ASUPRA UNEI CLASE DE ENDOMORFISME ASOCIATE INELELOR SLABE

DE

TUDORA LUCHIAN

Comunicare prezentată în sesiunea științifică a Universității „Al. I. Cuza" din 26–27 octombrie 1968

1. Se numește inel slab, [1], [2], $\mathfrak{A}^{\cdot}$ un grup aditiv abelian $\mathfrak{A}_{+}$ în care se mai definește o operație „$\cdot$" — s-o numim înmulțire — cu proprietățile

$$x \cdot 0 = x\varphi + c, \tag{1}$$

$$0 \cdot x = x\psi + c, \tag{2}$$

$$\forall x \in \mathfrak{A}^{\cdot},$$

cu φ, ψ-endomorfisme ale grupului $\mathfrak{A}_{+}$, iar c element fixat; înmulțirea este legată de adunare prin legile de distributivitate slabă

$$x \cdot (y + z) + x \cdot 0 = x \cdot y + x \cdot z, \tag{3}$$

$$(y + z) \cdot x + 0 \cdot x = y \cdot x + z \cdot x. \tag{4}$$

Din orice inel obișnuit $\mathfrak{A}^{\times}$ se poate construi un inel slab $\mathfrak{A}^{\cdot}$, [2], alegînd două endomorfisme φ, ψ, ale grupului aditiv $\mathfrak{A}_{+}$ și definind în acesta o nouă înmulțire „$\cdot$" prin

$$x \cdot y = x \times y + x\varphi + y\psi + c, \quad \forall x, y \in \mathfrak{A}_{+}. \tag{5}$$

Invers, oricărui inel slab $\mathfrak{A}^{\cdot}$ i se poate asocia un inel obișnuit $\mathfrak{A}^{\times}$ unic, avînd același grup aditiv $\mathfrak{A}_{+}$ și înmulțirea definită prin

$$x \times y = x \cdot y - x \cdot 0 - 0 \cdot y + 0 \cdot 0. \tag{6}$$

În lucrările [3]—[7], am studiat diverse probleme legate de teoria inelelor slabe.

Într-o Notă precedentă, [8], am introdus, în inelul slab $\mathfrak{A}^{\cdot}$, anumite endomorfisme D_a, S_a ale grupului aditiv $\mathfrak{A}_+$, prin

$$xD_a = x \cdot a - 0 \cdot a, \tag{7}$$

$$xS_a = a \cdot x - a \cdot 0, \tag{7'}$$

$$\forall x \in \mathfrak{A}_+, \quad a \in \mathfrak{A}_+$$

și am demonstrat o serie de proprietăți ale lor, dintre care cele mai multe sînt analoge cu acelea ale endomorfismelor R_a, L_a (multiplicările la dreapta și stînga) dintr-un inel obișnuit. În Nota prezentă voi pune în evidență noi proprietăți ale acestor transformări. În propozițiile ce urmează, textul din paranteze reprezintă enunțul propozițiilor duale, prin dualitatea dreapta-stînga.

2. Din [8] se știe că

$$D_a = R_a + \varphi, \tag{8}$$

$$S_a = L_a + \psi, \tag{8'}$$

$$\forall a \in \mathfrak{A}^{\cdot},$$

n particular $D_a = \varphi$, $S_a = \psi$.

Fie χ homomorfismul de inele $\chi : \mathfrak{A}^{\times} \to \mathcal{E}(\mathfrak{A}_+)$, cu $a\chi = R_a$, unde $\mathfrak{A}^{\times}$ este inelul asociativ obișnuit asociat prin (6) cu inelul slab considerat $\mathfrak{A}^{\cdot}$, iar $\mathcal{E}(\mathfrak{A}_+)$ este inelul endomorfismelor grupului aditiv $\mathfrak{A}_+$; se știe că $\operatorname{Im}\chi = \mathcal{R}(\mathfrak{A}^{\times})$ inelul multiplicărilor la dreapta ale lui $\mathfrak{A}^{\times}$ și N_χ nucleul lui χ este ideal bilater în $\mathfrak{A}^{\times}$, anihilatorul său la dreapta. La fel, fie χ_1 antihomomorfismul de inele $\chi_1 : \mathfrak{A}^{\times} \to \mathcal{E}(\mathfrak{A}_+)$, cu $a\chi_1 = L_a$: avem $\operatorname{Im}\chi_1 = \mathcal{L}(\mathfrak{A}^{\times})$ inelul multiplicărilor la stînga în $\mathfrak{A}^{\times}$, și N_{χ_1}, nucleul lui χ_1 este ideal bilater, anihilatorul la stînga al lui $\mathfrak{A}^{\times}$. Din (8), (8') rezultă imediat

