). Ces

ensembles sont saturés suivant R ; en effet, la classe d'équivalence M de $x \in A$, ne peut pas rencontrer B, car, s'il en serait ainsi, alors $M = A \cap M | B \cap M$, en contradiction avec l'hypothèse. Mais alors $\varphi(A)$ et $\varphi(B)$ sont non vides, respectivement $\mathfrak{L}|R$-ouvert et $\mathfrak{R}|R$-ouvert et $X|R = \varphi(A) \cup \varphi(B)$. On est parvenu ainsi à une contradiction, qui montre que X est connexe.

On dit qu'un espace bitopologique est *totalement discontinu* si la composante connexe de chacun de ses points se réduit à lui-même. Ainsi est, par exemple, l'espace $(D, \mathfrak{L}|D, \mathfrak{R}|D)$.

Théorème 5. *L'espace quotient de l'espace bitopologique $(X, \mathfrak{L}, \mathfrak{R})$ suivant la relation d'équivalence R : „y appartient à la composante connexe de x", est un espace bitopologique totalement discontinu.*

De [4] on constate que R, ainsi défini, est une relation d'équivalence, les composantes étant les classes d'équivalences. Soit un ensemble dans $X|R$ qui contient deux points : $M = \{a, b\}$ (si M a plusieurs points le raisonnement est analogue). Pour montrer que M n'est pas connexe, montrons qu'il existe une application continue du sous-espace M sur $(D, \mathfrak{L}|D, \mathfrak{R}|D)$. A ce but, soient A et B les composantes connexes de X dont les images, par la fonction canonique, sont a et b c'est-à-dire $\varphi(A) = a$ et $\varphi(B) = b$. L'ensemble $L = A \cup B$ étant non connexe, la fonction $g : L \to (D, \mathfrak{L}|D, \mathfrak{R}|D)$, définie sur L par $g(A) = 0$ et $g(B) = 1$, est continue. Définissons maintenant la fonction surjective $f : M \to (D, \mathfrak{L}|D, \mathfrak{R}|D)$ par $f(a) = 0$, $f(b) = 1$. Il reste à démontrer que f est continue. En effet, d'après le théorème 1, [1], p. 92, et la définition d'une fonction continue dans un espace bitopologique, pour que f soit continue il faut et il suffit que $f \circ \varphi_L$ soit continue ; mais $f \circ \varphi_L = g$ et g est continue. Donc M n'est pas connexe. On est parvenu ainsi à la conclusion.

4. Définition. *On dit que l'espace bitopologique $(X, \mathfrak{L}, \mathfrak{R})$ est $\mathfrak{L}$-localement connexe par rapport à $\mathfrak{R}$ si tout point de X possède un système fondamental de $\mathfrak{L}$-voisinages connexes (bitopologiques). On dit que X est réciproquement localement connexe s'il est $\mathfrak{L}$-localement connexe par rapport à $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}$-localement connexe par rapport à $\mathfrak{L}$.*

Le fait que X et connexe ($\mathfrak{L}$-localement connexe par rapport à $\mathfrak{R}$) n'implique pas que X est $\mathfrak{L}$-localement connexe par rapport à $\mathfrak{R}$ (connexe), comme le montre le cas particulier des espaces topologiques, quand $\mathfrak{L} = \mathfrak{R}$.

Théorème 6. *Pour qu'un espace bitopologique $(X, \mathfrak{L}, \mathfrak{R})$ soit $\mathfrak{L}$-localement connexe par rapport à $\mathfrak{R}$ il faut et il suffit que toute composante connexe de tout ensemble $\mathfrak{L}$-ouvert non vide soit $\mathfrak{L}$-ouvert.*

Nécessité. Dans l'espace bitopologique X, $\mathfrak{L}$-localement connexe par rapport à $\mathfrak{R}$, considérons un ensemble A non vide et $\mathfrak{L}$-ouvert, une composante connexe B de A et $x \in B$. Il existe un $\mathfrak{L}$-voisinage connexe V de x qui est continu dans A ; alors $V \subset B$. Par conséquent, V étant un $\mathfrak{L}$-voisinage dans X, B est $\mathfrak{L}$-ouvert.

Suffisance. Il s'agit de démontrer que X est $\mathfrak{A}$-localement connexe par rapport à $\mathfrak{B}$. Soit $x \in X$ et V un $\mathfrak{A}$-voisinage ouvert de x. En vertu de l'hypothèse, la composante connexe qui contient x par rapport à V aurait un $\mathfrak{A}$-voisinage ouvert connexe de x dans X. C. q. f. d.

