Suffisance. Il s'agit de démontrer que X est $\mathfrak{A}$-localement connexe par rapport à $\mathfrak{Q}$. Soit $x \in X$ et V un $\mathfrak{A}$-voisinage ouvert de x. En vertu de l'hypothèse, la composante connexe qui contient x par rapport à V aurait un $\mathfrak{A}$-voisinage ouvert connexe de x dans X. C. q. f. d.

Ce théorème implique le fait que, dans un espace bitopologique $\mathfrak{A}$-localement connexe par rapport à $\mathfrak{Q}$, les composantes connexes sont $\mathfrak{A}$-ouvertes et donc en même temps $\mathfrak{A}$-fermées. Si l'espace bitopologique X est réciproquement localement connexe, les composantes connexes sont $\mathfrak{A}$-ouvertes et $\mathfrak{Q}$-ouvertes et on peut dire que X est la *somme bitopologique* de ses composantes connexes, expression dont le sens s'entend facilement.

Si on suit le même chemin qu'en [1], p. 140, on obtient :

Théorème 7. *Pour que l'espace bitopologique produit* $(X, \mathfrak{A}, \mathfrak{Q})$ *des espaces* $(X_i, \mathfrak{A}_i, \mathfrak{Q}_i)$, $i \in I$, *soit* $\mathfrak{A}$*-localement connexe par rapport à* $\mathfrak{Q}$ *(réciproquement localement connexe) il faut et il suffit que les espaces facteurs* X_i *soient* $\mathfrak{A}_i$*-localement connexes par rapport à* $\mathfrak{Q}_i$ *(réciproquement localement connexe),* $i \in I$, *et* X_i *soit connexe pour tout* i, *sauf pour un nombre fini.*

Théorème 8. *Soit* $(X, \mathfrak{A}, \mathfrak{Q})$ *un espace bitopologique et* R *une relation d'équivalence dans* X. *Si* $(X, \mathfrak{A}, \mathfrak{Q})$ *est* $\mathfrak{A}$*-localement connexe par rapport à* $\mathfrak{Q}$ *(réciproquement localement connexe), alors l'espace quotient* $(X/R, \mathfrak{A}/R, \mathfrak{Q}/R)$ *est* $\mathfrak{A}/R$*-localement connexe par rapport à* $\mathfrak{Q}/R$ *(réciproquement localement connexe).*

Remarque. En considérant $\mathfrak{A} = \mathfrak{Q}$ dans les théorèmes de cette Note, on retrouve les théorèmes correspondants pour les espaces topologiques.

BIBLIOGRAPHIE

1. Bourbaki N. — *Eléments de mathématique*, Livre III, *Topologie générale*, chap. I, II, III, Moscou, 1958, (en langue russe).
2. Kelly J. C. — *Bitopological spaces*. Proc. London Math. Soc., t. XIII, 1963, p. 71—89.
3. Lane E. P. — *Bitopological spaces and quasi-uniform spaces*. Proc. London Math. Soc., t. XVII, 1967, p. 241—256.
4. Pervin W. J. — *Connectedness in bitopological spaces*. Proc. Koninklije Nederlandse Acad., 1967, p. 369—372.

ASUPRA SPAŢIILOR BITOPOLOGICE CONEXE

Rezumat

Noţiunea de spaţiu bitopologic a fost introdusă de J. C. Kelly [2]. În 1967 W. J. Pervin [4] a studiat unele proprietăţi ale spaţiilor bitopologice conexe.

În Notă ne ocupăm cu spaţiul-produs de spaţii bitopologice şi cu spaţiul-cît al unui spaţiu bitopologic, introducem noţiunea de spaţiu bitopologic local conex şi indicăm unele proprietăţi ale lor.

SUR LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

PAR

C. AVRAMESCU

Dans ce travail nous allons étudier l'existence des solutions convergentes, intégrables et uniformément continues sur $R_+ = [0, +\infty)$ pour des équations différentielles ordinaires. On dit que la fonction $x(t)$ est *convergente* s'il existe $\lim_{t\to\infty} x(t) < +\infty$. On dit que la fonction $x(t)$ est *intégrable* s'il existe $\lim_{t\to\infty} \int_0^t x(s)\,ds < +\infty$. Ces genres de comportements sont liés entre eux ; en effet, une solution convergente est en même temps uniformément continue. D'autre part une fonction dérivable est convergente si et seulement si sa dérivée est intégrable.

1. Nous allons étudier d'abord l'existence des solutions convergentes pour l'équation,

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0, \tag{1}$$

où $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions continues sur R_+. Des résultats semblables ont été obtenus par Levin [11], [12], Tcherkassoff [19], Opial [13], Corduneanu [6], Gheorghiu [8], [9], [10].

Nous associons à l'équation (1) l'équation

$$v' + v^2 + a(t)v + b(t) = 0, \tag{2}$$

$a(t)$ et $b(t)$ étant des fonctions continues sur R_+.