Propoziția 1. *Pentru inelul slab $\mathfrak{A}^{\cdot}$, $D_a = D_b$ ($S_a = S_b$) dacă și numai dacă $a - b \in N_\chi$ ($a - b \in N_{\chi_1}$).*

Consecința 1. Dacă χ (χ_1) este monomorfism, $N_\chi = (0)$, ($N_{\chi_1} = (0)$), adică $\chi : \mathfrak{A}^{\times} \to \mathcal{R}(\mathfrak{A}^{\times})$ este izomorfism ($\chi_1 : \mathfrak{A}^{\times} \to \mathcal{L}(\mathfrak{A}^{\times})$ este antiizomorfism), atunci pentru inelul slab $\mathfrak{A}^{\cdot}$, $D_a = D_b$ ($S_a = S_b$) dacă și numai dacă $a = b$. Această situație apare, de exemplu, cînd inelul $\mathfrak{A}^{\times}$ are unitate.

Observația 1. Dacă $\mathfrak{A}^{\times}$ este inel neasociativ, putem restrînge χ (χ_1) la grupuri aditive și propoziția 1 și consecința 1 rămîn valabile.

Fie $\mathfrak{D}$, $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}(\mathfrak{A}_+)$ submulțimile

$$\mathfrak{D} = \{D_a \mid \forall a \in \mathfrak{A}^{\cdot}_+\}, \quad \mathcal{S} = \{S_a \mid \forall a \in \mathfrak{A}^{\cdot}_+\}.$$

Definim aplicațiile $\chi^{\cdot}$, $\chi_1^{\cdot}$ prin

$$\chi^{\cdot} : \mathfrak{A}^{\cdot} \to \mathfrak{D} \text{ cu } a\chi^{\cdot} = D_a; \tag{9}$$

$$\chi_1^{\cdot} : \mathfrak{A}^{\cdot} \to \mathcal{S} \text{ cu } a\chi_1^{\cdot} = S_a. \tag{9'}$$

Indiferent dacă inelul obișnuit $\mathfrak{A}^{\times}$ este sau nu asociativ, $\chi^{\cdot}$ și $\chi_1^{\cdot}$ au, în privința adunării, proprietățile următoare

$$D_{a_1 + a_2} = D_{a_1} + D_{a_2} - D_0, \tag{10}$$

$$S_{a_1 + a_2} = S_{a_1} + S_{a_2} - S_0 \tag{10'}$$

și deduse din ele

$$D_{a_1 - a_2} = D_{a_1} - D_{a_2} + D_0, \qquad S_{a_1 - a_2} = S_{a_1} - S_{a_2} + S_0,$$

$$D_{-a} = -D_a + 2D_0, \qquad S_{-a} = -S_a + 2S_0,$$

$$D_{\sum_1^n a_i} = \sum_1^n D_{a_i} - (n-1)D_0, \qquad S_{\sum_1^n a_i} = \sum_1^n S_{a_i} - (n-1)S_0,$$

$$D_{na} = nD_a - (n-1)D_0, \qquad S_{na} = nS_a - (n-1)S_0.$$

Dacă $\chi^{\cdot}$ ($\chi_1^{\cdot}$) este un homomorfism de la grupoidul multiplicativ $\mathfrak{A}^{\cdot}$ în $\mathcal{E}_\times \supset \mathfrak{D}$, adică

$$(a \cdot b)\chi^{\cdot} = (a\chi^{\cdot}) \times (b\chi^{\cdot}) \quad \text{sau}$$

$$D_{a \cdot b} = D_a \times D_b, \tag{11}$$

atunci evident că $\mathfrak{D}_\times = \mathfrak{A}^{\cdot}\chi^{\cdot}$ este un subsemigrup multiplicativ al semigrupului multiplicativ $\mathcal{E}_\times(\mathfrak{A}_+)$ și $\mathfrak{D}_\times$ este imagine homomorfă a grupoidului multiplicativ $\mathfrak{A}^{\cdot}$.