Ce théorème implique le fait que, dans un espace bitopologique $\mathfrak{A}$-localement connexe par rapport à $\mathfrak{B}$, les composantes connexes sont $\mathfrak{A}$-ouvertes et donc en même temps $\mathfrak{B}$-fermées. Si l'espace bitopologique X est réciproquement localement connexe, les composantes connexes sont $\mathfrak{A}$-ouvertes et $\mathfrak{B}$-ouvertes et on peut dire que X est la *somme bitopologique* de ses composantes connexes, expression dont le sens s'entend facilement.

Si on suit le même chemin qu'en [1], p. 140, on obtient :

Théorème 7. *Pour que l'espace bitopologique produit $(X, \mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ des espaces $(X_i, \mathfrak{A}_i, \mathfrak{B}_i)$, $i \in I$, soit $\mathfrak{A}$-localement connexe par rapport à $\mathfrak{B}$ (réciproquement localement connexe) il faut et il suffit que les espaces facteurs X_i soient $\mathfrak{A}_i$-localement connexes par rapport à $\mathfrak{B}_i$ (réciproquement localement connexe), $i \in I$, et X_i soit connexe pour tout i, sauf pour un nombre fini.*

Théorème 8. *Soit $(X, \mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ un espace bitopologique et R une relation d'équivalence dans X. Si $(X, \mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ est $\mathfrak{A}$-localement connexe par rapport à $\mathfrak{B}$ (réciproquement localement connexe), alors l'espace quotient $(X|R, \mathfrak{A}|R, \mathfrak{B}|R)$ est $\mathfrak{A}|R$-localement connexe par rapport à $\mathfrak{B}|R$ (réciproquement localement connexe).*

Remarque. En considérant $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ dans les théorèmes de cette Note, on retrouve les théorèmes correspondants pour les espaces topologiques.

BIBLIOGRAPHIE

1. Bourbaki N. — *Eléments de mathématique*, Livre. III, *Topologie générale*, chap. I, II, III, Moscou, 1958, (en langue russe).
2. Kelly J. C. — *Bitopological spaces*. Proc. London Math. Soc., t. XIII, 1963, p. 71—89.
3. Lane E. P. — *Bitopological spaces and quasi-uniform spaces*. Proc. London Math. Soc., t. XVII, 1967, p. 241—256.
4. Pervin W. J. — *Connectedness in bitopological spaces*. Proc. Koninklije Nederlandse Acad., 1967, p. 369—372.

ASUPRA SPAŢIILOR BITOPOLOGICE CONEXE

Rezumat

Noţiunea de spaţiu bitopologic a fost introdusă de J. C. Kelly [2]. În 1967 W. J. Pervin [4] a studiat unele proprietăţi ale spaţiilor bitopologice conexe.

În Notă ne ocupăm cu spaţiul-produs de spaţii bitopologice şi cu spaţiul-cît al unui spaţiu bitopologic, introducem noţiunea de spaţiu bitopologic local conex şi indicăm unele proprietăţi ale lor.

SUR LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

PAR

C. AVRAMESCU

Dans ce travail nous allons étudier l'existence des solutions convergentes, intégrables et uniformément continues sur $R_+ = [0, +\infty)$ pour des équations différentielles ordinaires. On dit que la fonction $x(t)$ est *convergente* s'il existe $\lim_{t\to\infty} x(t) < +\infty$. On dit que la fonction $x(t)$ est *intégrable* s'il existe $\lim_{t\to\infty} \int_0^t x(s)ds < +\infty$. Ces genres de comportements sont liés entre eux ; en effet, une solution convergente est en même temps uniformément continue. D'autre part une fonction dérivable est convergente si et seulement si sa dérivée est intégrable.

1. Nous allons étudier d'abord l'existence des solutions convergentes pour l'équation,

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0, \tag{1}$$

où $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions continues sur R_+. Des résultats semblables ont été obtenus par Levin [11], [12], Tcherkassoff [19], Opial [13], Corduneanu [6], Gheorghiu [8], [9], [10].

Nous associons à l'équation (1) l'équation

$$v' + v^2 + a(t)v + b(t) = 0, \tag{2}$$

$a(t)$ et $b(t)$ étant des fonctions continues sur R_+.

Nous allons considérer le cas où

$$b(t) \leqslant 0. \tag{3}$$

Si $b(t) = 0$ pour $t \geqslant T$, alors, parce que la solution de l'équation (1) s'écrit

$$x(t) = x(T) + x'(T) \cdot \exp \int_0^T a(s)\, ds \int_T^t \frac{1}{A(s)}\, ds, \quad t \geqslant T,$$