Nous allons considérer le cas où,

$$b(t) \leqslant 0. \tag{3}$$

Si $b(t) = 0$ pour $t \geqslant T$, alors, parce que la solution de l'équation (1) s'écrit

$$x(t) = x(T) + x'(T) \cdot \exp \int_0^T a(s)\,ds \int_T^t \frac{1}{A(s)}\,ds, \quad t \geqslant T,$$

où

$$A(t) = \exp \int_0^t a(s)\,ds,$$

il résulte que la condition nécessaire et suffisante pour que toutes les solutions de l'équation (1) soient convergentes est que l'on ait

$$\int_0^\infty \frac{dt}{A(t)} < +\infty. \tag{4}$$

Donc, il reste à considérer seulement le cas où $b(t) < 0$ pour $t \geqslant T$.

Théorème 1. *Si $b(t) < 0$ pour $t \geqslant T$, alors la condition nécessaire et suffisante pour que toutes les solutions de l'équation* (1) *soient convergentes est que l'on ait*

$$\int_0^\infty \left\{ \frac{1}{A(s)} \int_0^s A(\tau)\,[-b(\tau)]\,d\tau \right\} ds < +\infty. \tag{5}$$

Démonstration. Remarquons d'abord que (5) implique (4). En effet, la fonction $\int_0^t A(s)(-b(s))ds$ admet une limite, finie ou non, mais positive, quand $t \to \infty$. Et alors la limite

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\dfrac{1}{A(t)}}{\dfrac{1}{A(t)} \displaystyle\int_0^t A(s)\,(-b(s))\,ds}$$

existe et est finie, ce qui nous montre que (4) a lieu, compte tenu de (5). D'autre part, de (2) il s'ensuit

$$v' \leqslant -a(t)v - b(t),$$

d'où il résulte, d'après le lemme de Tchaplyguine que la solution de l'équation (2) qui vérifie la condition initiale $v(0) = c > 0$, est inférieure à la solution de l'équation

$$y' = -a(t)y - b(t),$$

avec la même condition initiale. Si on désigne par $\varphi(t)$ la solution de cette dernière équation, on a alors,

$$\varphi'(t) + \varphi^2(t) + a(t)\,\varphi(t) + b(t) \geqslant 0. \tag{6}$$

Nous avons montré ainsi que les hypothèses du théorème de N. Gheorghiu ([9], th. 3) sont remplies, ce qui nous assure que la conclusion de notre théorème est vraie. Remarquons encore que dans les hypothèses du théorème 1, toutes les solutions de l'équation (1) deviennent monotones pour t assez grand.

2. Passons maintenant à l'équation non-homogène,

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = f(t), \tag{7}$$

où $f(t)$ est une fonction continue sur R_+. Soit $x_1(t)$, $x_2(t)$ le système fondamental de l'équation (1), déterminé par les conditions initiales,

$$x_1(0) = x_2(0) = 1, \quad x_1'(0) = 0, \quad x_2'(0) > 0. \tag{8}$$

Parce que la solution générale de l'équation (7) est

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + x_2(t) \int_0^t \frac{f(s)}{A(s)}\, x_1(s)\,ds - x_1(t) \int_0^t \frac{f(s)}{A(s)}\, x_2(s)\,ds \tag{9}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires, il résulte que si

$$\int_0^\infty \frac{|f(t)|}{A(t)}\,dt < +\infty \tag{10}$$

alors toutes les solutions de l'équations (7) sont convergentes. Cette observation nous permet de passer à des équations non-linéaires.

Soient $f_i(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$, $i = 1, \ldots, n$, des fonctions définies dans $D = \{(t, x_i, y_i)\,;\ t \in R_+,\ |x_i| < +\infty;\ |y_i| < +\infty\}$.

Théorème 2. *Admettons les hypothèses suivantes :*

1) *f_i sont des fonctions continues dans D,*

2) *les dérivées $\partial f_i/\partial x_i$, $\partial f_i/\partial y_i$, existent et ces dérivées sont des fonctions continues dans D,*

3) *$b_i(t) \leqslant \partial f_i/\partial y_i < 0$, $\partial f_i/\partial x_i \geqslant a_i(t)$, où $a_i(t)$ et $b_i(t)$ sont des fonctions continues sur R_+*

4) $$\int_0^\infty \left\{ \frac{1}{A_i(s)} \int_0^s A_i(t)\,[-b_i(t)]\,dt \right\} ds < +\infty,$$

où

$$A_i(t) = \exp \int_0^t a_i(s)\,ds,$$

5) $$|f_i(t, x_1, \ldots, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n, y_1, \ldots, 0, y_{i+1}, \ldots, y_n)| \leqslant h_i(t),$$

où $h_i(t)$ sont des fonctions continues sur R_+,

$$6)\qquad \int_0^\infty \frac{h_i(t)}{A_i(t)}\,dt < +\infty,$$

alors toutes les solutions du système,

$$(11)\qquad x_i'' + f_i(t, x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n') = 0,$$

sont convergentes.