Analog, dacă $\chi_1^{\cdot}$ este antihomomorfism de grupoizi multiplicativi, adică

$$(a \cdot b)\chi_1^{\cdot} = (b\chi_1^{\cdot}) \times (a\chi_1^{\cdot})$$

sau

$$S_{a \cdot b} = S_b \times S_a, \tag{11$_1$}$$

atunci $\mathcal{S}_\times = \mathfrak{A}^{\cdot}\chi_1^{\cdot}$ este subsemigrup multiplicativ imagine antihomomorfă a lui $\mathfrak{A}^{\cdot}$.

Din consecința 1, cu observația 1 și din faptul că $\mathcal{E}(\mathfrak{A}_+)$ este inel asociativ și asociativitatea inelului slab $\mathfrak{A}^{\cdot}$ implică asociativitatea inelului obișnuit asociat $\mathfrak{A}^{\times}$, [8], rezultă:

Propoziția 2. *Dacă χ este izomorfism de grupuri aditive, $\chi : \mathfrak{A}^{\times}_+ \to \mathcal{R}_+(\mathfrak{A}^{\times})$, ($\chi_1 : \mathfrak{A}^{\times}_+ \to \mathcal{L}_+(\mathfrak{A}^{\times})$ este antiizomorfism) iar $\chi^{\cdot}$ homomorfism: $\mathfrak{A}^{\cdot} \to \mathfrak{D}_\times$ ($\chi_1^{\cdot}$ antihomomorfism: $\mathfrak{A}^{\cdot} \to \mathcal{S}_\times$) de grupoizi multiplicativi, atunci $\chi^{\cdot}$ este izomorfism $\mathfrak{A}^{\cdot} \simeq \mathfrak{D}_\times$ ($\chi_1^{\cdot}$ antiizomorfism: $\mathfrak{A}^{\cdot} \to \mathcal{S}_\times$); mai rezultă că inelul slab $\mathfrak{A}^{\cdot}$ este asociativ și deci și $\mathfrak{A}^{\times}$ este inel asociativ.*

În [8] s-a demonstrat că condițiile „χ homomorfism, (11)", și „χ_1 antihomomorfism, (11_1), relativ la înmulțire" sînt condiții necesare pentru asociativitatea inelului slab $\mathfrak{A}$; cu aceasta propoziția 2 se poate completa în felul următor:

Propoziția 2'. *Pentru un inel obișnuit $\mathfrak{A}^\times$ fără divizori absoluți ai lui zero la dreapta (stînga), condiția că aplicația $\chi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{H}$ este homomorfism ($\chi_1 : \mathfrak{A} \to \mathcal{S}$ antihomomorfism) relativ la înmulțire este suficientă ca inelul slab $\mathfrak{A}$ să fie asociativ, și deci atrage faptul că χ_1 este antihomomorfism (χ homomorfism) relativ la înmulțire și că $\mathfrak{A}_\times$ este inel asociativ.*

Căutînd condiții pentru ca aplicația χ să fie homomorfism de grupoizi multiplicativi (χ_1 antihomomorfism), se demonstrează ușor

Propoziția 3. *Pentru ca aplicația $\chi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{H}$, cu $a\chi = D_a$ să fie homomorfism relativ la înmulțire sînt necesare condițiile*

(12) $\quad D_c = \varphi^2$; $\quad$ (13) $\quad R_{a\varphi} = R_a \varphi, \ \forall a$; $\quad$ (14) $\quad R_{b\psi} = \varphi R_b, \ \forall b$

sau echivalentele lor respective

(12') $\quad D_c = \varphi^2$; $\quad$ (13') $\quad \varphi L_x = L_x \varphi, \ \forall x$; $\quad$ (14') $\quad \psi L_x = L_{x\varphi}$;

căci (12) rezultă imediat din (11) pentru $a = b = 0$; (11) pentru $b = 0$ și (8), (1) dau

$$R_{a\varphi + c} + \varphi = (R_a + \varphi)\varphi \text{ cu (12)} \Rightarrow R_{a\varphi} + R_c + \varphi = R_a\varphi + D_c \Rightarrow (13).$$

Tot (11) pentru $a = 0$, prin același procedeu, dă (14). Apoi din (13) rezultă

$$\forall x, \ x \times (a\varphi) = (x \times a)\varphi \Rightarrow a(\varphi L_x) = a(L_x\varphi), \ \forall a \Rightarrow (13')$$

și evident reciproc; la fel, din (14) rezultă

$$\forall x, \ x \times (b\psi) = (x\varphi) \times b \Rightarrow b(\psi L_x) = bL_{x\varphi}, \ \forall b \Rightarrow (14')$$

și reciproc.

Observația 2. Condițiile (12), (13), (14) implică

(15) $$D_{a \cdot b} = D_a D_b - [R_a R_b - R_{a \times b}].$$

Aceasta rezultă adunînd membru cu membru relațiile (12), (13), (14), apoi adunînd ambilor membri $R_{a \times b}$ și utilizînd (5) și (8)

$$R_{a\varphi} + R_{b\psi} + D_c + R_{a \times b} = R_a\varphi + \varphi R_b + \varphi^2 + R_{a \times b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{a \times b + a\varphi + b\psi + c} + \varphi = [R_a \times R_b + R_a\varphi + \varphi R_b + \varphi^2] - [R_a \times R_b - R_{a \times b}] \Rightarrow (15).$$

Din observația 2 rezultă

Propoziția 4. *Dacă inelul slab $\mathfrak{A}$ satisface condiția că χ este homomorfism relativ la înmulțire, $D_a D_b = D_{a \cdot b}$, (χ_1 antihomomorfism, $S_a S_b = S_{b \cdot a}$), atunci inelul obișnuit asociat $\mathfrak{A}^\times$ este asociativ.*

Căci $D_{a \cdot b} = D_a D_b \Rightarrow$ (12), (13), (14) $\Rightarrow$ (15) și ținînd seama de (11), $\Rightarrow$ $\Rightarrow R_a R_b = R_{a \times b}$, deci $\mathfrak{A}^\times$ este asociativ.

Observînd că, dacă inelul obișnuit $\mathfrak{A}^\times$ este asociativ, relația (15) devine (11), rezultă

Propoziția 5. *Condițiile necesare și suficiente ca $\chi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{H}$, cu $a\chi = D_a$, să fie homomorfism relativ la înmulțire sînt relațiile* (12), (13), (14) *și $\mathfrak{A}^\times$ asociativ.*

Observația 3. În cazul $\mathfrak{A}^\times$ asociativ, relația (13) sau (13') este echivalentă cu

($13''$) $$D_y L_x = L_x D_y, \quad \forall x, y \in \mathfrak{A}^\times.$$

Aceasta rezultă adunînd membru cu membru relația (13') cu relația $R_y L_x = L_x R_y$ și utilizînd (8).

Natural că afirmații duale sînt valabile pentru aplicația $\chi_1 : \mathfrak{A} \to \mathcal{S}$, anume:

Propoziția 3_1. *Pentru ca $\chi_1 : \mathfrak{A} \to \mathcal{S}$, cu $a\chi_1 = S_a$, să fie homomorfism relativ la înmulțire sînt necesare condițiile*

(12_1) $\quad S_c = \psi^2$, (13_1) $\quad L_{a\psi} = L_a\psi, \ \forall a$; $\quad$ (14) $\quad \varphi R_x = R_{x\psi}, \ \forall x$

sau respectiv echivalentele lor

($12_1'$) $\quad S_c = \psi^2$; ($13_1'$) $\quad \psi R_x = R_x\psi, \ \forall x$; ($14_1'$) $\quad L_{x\varphi} = \psi L_x, \ \forall x$.

Observația 2_1. (12_1), (13_1), (14') $\Rightarrow$ (15_1) $S_{a \cdot b} = S_b S_a - [L_b \times L_a - L_{a \times b}]$.

Propoziția 5_1. *Inelul obișnuit $\mathfrak{A}^\times$ asociativ și condițiile* (12_1), (13_1) (14), *sînt necesare și suficiente ca $\chi_1 : \mathfrak{A} \to \mathcal{S}$, cu $a\chi_1 = S_a$, să fie homomorfism relativ la înmulțire.*

Observația 3_1. Dacă $\mathfrak{A}^\times$ este inel asociativ, atunci (13_1) sau ($13_1'$) este echivalentă cu

($13_1''$) $$S_y R_x = R_x S_y, \quad \forall x, y.$$

3. În [8] s-a generalizat noțiunea de evasiregularitate, dată de Jacobson-Baer, pentru inele asociative, în felul următor: într-un inel obișnuit $\mathfrak{A}^\times$ (nu obligator asociativ) un element a se numește evasiregulat sau evasiinversabil la stînga (dreapta) relativ la perechea de endomorfisme φ, $\psi \in \cdot(\mathfrak{A}^\times_+)$ dacă a este inversabil la stînga (dreapta) în inelul slab $\mathfrak{A}$ construit cu φ, ψ și (5), sau, ceea ce este tot una (conform lemei 3 din [8]), dacă endomorfismul $D_a(S_a)$ este epimorfism. Cazul lui Jacobson-Baer se obține pentru $\varphi = \psi = I$, $c = 0$ și $\mathfrak{A}^\times$ asociativ).