Démonstration. Les conditions imposées permettent, grâce au lemme d'Hadamard, d'écrire le système (11) sous la forme

$$(12)\qquad \begin{cases} x_i'' + k_i(t, x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n')x_i' + g_i(t, x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n')x_i = \\ \qquad = -f_i(t, x_1, \ldots, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n, \ldots, 0, x_{i+1}', \ldots, x_n'). \end{cases}$$

D'après l'hypothèse 3) il résulte que

$$(13)\qquad k_i \geqslant a_i(t), \quad b_i(t) \leqslant g_i < 0, \quad t \in R_+.$$

Soit $C_c^1 = C_c^1(R_+, R^n)$ l'espace des fonctions $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, continues et aux dérivées du premier ordre continues sur R_+, dont la topologie est définie avec la famille de semi-normes

$$|x|_k = \sup_{t\in[0,k]} \max_i |x_i(t)| + \sup_{t\in[0,k]} \max_i |x_i'(t)|.$$

Cette famille définit dans C_c^1 une topologie d'espace vectoriel localement convexe, séparé et métrisable.

Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble de toutes les fonctions de C_c^1 qui vérifient les conditions

$$(14)\qquad x_i(0) = \alpha_i, \quad x_i'(0) = \beta_i, \quad |x_i(t)| \leqslant M, \quad |x_i'(t)| \leqslant N,$$

où M et N sont deux nombres positifs. Définissons sur $\mathfrak{M}$ un opérateur H de la manière suivante : à chaque fonction $x(t) \in \mathfrak{M}$ nous associons la solution unique $Hx = z$ du problème,

$$(15)\qquad \begin{aligned} z_i'' + k_i(t, x_1(t), \ldots, x_1'(t), \ldots, x_n'(t))z_i' + g_i(t, x_1(t), \ldots, x_1'(t), \ldots \\ \ldots, x_n'(t))z_i = -f_i(t, x_1(t), \ldots, 0, x_{i+1}(t), \ldots), \end{aligned}$$

$$(16)\qquad z_i(0) = \alpha_i, \qquad z_i'(0) = \beta_i.$$

Il est aisé de voir que les solutions du problème (15) (16) sont bornées

par des nombres qui ne dépendent pas que de $a_i, b_i, \alpha_i, \beta_i$. Donc on peut choisir M et N suffisamment grands de manière que l'on ait $H\,\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$. Du théorème 1 il résulte que toutes les solutions du problème (15) (16) sont convergentes. L'ensemble $\mathfrak{M}$ et l'opérateur H satisfont aux conditions du théorème de Schauder-Tychonoff, comme on le vérifie aisément, ce qui nous permet de conclure l'existence d'un point fixe pour l'opérateur H, ce qui démontre le théorème.

3. Pour d'obtenir d'autres conditions d'existence des solutions convergentes, nous allons suivre la méthode de la comparaison. Cette méthode a été utilisée par Conti [5] dans le but d'obtenir des théorèmes d'existence globale, et par Corduneanu [7], dans la théorie de la stabilité. Les dernières années, cette méthode a été appliquée à l'étude du comportement des solutions par plusieurs auteurs, comme par exemple Yoshizawa [18], Brauer [3], [4], Talpalaru [14], Avramescu [1].

Considérons le système différentiel

$$(S)\qquad x'' = f(t, x, x'),$$

où x et $f(t, x, y)$ sont des vecteurs à n composantes réelles. On suppose que $f(t, x, y)$ est continue dans $D = \{t \in R_+, \|x\|, \|y\| < +\infty\}$ où $\|\cdot\|$ signifie la norme de R^n, et que par tout point de D il passe une seule intégrale du système (S).

Soit $\omega(t, r)$ une fonction scalaire, continue pour $t, r \in R_+$ et telle que l'équation

$$(E)\qquad r' = \omega(t, r)$$

admet une solution unique satisfaisant à la condition initiale $r(0) = r_0 > 0$, pour tout r_0.

Soit $V(t, x, y)$ une fonction réelle, non-negative sur D, differentiable en tout point de D. Définissons la dérivée $V'(t, x, y)$ de la fonction $V(t, x, y)$ par rapport au système (S) à l'aide de la formule,

$$(17)\qquad V'(t, x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{V(t+h, x+hy, y+hf) - V(t, x, y)}{h}.$$

Il est aisé de voir que si $x(t)$ est une solution de l'équation (S), alors

$$(18)\qquad V'(t, x(t), x'(t)) = \frac{d}{dt} V(t, x(t), x'(t)).$$

Théorème 3. *Admettons les conditions suivantes :*

1) $r\omega(t, r) \leqslant 0$;

2) *il existe $T \in R_+$, tel que pour tout $t \geqslant T$, on ait*
$V'(t, x, y) \leqslant \omega(t, V(t, x, y))$;

3) $V(t, x, y) \geqslant a(\|y\|)$, *où* $a(t)$ *est une fonction continue et croissante sur* R_+, *ayant dérivée continue sur* R_+, *et* $a(0) = 0$, $a'(0) \neq 0$.