Se pune atunci problema de a caracteriza faptul că D_a (S_a) este epimorfism prin o relație algebrică în $\mathfrak{H}$ ($\mathcal{S}$). Voi arăta că aceasta este posibil în cazul $\mathfrak{A}^\times$ inel asociativ fără divizori absoluți ai lui zero la dreapta (stînga).

Este ușor de verificat că, în orice inel obișnuit (chiar neasociativ), afirmația „R_a (L_a) este epimorfism" este echivalentă cu afirmația „a este inversabil la stînga (dreapta) în $\mathfrak{A}^{\times +}$". Dacă $\mathfrak{A}^\times$ este asociativ, $\chi : a \to R_a$

este un epimorfism de inele ($\chi_1 : a \to L_a$ antiepimorfism), în particular de semigrupuri multiplicative, deci avem implicațiile: R_a este epimorfism $\Rightarrow a$ este inversabil la stînga în $\mathfrak{A}^\times \overset{\chi}{\Rightarrow} R_a$ este inversabil la stînga în $\mathcal{R}(\mathfrak{A}^\times)$, ($L_a$ epimorfism $\Rightarrow a$ inversabil la dreapta în $\mathfrak{A}^\times \overset{\chi_1}{\Rightarrow} L_a$ inversabil la stînga în $\mathcal{L}(\mathfrak{A}^\times)$). Așa încît avem:

Propoziția 6. *Pentru un inel asociativ $\mathfrak{A}^\times$, R_a (L_a) epimorfism implică faptul că R_a (L_a) este inversabil la stînga în inelul $\mathcal{R}(\mathfrak{A}^\times)$ ($\mathcal{L}(\mathfrak{A}^\times)$).*

Reciproca nu este, în general, adevărată, dar dacă χ este un izomorfism, $N_\chi = (0)$, (χ_1 antiizomorfism, $N_{\chi_1} = (0)$), avem și implicația inversă: R_a (L_a) inversabil la stînga în $\mathcal{R}(\mathfrak{A}^\times)$, ($\mathcal{L}(\mathfrak{A}^\times)$), implică R_a (L_a) epimorfism al lui $\mathfrak{A}_+$. Avem deci

Propoziția 7. *Dacă $\mathfrak{A}^\times$ este inel asociativ fără divizori absoluți ai lui zero la dreapta (stînga), R_a (L_a) este epimorfism dacă și numai dacă R_a (L_a) este inversabil la stînga în $\mathcal{R}(\mathfrak{A}^\times)$, ($\mathcal{L}(\mathfrak{A}^\times)$).*

Propoziții analoge se pot demonstra pentru D_a, S_a. În [8] s-a demonstrat

Propoziția 8. (Lema 3 în [8]). *Elementul $a \in \mathfrak{A}^\cdot$ (inel slab), este inversabil la stînga (dreapta) în $\mathfrak{A}^\cdot$, dacă și numai dacă D_a (S_a) este epimorfism pentru $\mathfrak{A}_+$.*

Consecința 2. Dacă inelul slab $\mathfrak{A}^\cdot$ este asociativ și în el există măcar un element a pentru care D_a, S_a sînt simultan epimorfisme, atunci inelul slab $\mathfrak{A}^\cdot$ are unitate u și mulțimile de endomorfisme $\mathfrak{D}$, $\mathcal{S}$ sînt semigrupuri multiplicative cu unitate în inelul $\mathcal{E}(\mathfrak{A}_+)$.

Căci, din propoziția 8 rezultă că în semigrupul multiplicativ $\mathfrak{A}^\cdot$ există un element a inversabil la dreapta și stînga, în sensul că ecuațiile $x \cdot a = b$, $a \cdot y = b$ au soluții pentru orice $b \in \mathfrak{A}^\cdot$; se știe din teoria semigrupurilor că, în aceste condiții, semigrupul $\mathfrak{A}^\cdot$ este în mod necesar semigrup cu unitate u,

$u \cdot x = x \cdot u = x$, $\forall x \in \mathfrak{A}^\cdot \Rightarrow x D_u = x \cdot u = 0 \cdot u = x \Rightarrow D_u = I \in \mathfrak{D}$; $x S_u = u \cdot x = u \cdot 0 = x \Rightarrow S_u = I \in \mathcal{S}$ și asociativitatea lui $\mathfrak{A}^\cdot$ implică $\mathfrak{D}_\times$, $\mathcal{S}_\times$ semigrupuri multiplicative ([8], teorema 1).

Din propoziția 8 rezultă că dacă $\chi : \mathfrak{A}^\cdot \to \mathfrak{D}_\times$ este homomorfism, atunci avem implicațiile: D_a este epimorfism $\Rightarrow a$ este inversabil la stînga în $\mathfrak{A}^\cdot \Rightarrow D_a$ este inversabil la stînga în $\mathfrak{D}_\times$. La fel, pentru χ_1 antihomomorfism, $\mathfrak{A}^\cdot \overset{\chi_1}{\to} \mathcal{S}_\times$, avem: S_a epimorfism $\Rightarrow a$ inversabil la dreapta în $\mathfrak{A}^\cdot \overset{\chi_1}{\Rightarrow} S_a$ inversabil la stînga în $\mathcal{S}_\times$. Am demonstrat astfel

Propoziția 6'. *Dacă pentru inelul slab $\mathfrak{A}^\cdot$, aplicația χ este homomorfism (χ_1 antihomomorfism) relativ la înmulțire, atunci D_a epimorfism $\Rightarrow D_a$ inversabil la stînga în $\mathfrak{D}_\times$ (S_a epimorfism $\Rightarrow S_a$ inversabil la stînga în $\mathcal{S}_\times$).*

Ținînd seama de acestea și de propoziția 2, avem

Propoziția 7'. *Dacă $\mathfrak{A}^\times$ este un inel fără divizori absoluți ai lui zero la dreapta (stînga) și, pentru inelul slab $\mathfrak{A}^\cdot$, aplicația $\chi : \mathfrak{A}^\cdot \to \mathfrak{D}_\times$ este un homomorfism ($\chi_1 : \mathfrak{A}^\cdot \to \mathcal{S}_\times$ este antihomomorfism) relativ la înmulțire, atunci*

1) Avem χ izomorfism de semigrupuri multiplicative $\mathfrak{A}^\cdot \overset{\chi}{\simeq} \mathfrak{D}_\times$ (χ_1 antiizomorfism: $\mathfrak{A}^\cdot \to \mathcal{S}_\times$) și deci $\mathfrak{A}^\cdot$ este inel slab asociativ.

2) Aplicația $\chi_1 : \mathfrak{A}^\cdot \to \mathcal{S}_\times$ este un antihomomorfism de semigrupuri multiplicative (χ homomorfism: $\mathfrak{A}^\cdot \to \mathfrak{D}_\times$).

3) D_a (S_a) este epimorfism al grupului aditiv $\mathfrak{A}_+$ dacă și numai dacă D_a, (S_a), este inversabil la stînga în $\mathfrak{D}_\times$ ($\mathcal{S}_\times$).

4) S_a, (D_a) epimorfism pentru $\mathfrak{A}_\times$ implică S_a, (D_a), inversabil la stînga în semigrupul multiplicativ $\mathcal{S}_\times$ ($\mathfrak{D}_\times$). (Rezultă din 2)).

5) Subsemigrupul multiplicativ $\mathcal{S}_\times$ ($\mathfrak{D}_\times$) este imagine antihomomorfă (homomorfă) a semigrupului $\mathfrak{D}_\times$ prin $\chi^{-1}\chi_1$: $\mathfrak{D}_\times \to \mathcal{S}_\times$, $D_a \to S_a$ ($\chi_1^{-1}\chi : \mathcal{S}_\times \to \mathfrak{D}_\times$ antihomomorfism, $S_a \to D_a$). (Rezultă din 1) și 2)).

6) Faptul că D_a, (S_a) este epimorfism implică faptul că S_a, (D_a) este inversabil la dreapta în $\mathcal{S}_\times$ ($\mathfrak{D}_\times$). (Rezultă din 3) și 5)).

Consecința 3. Într-un inel $\mathfrak{A}^\times$ fără divizori absoluți ai lui zero la dreapta (stînga) și în care $D_{a \cdot b} = D_a \times D_b$ ($S_{a \cdot b} = S_b \times S_a$), un element a este cvasiregulat la dreapta (stînga) relativ la endomorfismele φ și ψ, dacă și numai dacă D_a, (S_a) este inversabil la stînga în $\mathfrak{D}_\times$ ($\mathcal{S}_\times$). Se justifică prin propoziția 7', 3.).