Alors, si toutes les solutions de l'équation (E) *sont intégrables, il résulte que toutes les solutions de l'équation* (S) *sont convergentes.*

Démonstration. De (17) et de l'hypothèse 3), il s'ensuit, d'après le lemme de Wazewski [16],

$$V(t, x(t), x'(t)) \leqslant r(t), \quad t \geqslant T, \tag{19}$$

où $r(t)$ est la solution de l'équation (E), satisfaisant à la condition initiale,

$$V(T, x(T), x'(T)) = r(T). \tag{20}$$

L'hypothèse 1) nous assure que $r(t)$ est non-croissante, d'où il résulte que $r(0) \geqslant 0$, et donc $r(t)$ est définie sur R_+ et elle est intégrable; il suit d'ici que,

$$\lim_{t \to \infty} r(t) = 0.$$

De l'hypothèse 3) il résulte, compte tenu de (19),

$$\|x'(t)\| \leqslant a^{-1}(r(t)). \tag{21}$$

Mais,

$$\lim_{t \to \infty} \frac{a^{-1}(r(t))}{r(t)} = \lim_{t \to \infty} \frac{r'(t) \frac{d}{dt} a^{-1}(r(t))}{r'(t)} = \frac{1}{a'(0)} \tag{22}$$

ce qui montre que la fonction $a^{-1}(r(t))$ est intégrable. L'inégalité (21) nous montre que la fonction $x'(t)$ est aussi intégrable. Nous aurons donc,

$$\|x(t) - x(a)\| = \left\| \int_a^t x'(s)\, ds \right\| \leqslant \int_a^t \|x'(s)\|\, ds, \quad t \geqslant a;$$

on déduit d'ici que la fonction $x(t)$ est convergente.

Remarque. Nous avons supposé que $r\omega(t, r)$ conserve un certain signe; alors il est nécessaire de supposer que ce signe est négatif, parce qu'il n'existe pas de fonctions positives croissantes et intégrables.

Corollaire. *Si dans le théorème 3 on remplace les hypothèses* 1) *et* 2) *par la suivante,*

$$V'(t, x, y) \leqslant -cV(t, x, y), \quad c > 0,$$

alors la conclusion du théorème reste valable.

En effet, dans ce cas l'équation (E) est de la forme $r' = -cr$ dont les solutions sont $r(t) = r(0) \cdot \exp(-ct)$.

Le théorème suivant ne fait pas recours à l'équation de comparaison (E).

Théorème 4. *Si*

$$V'(t, x, y) \leqslant -c\|y\|, \quad c > 0, \tag{23}$$

alors toutes les solutions de l'équation (S) *sont convergentes.*

Démonstration. La fonction

$$h(t) = V(t, x(t), x'(t)) + c \int_0^t \|x'(s)\|\, ds,$$

est non-croissante, parce que, en vertu de (23), $h'(t) \leqslant 0$. Mais alors on a $h(t) \leqslant h(0)$, c'est-à-dire,

$$0 \leqslant V(t, x(t), x'(t)) \leqslant -c \int_0^t \|x'(s)\|\, ds + V(0, x(0), x'(0)),$$

d'où il résulte,

$$\int_0^t \|x'(s)\|\, ds \leqslant (1/c)\, V(0, x(0), x'(0)),$$

ce qui montre que $x'(t)$ est intégrable.

4. Soit $h(t)$ et $g(t)$ deux fonctions positives et localement intégrables sur R_+. Wintner [17] a montré que si ces fonctions satisfont aux conditions,

$$\int_0^\infty dt/h(t) = \infty, \qquad \int_0^\infty g(t)\, dt < +\infty, \tag{24}$$

alors toutes les solutions de l'équation,

$$r' = h(r)\, g(t) \tag{25}$$

sont convergentes. Posons,

$$r(\infty) = \lim_{t \to \infty} r(t).$$

Théorème 5. *Dans les conditions* (24) *et*

$$\int_0^\infty \left[\int_t^\infty g(s)\, ds \right] dt < +\infty, \tag{26}$$

les fonctions $r(\infty) - r(t)$ *sont intégrables.*

En effet, en appliquant le théorème de l'Hospital nous aurons,

$$\lim_{t \to \infty} \frac{r(\infty) - r(t)}{\int_t^\infty g(s)\, ds} = \lim_{t \to \infty} \frac{-r'(t)}{-g(t)} = h(r(\infty)),$$

d'où, compte tenu du fait que les fonctions $r(\infty) - r(t)$ et $\int_t^\infty g(s)\, ds$ sont positives, il résulte d'après (26) que $r(\infty) - r(t)$ est intégrable.

Corollaire. *Soit $h(t)$ et $g(t)$ deux fonctions définies et localement sommables sur R_+, avec $g(t) \geq 0$ pour $t \geq T \geq 0$ et $h(t) > 0$ pour tout t, satisfaisant aux conditions.*

$$\int_0^\infty dt / h(t) = +\infty, \qquad \int_0^\infty g(t)\, dt = 0, \tag{24'}$$

$$\int_T^\infty \left\{ \int_t^\infty g(s)\, ds \right\} dt < +\infty. \tag{26'}$$

Alors toutes les fonctions $r(t) - r(0)$ sont intégrables.