Propoziția 9. *Dacă aplicația $\chi : \mathfrak{A}^\cdot \to \mathcal{S}_\times$ este un izomorfism sau $\chi_1 : \mathfrak{A}^\cdot \to \mathcal{S}_\times$ un antiizomorfism de semigrupuri multiplicative, atunci din existența unui $a \in \mathfrak{A}^\cdot$, cu D_a și S_a simultan epimorfisme, adică a cvasiregulat bilater în $\mathfrak{A}^\times$, rezultă că $\mathfrak{A}^\cdot$ este inel slab asociativ cu unitate, $\mathfrak{D}_\times$, $\mathcal{S}_\times$ sînt subsemigrupuri cu unitatea $I \in \mathcal{E}(\mathfrak{A}_+)$, iar D_a, S_a sînt automorfisme ale grupului aditiv $\mathfrak{A}_+$.*

Primele două afirmații rezultă din propoziția 7', 1) și consecința 2. Din demonstrarea consecinței 2 se mai vede că a este inversabil bilater în $\mathfrak{A}^\cdot$, iar din izomorfismul $\chi : \mathfrak{A}^\cdot \to \mathfrak{D}_\times$ rezultă că D_a este inversabil bilater în $\mathfrak{D}_a$. Din antihomomorfismul $\chi_1 : \mathfrak{A}^\cdot \to \mathfrak{D}_\times$ rezultă că și S_a este inversabil bilater; deci D_a și S_a sînt automorfisme ale lui $\mathfrak{A}_+$.

4. Se poate constata și aici (ca și în [8]) că inelele slabe pot constitui o metodă de investigație în teoria inelelor obișnuite. Aceasta apare clar, de exemplu, în consecința 3. La fel, propoziția 7' enunță și demonstrează simplu proprietăți nebanale ale unor clase $\mathfrak{D}$, $\mathcal{S}$ de endomorfisme ale grupului aditiv al unui inel obișnuit $\mathfrak{A}^\times$: astfel privită, această propoziție s-ar enunța sub forma:

Propoziția 7*. *Dacă $\mathfrak{A}^\times$ este un inel fără divizori absoluți ai lui zero la dreapta (stînga), iar φ, ψ endomorfisme ale grupului aditiv $\mathfrak{A}_+$ satisfăcînd proprietatea că mulțimea de endomorfisme $\mathfrak{D} = \{D_a | \forall a \in \mathfrak{A}^\times,\ D_a = R_a + \varphi\}$ este subsemigrup multiplicativ, $\mathfrak{D}_\times \subset \mathcal{E}_\times(\mathfrak{A}_+)$, anume prin*

(11) $$D_a D_b = D_{a\cdot b} = D_{ab + b\varphi + a\psi + c}, \quad \forall a, b \in \mathfrak{A}^{\times}$$

($\mathcal{S} = \{S_a \mid \forall a \in \mathfrak{A}^{\times},\ S_a = L_a + \psi\}$ *este subsemigrup multiplicativ*, $\mathcal{S}_{\times} \subset \subset \mathcal{E}_{\times}(\mathfrak{A}_{+})$ *prin*

(11′) $$S_a S_b = S_{b\cdot a} = S_{ba + b\varphi + a\psi + c},)$$

cu c fixat în $\mathfrak{A}^{\times}$, *atunci*:

1) *endomorfismele* D_a, S_b *sînt permutabile între ele*

$$D_a S_b = S_b D_a, \quad \forall a, b \in \mathfrak{A}^{\times},$$

ceea ce implică asociativitatea inelului $\mathfrak{A}^{\times}$; *mai avem* $c\varphi = c\psi$.

2) *mulțimea de endomorfisme* $\mathcal{S}$ *este subsemigrup multiplicativ*, $\mathcal{S}_{\times} \subset \subset \mathcal{E}_{+}(\mathfrak{A}_{+})$, *anume prin* (11′) ($\mathfrak{G}_{\times}$ *subsemigrup* $\mathfrak{G}_{\times} \subset \mathcal{E}_{\times}(\mathfrak{A}_{+})$, *prin* (11)).

3), 4), 5), 6) au aceleași enunțuri ca în propoziția 7′.