En effet, de l'égalité,

$$\int_{r(0)}^{r(s)} dr / h(r) = \int_0^s h(t) dt$$

qui s'obtient en intégrant l'équation (25), il résulte que $r(\infty) = r(0)$. Donc nous n'avons qu'à appliquer le théorème précédent sur l'intervalle $[T, \infty)$.

5. Nous allons chercher maintenant l'existence des solutions intégrables pour l'équation linéaire scalaire,

$$r' = a(t) r + b(t) \tag{27}$$

$a(t)$ et $b(t)$ étant des fonctions localement sommables sur R_+.

Théorème 6. *En supposant que.*

1) $|b(t)| \exp(ct) \leq k, \quad k, c > 0.$

2) *les fonctions.* $\exp\left\{ \int_0^t (a(s) + c)\, ds \right\}$; $\quad \int_0^t \exp\left\{ \int_u^t (a(s) + c)\, ds \right\} du$,

sont bornées sur R_+,
toutes les solutions de l'équation (27) sont intégrables

Démonstration. Considérons l'équation.

$$u' = (a(t) + c) u + b(t) \exp(ct). \tag{28}$$

D'après Perron [18], en tenant compte de nos hypothèses, il résulte que toutes les solutions de l'équation (28) sont bornées. Mais il est aisé de voir que les solutions de l'équation (27) ont la forme $r(t) = u(t) \exp(-ct)$, ce qui montre que les solutions de l'équation (27) sont intégrables. Ce résultat peut être formulé aussi pour des systèmes non-linéaires.

Théorème 7. *Admettons les hypothèses suivantes :*

1) $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$, *sont des fonctions continues pour* $t \in R_+$, $x_i \in R$;

2) $\partial f_i / \partial x_i$ *sont des fonctions continues pour* $t \in R_+$, $x_i \in R$;

3) $\partial f_i / \partial x_i \leq a_i(t)$ *où* $a_i(t)$ *sont des fonctions continues sur* R_+;

4) $|f_i(t, x_1, \ldots, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)| \leq k \exp(-c_i t)$, $k > 0$, $c_i > 0$;

5) *les fonctions*

$$\exp\left\{ \int_0^t (a_i(s) + c_i)\, ds \right\}, \qquad \int_0^t \exp\left\{ \int_u^t (a_i(s) + c_i) ds \right\} du$$

sont bornées.

Alors toutes les solutions du système,

$$x_i' = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{29}$$

sont intégrables.

Démonstration. La démonstration est semblable à la démonstration du théorème 2. Grâce au lemme d'Hadamard le système (29) peut s'écrire :

$$x_i' = k_i(t, x_1, \ldots, x_n) x_i + f_i(t, x_1, \ldots, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \tag{30}$$

où,

$$k_i = \int_0^1 \frac{\partial f_i(t, x_1, \ldots, \tau x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{\partial x_i} d\tau. \tag{31}$$

Donc nous aurons

$$k_i(t, x_1, \ldots, x_n) \leq a_i(t) \tag{32}$$

Nous envisagerons dans l'espace $C_c(R_+, R^n)$ des fonctions continues sur R_+ à valeurs dans R^n, avec la topologie de la convergence compacte (voir [2] ch. 3, §3, n.1), l'opérateur H qui fait correspondre à chaque $x \in C_c$ la solution $z = Hx$ du problème.

$$z_i' = k_i(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) z_i + f_i(t, x_1(t), \ldots, 0, x_{i+1}(t), \ldots, x_n(t) \tag{33}$$

$$z_i(0) = d_i. \tag{34}$$

Comme nous avons observé plus haut, la solution du problème (33) (34) est de la forme

$$z_i(t) = u_i(t) \exp(-c_i t),$$

où $u_i(t)$ est la solution du problème

$$u_i' = (k_i(t, x_1(t), \ldots) + c_i) u_i + f_i(t, x_1(t), \ldots, 0, x_{i+1}(t), \ldots) \exp(c_i t), \tag{35}$$

$$u_i(0) = d_i. \tag{36}$$

Mais pour la solution du problème (35), (36), on a une évaluation de la forme,

$$|u_i(t)| \leq M_i(a_i, c_i, d_i).$$

Donc si nous considérons l'ensemble $\mathfrak{M} = \{x ; x \in C_c(R_+, R^n), |x_i| \leq N_i\}$ où $N_i > M_i$, nous aurons $H\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$. L'ensemble $\mathfrak{M}$ est évidemment con

vexe et fermé dans C_c. Pour montrer la continuité de l'opérateur H il faut montrer que si $(x)_n \in C_c$ est une suite qui converge uniformément sur tout intervalle fermé et borné de R_+ à une fonction $x(t)$, la suite $H(x)_n$ converge dans le même intervalle à Hx. Mais cette chose est presque évidente. Enfin il reste à montrer que l'ensemble $H\mathfrak{M}$ este compact dans C_c. Mais l'inclusion $H\,\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$ nous montre que les fonctions de l'ensemble $H\,\mathfrak{M}$ sont uniformément bornées. De plus, pour tout $x \in H\,\mathfrak{M}$ on aura,