BIBLIOGRAFIE

1. Climescu Al. — *Anneaux faibles*. Bul. Inst. polit. Iași. T. VII (XI), 1961, p. 1.
2. Climescu Al. — *O nouă clasă de inele slabe*. Bul. Inst. polit. Iași, T. X (XIV), 1964, p. 29.
3. Luchian T. — *Asupra algebrelor slabe de ordin 3, cu diviziune*. An. șt. Univ. Iași, T. X, 1964, p. 29.
4. Luchian T. — *Observații asupra inelelor slabe*. An. șt. Univ. Iași, Matematică, T. XI, 1965, p. 99.
5. Luchian T. — *Asupra unor algebre slabe generalizate de ordin 2*. An. șt. Univ. Iași, Matematică, T. XII, 1966, p. 19.
6. Luchian T. — *Homomorfisme în inele slabe*. An. șt. Univ. Iași, Matematică, T. XIII, 1967, p. 17.
7. Luchian T. — *Asupra noțiunii de domeniu de integritate în inele slabe*. An. șt. Univ. Iași, Matematică, T. XIII, 1967, p. 257.
8. Luchian T. — *Asupra unor transformări ale inelelor slabe*. An. șt. Univ. Iași, Matematică, T. XIV, 1968, p.

ON A CLASS OF ENDOMORPHISMS ASSOCIATED WITH WEAK RINGS

Summary

A weak ring $\mathfrak{A}$, [1], [2], is an abelian additive group $\mathfrak{A}_{+}$ in which a multiplication „·" is defined, with the properties (1), (2), (3), (4), where φ and ψ are group endomorphisms of $\mathfrak{A}_{+}$, c a fixed element. If $\mathfrak{A}^{\times}$ is an ordinary ring, then its additive group $\mathfrak{A}_{\times}$, with a new multiplication „·" defined by (5), is a weak ring $\mathfrak{A}$; conversely, to the weak ring $\mathfrak{A}$, it corresponds an ordinary ring $\mathfrak{A}^{\times}$ with the same additive group and the multiplication „×" defined by (6). In [8] and the present Note, we studied some endomorphisms of $\mathfrak{A}_{+}$, D_a, S_a defined by (7), (7′), wich are the analogous of R_a, L_a of an ordinary ring. Defining the mappings χ, χ_1 by (9), (9′), we prove:

Proposition 2′. If $\mathfrak{A}^{\times}$ has no right (left) annihilators and $\chi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{G}$ is an homomorphism ($\chi_1 : \mathfrak{A} \to \mathcal{S}$ an antihomomorphism) for the multiplication (that is (11), respectively (11_1), holds), then the weak ring $\mathfrak{A}$ is associative and hence χ_1 is an antihomomorphism (χ an homomorphism) for the multiplication and $\mathfrak{A}^{\times}$ is an associative ordinary ring. *Proposition* 5. χ is an homomorphism for the multiplication if and only if (12), (13), (14) hold and $\mathfrak{A}^{\times}$ is associative. *Proposition* 7. If $\mathfrak{A}^{\times}$ has no right (left) annihilators and, for the weak ring $\mathfrak{A}$, (11) (respectively (11_1)) holds, then: 1) $\chi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{G}_{\times}$ is an isomorphism of multiplicative semigroups (χ_1 is an antiisomorphism), and hence $\mathfrak{A}$ is an associative weak-ring; 2) χ_1 is an antihomomorphism of multiplicative semigroups (χ a homomorphism: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{G}_{\times}$); 3) $D_a(S_a)$ is an epimorphism of the additive group $\mathfrak{A}_{+}$ if, and only if D_a (S) is left invertible in $\mathfrak{G}_{\times}(\mathcal{S}_{\times})$; 4) S_a (D_a) is an epimorphism of $\mathfrak{A}_{+}$ implies that S_a (D_a) is left invertible in the multiplicative semigroup $\mathcal{S}_{\times}$ ($\mathfrak{G}_{\times}$); 5) the multiplicative subsemigroup $\mathcal{S}_{\times}$ ($\mathfrak{G}_{\times}$) is an antihomomorphic (homomorphic-map of $\mathfrak{G}$ by $\chi^{-1}\chi_1 : \mathfrak{G}_{\times} \to \mathcal{S}_{\times}$, $D_a \to S_a$ ($\chi_1^{-1}\chi : \mathcal{S}_{\times} \to \mathfrak{G}_{\times}$ antihomomorphisme, $S_a \to D_a$); 6) D_a (S_a) is an epimorphism implies that S_a (D_a) is righ-invertible in $\mathcal{S}_{\times}$ ($\mathfrak{G}_{\times}$). Here the week rings appear as method of investigation in the theory of ordinary rings, especially of $\mathcal{E}(\mathfrak{A}_{+})$ — the endomorphism ring of $\mathfrak{A}_{+}$.