$$|x_i(t_1) - x_i(t_2)| \leqslant \int_{t_1}^{t_2} |x'(t)|\,dt \leqslant N_i \int_{t_1}^{t_2} a_i(t)\,dt + k \int_{t_1}^{t_2} \exp(-c_i t)\,dt,\ t_1 \leqslant t_2,$$

ce qui nous montre que les fonctions de l'ensemble $H\mathfrak{M}$ sont équicontinues sur tout intervalle borné et fermé de R_+. Par conséquent le théorème d'Ascoli est applicable et la compacité de l'ensemble $H\mathfrak{M}$ est établie. Les considérations exposées plus haut nous montrent que l'ensemble $\mathfrak{M}$ et l'opérateur H satisfont aux conditions du théorème de Schauder-Tychonoff, ce qui nous permet de conclure sur l'existence d'un point fixe pour l'opérateur H. Mais ce point fixe sera une solution de notre problème.

6. Nous allons utiliser encore la méthode de la comparaison, pour d'obtenir un théorème d'existence pour des solutions intégrables.

Soit $V(t, x)$ une fonction scalaire définie et différentiable pour $t \in R_+$, $x \in R^n$. Posons,

$$V'(t, x) = \lim_{h \to 0} \frac{V(t+h, x+hf) - V(t, x)}{h}$$

où $f(t, x)$ est une fonction continue dans $R_+ \times R^n$ à valeurs dans R^n. Considérons l'équation

$$x' = f(t, x) \tag{37}$$

et supposons que cette équation admet une solution unique pour toute condition initiale. Il est aisé de voir que si $x(t)$ est une solution de l'équation (37), alors on a,

$$V'(t, x(t)) = \frac{d}{dt} V(t, x(t)). \tag{38}$$

Théorème 8. *Admettons les conditions suivantes:*

1) $a(\|x\|) \leqslant V(t, x)$, *où* $a(t)$ *est une fonction continue et croissante dans* R_+, *avec* $a(0) = 0$;

2) $|V'(t, x)| \leqslant \omega(t, V(t, x))$ *pour* $t \geqslant T \geqslant 0$;

3) $V(t, \int_a^t x(s)\,ds) \leqslant \int_a^t \omega(s, V(s, x(s))\,ds$, *quelle que soit la fonction continue* $x(t)$, *et* $t \geqslant a \geqslant T$;

4) $\omega(t, r)$ *est non-décroissante par rapport à* r *quel que soit* $t \in R_+$. *Alors si toutes les solutions de l'équation* (E) *à valeurs initiales positives sont convergentes, il résulte que toutes les solutions de l'équation* (37) *sont intégrables.*

Démonstration. De l'hypothèse 2) il résulte que

$$V'(t, x) \leqslant \omega(t, V(t, x)),$$

et donc, d'après le lemme de Wazewski, il s'ensuit

$$V(t, x(t)) \leqslant r(t) \text{ pour } t \geqslant T, \tag{39}$$

où $x(t)$ est une solution de l'équation (37) et $r(t)$ est la solution de l'équation (E) avec la condition initiale $r(T) = V(T, x(T))$. Nous aurons,

$$V(t, \int_a^t x(s)\,ds) \leqslant \int_a^t \omega(s, V(s, x(s))\,ds \leqslant \int_a^t \omega(s, r(s))\,ds = r(t) - r(a),$$
$$t \geqslant a \geqslant T.$$

Parce que $r(t)$ est convergente, il résulte que $r(t) - r(a) \to 0$ quand $a \to \infty$. Mais de l'hypothèse 1) il résulte que $\int_a^t x(s)\,ds \to 0$ quand $a \to \infty$, ce qui achève la démonstration.

Remarque. L'hypothèse 3) peut être remplacée par la suivante:

$$V(t, \int_a^t x(s)\,ds) \leqslant \int_a^t V'(s, x(s))\,ds, \quad t \geqslant a \geqslant T, \tag{3'}$$

qui est moins restrictive, mais plus compliquée.

Dans les applications, on peut choisir par exemple $\omega(t, r) = h(r)g(t)$, où h et g satisfont aux conditions (24). Pour $V(t, x) = \|x\|$, les hypothèses 2) et 3) seront satisfaites si

$$\|x\| \leqslant \|f(t, x)\| \leqslant \omega(t, x).$$

Théorème 9. *Admettons l'hypothèse* 1) *du théorème* 8 *et encore les hypothèses suivantes:*

2) $V'(t, x) \leqslant \omega(t, V(t, x))$ *pour* $t \geqslant T \geqslant 0$;

3) $V(t, \int_a^t x(s)\,ds) \leqslant \int_a^t V(s, x(s))\,ds$, *quelle que soit la fonction continue* $x(t)$, $t \geqslant a \geqslant T$.

Alors si l'équation (E) *a toutes les solutions intégrables, il résulte que les solutions de l'équation* (37) *sont intégrables.*

Démonstration. Parce que nous avons

$$V(t, x(t)) \leqslant r(t), \quad t \geqslant T.$$

où $x(t)$ est une solution de l'équation (37) et $r(t)$ est la solution de l'équation (E) avec la condition initiale $r(T) = \Gamma(T, x(T))$, il en résulte,

$$\Gamma\left(t, \int_a^t x(s)\,ds\right) \leq \int_a^t \Gamma(s, x(s))\,ds \leq \int_a^t r(s)\,ds, \quad t \geq a \geq L,$$

et d'après I) il s'ensuit

$$\left|\int_a^t x(s)\,ds\right| \leq a^{-1}\left(\int_a^t r(s)\,ds\right),$$

ce qui démontre le théorème.

Remarque. Dans ce théorème on ne peut pas choisir comme d'habitude $\Gamma(t, x) = |x|$, parce que, comme nous avons déjà observé, $\omega(t, r)$ ne peut pas être positif. Dans ce cas on peut prendre par exemple $\Gamma(t, x) = a\exp(-bt) \cdot |x|$, où a et b sont des nombres positifs, ou d'autres fonctions du même type. Comme équation de comparaison on peut prendre l'équation (27).

7. Nous allons établir maintenant un théorème concernant l'existence des solutions uniformément continues sur R_+.

Soit $\omega(t, u, v)$ une fonction continue dans $R_+ \times R_+ \times R_+$ à valeurs dans R_+, et soit $f(t, x, y)$ une fonction continue dans $R_+ \times R^n \times R^n$ à valeurs dans R^n. Considérons les équations,

$$x'' = f(t, x, x'), \tag{40}$$

$$u'' = \omega(t, u, u'), \tag{41}$$

et supposons que le problème de Chauchy admet une solution unique pour chacune, quelles que soient les valeurs initiales.

Théorème 10. *Supposons que,*

$$\|f(t, x, y)\| \leq \omega(t, x, y). \tag{42}$$

Alors si les solutions de l'équation (41) sont uniformément continues sur R_+, il résulte que les solutions de l'équation (40) sont aussi uniformément continues sur R_+.

Démonstration. Soit $x(t)$ une solution de l'équation (40); si nous posons $y(t) = x'(t)$, alors y est la solution de l'équation

$$y' = f(t, x(t), y).$$

D'après le lemme de Ważewski il résulte que $\|y(t)\| \leq u'(t)$, où $u(t)$ est la solution de l'équation (41) avec la condition $u(0) = \|x(0)\|$, $u'(0) = \|y'(0)\|$. Il s'ensuit d'ici

$$\|x(t) - x(a)\| \leq \int_a^t \|y(s)\|\,ds \leq \int_a^t u'(s)\,ds = u(t) - u(a), \quad t \geq a,$$

ce qui nous montre que $x(t)$ est uniformément continue sur R_+.

Corollaire. *Si $\omega(t, u, v) = \omega(t, v)$ et si l'équation $v' = \omega(t, v)$ a toutes les solutions bornées, alors la conclusion du théorème reste valable.*

En effet, dans ce cas il résulte d'après (41) que les solutions de l'équation (41) ont les dérivées bornées sur R_+.

8. Nous allons étudier maintenant un dernier problème, lié aux précédents. Soit $t_n \in R_+$ une suite convergente vers ∞. Nous posons la question suivante : si pour une solution de l'équation (42), $x(t)$, on a $\lim_{n\to\infty} x(t_n) = L$, dans quelles conditions peut-on conclure que $\lim_{t\to\infty} x(t) = L$. Nous donnerons une réponse partielle à cette question. Dans ce but nous allons démontrer le lemme suivant :

Lemme. *Soit t_n une suite convergent vers l'infini, satisfaisant aux conditions*

$$0 < t_n < t_{n+1}, \qquad \lim_{n\to\infty} (t_{n+1} - t_n) = 0. \tag{43}$$

Soit $g(t)$ une fonction scalaire continue, telle que,

$$\lim_{n\to\infty} g(t_n) = L. \tag{44}$$

Alors pour l'existence de la limite

$$\lim_{t\to\infty} g(t) \tag{45}$$

il faut et il suffit que $g(t)$ soit uniformément continue sur R_+.

Démonstration. La nécessité résulte du fait que toutes les fonctions convergentes sont uniformément continues. Montrons maintenant la suffisance. On peut supposer dans (44) que $L = 0$, parce qu'on peut remplacer $g(t)$ par $g(t) - L$. Si $g(t)$ ne converge pas à zéro quand $t \to \infty$, alors il existe une suite $\{T_m\}$, $T_m \to \infty$ et un nombre positif d, tels que,

$$|g(T_m)| > d. \tag{46}$$

Pour chaque m il existe un nombre n_m, tel que,

$$t_{n_m} \leq T_m < t_{n_m+1}. \tag{47}$$

Mais $g(t)$ étant une fonction uniformément continue, il existe un nombre positif c, qui dépend seulement de d, tel que, quels que soient $r_1, r_2, \in R_+$, avec $|r_1 - r_2| < c$, il résulte que $|g(r_1) - g(r_2)| < d/2$. Parce que $t_{n+1} - t^n \to$

$\to 0$, il existe un entier positif N, tel que $n > N$ implique $t_{n+1} - t_n < \varepsilon$. Si N est suffisamment grand, nous aurons en même temps $|g(t_n)| < d/2$ pour $n > N$. Soit $n > N$: nous aurons

$$T_m - t_{n_m} < \varepsilon,$$

et

$$|g(t_{n_m})| < d/2,$$

d'où il résulte,

$$|g(T_m)| \leq |g(t_{n_m}) - g(T_m)| + |g(t_{n_m})| < d,$$

ce qui est en contradiction avec l'inégalité (46). Le lemme se trouve ainsi démontré.

Remarque. La condition $t_{n+1} - t_n \to 0$ est aussi nécessaire. En effet pour la fonction $\sin t$, qui est uniformément continue sur R_+, on a $\sin \pi n = 0$, mais $\sin t$ ne tend pas à zéro quand $t \to \infty$. En utilisant le théorème 10 ou son corollaire, on peut obtenir des résultats concrets qui peuvent se formuler de la manière suivante : si les hypothèses du théorème 10 ou de son corollaire sont satisfaites et si pour une solution $x(t)$ de l'équation (40) nous avons $\lim_{n\to\infty} x(t_n) = L$, où t_n satisfait aux conditions (43), alors il résulte que cette solution est convergente.

Remarque. Nous avons démontré le lemme dans le cas d'une fonction scalaire, mais il est aisé de voir qu'il reste valable dans le cas des fonctions vectorielles.

Séminaire Mathématique
Université de Craiova

BIBLIOGRAPHIE

1. Avramescu C. — *Sur l'existence des solutions convergentes des systèmes d'équations différentielles non-linéaires*, Annali di Mat. pura ed appl. (Sous presse).
2. Bourbaki N. — *Espaces vectoriels topologiques*, livre 5. Paris, 1953.
3. Brauer F. — *Global behaviour of solutions of ordinary differential equations*, M.R.C. Technical Summary Rep. 272 (1961). Univ. of Wisconsin, p. 145—158.
4. Brauer F. — *Bounds for solutions of ordinary differential equations*. J. Math. Anal. and appl., 2 (1961), p. 1—16.
5. Conti R. — *Sulla prolungabilità delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie*. Boll. U.M.I., serie III, XI (1956), p. 510—514.
6. Corduneanu C. — *Asupra comportării soluțiilor unei clase de ecuații diferențiale neliniare de ordinul al doilea*. Stud. și cerc. șt. Iași, Matematică, VI (1956), p. 1—11.
7. Кордуняну К.—*Применение дифференциальных неравенств к теории устойчивости*. An. șt. Univ. Iași, VI (1960), p. 47—58.

8. Gheorghiu N. — *Solutions monotones et stabilité aux équations différentielles ordinaires du second ordre*. An. șt. Univ. Iași, IX, 1 (1963), p. 41—47.
9. Gheorghiu N. — *Sur le comportement asymptotique des solutions des équations différentielles ordinaires linéaires du second ordre*. An. șt. Univ. Iași, VII, 1 (1961), p. 77—84.
10. Gheorghiu N. — *Asupra soluțiilor ecuațiilor diferențiale de ordinul al doilea*. Stud. și cerc. șt. Iași, Mat., XIV, 1 (1963), p. 17—21.
11. Левин А. Ю. — *Об устойчивости решений уравнений второго порядка*. ДАН СССР, том 141, № 6 (1961).
12. Левин А. Ю. — *О линейных дифференциальных уравнениях второго порядка*. ДАН СССР, том. 153, № 6 (1963).
13. Opial Z. — *Sur l'allure asymptotique des intégrales de l'équation différentielle* $u'' + a(t)u' + b(t)u = 0$. Bull. Acad. Pol. Sci., V (1957).
14. Perron O. — *Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen*. Math. Zts. 29 (1928).
15. Taloalaru P. — *Solutions bornées des systèmes différiels*. An. șt. Univ. Iași, XI A, 2 (1965), p. 279—290.
16. Ważewski T. — *Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications*. Ann. Soc. Pol. Math., 23 (1950), p. 112—196.
17. Wintner A. — *On Abelian lemma concerning asymptotic equilibria*. Amer. J. Math., 68 (1946).
18. Yoshizawa T. — *Liapunov's function and boundedness of solutions*. Funke. Ekvacioj, 2 (1959), p. 95—145.
19. Черкасов А. Н. — *Заметка о линейных дифференциальных уравнениях второго порядка*. Вестник Моск. Унив. 1 3 (1958).

ASUPRA COMPORTĂRII ASIMPTOTICE A SOLUȚIILOR ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE ORDINARE

Rezumat

Se cercetează existența soluțiilor convergente, integrabile și uniform continue pe semiaxa $[0, +\infty)$. O soluție se va numi *convergentă* dacă ea are limită finită la $+\infty$. O soluție se va numi *integrabilă* dacă ea este integrabilă în sens Riemann $[0, +\infty)$.