BIBLIOGRAPHIE

1. Corduneanu C. — *Funcţii aproape-periodice*. Editura Academiei Republicii Socialiste România. 1961.
2. — *Almost Periodic Functions*. John Wiley & Sons. New York, 1968.
3. Garsoux J. — *Espaces vectoriels topologiques et distributions*. Dunod, Paris, 1963.
4. Grothendieck A. — *Espaces vectoriels topologiques*. São Paulo, 1964.

FUNCŢII APROAPE-PERIODICE DEPINZÎND DE PARAMETRI

Rezumat

Se consideră spaţiul vectorial topologic B_σ al funcţiilor $f: R \times Z \to X$, (unde R este mulţimea numerelor reale, Z o mulţime oarecare, X un spaţiu vectorial topologic separat Hausdorff, complet prin şiruri generalizate), mărginite pe mulţimile Z_α a căror reuniune este Z. O funcţie f din B_σ se numeşte σ-aproape-periodică dacă este σ-continuă în t şi pentru orice pereche (V, α) (V — o vecinătate oarecare a originii în X, $Z_\alpha \subset Z$), există un număr pozitiv $l = l(V, \alpha)$, încît orice interval al axei reale conţine măcar un număr τ astfel că $f(t + \tau, z) - f(t, z) \in V$ pentru $t \in R$ şi $z \in Z_\alpha$. Se stabileşte echivalenţa acestei definiţii cu definiţia σ-normalităţii şi se enumeră proprietăţile generale ale funcţiilor definite, ale căror demonstraţii rezultă din Nota precedentă a autorului, din acest volum.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES FRÉCHET

PAR

CORNELIU URSESCU

1. Introduction

Dans cet article, on étudie l'équation aux dérivées Fréchet*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x) = f(x, u(x)). \tag{1.1}$$

Cette équation, qui contient aussi le cas particulier des équations scalaires aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_p) = f_{ij}(x_1, \ldots, x_p, u_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, u_q(x_1, \ldots, x_p)), \tag{1.2}$$

a été considérée dans différents travaux [1], [3], [9], [10], [13], [14], [15], [16] dans des hypothèses qui supposent l'existence des dérivées partielles de Fréchet $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$ et l'existence d'une liaison entre les fonctions f, $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$, liaison qui est nommée „la condition d'intégrabilité complète".

Le problème de l'existence de la solution de l'équation (1.1), sans supposer l'existence de la dérivée partielle Fréchet $\partial f/\partial x$ et en utilisant une „condition d'intégrabilité complète", qui généralise la condition classique et qui exprime une liaison entre les fonctions f et $\partial f/\partial y$ (formule (4.2)), fait l'objet de ce travail.

On étudie ensuite la dépendance de la solution de l'équation (1.1) d'un paramètre et enfin on étudie l'équation linéaire et homogène aux dérivées de Fréchet

* Pour tout ce que concerne la dérivée de Fréchet, voir [4], [5], [6], [11].

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \left\{\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\right\} \circ \left\{f(x, y)\right\} = 0.^{*)} \tag{1.3}$$

L'équation (1.3) contient le cas particulier des équations scalaires de la forme

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) + \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial u_i}{\partial y_k}(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) \cdot f_{kj}(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) = 0. \tag{1.4}$$

Les principaux éléments utilisés dans les démonstrations des théorèmes concernant l'équation (1.1) sont le théorème 2.1 et les définitions (3.3)—(3.7).

Dans l'étude de l'équation (1.1), on peut poser le problème suivant: si u est la solution d'une équation $u(x) = g(x, u)$ et v est la solution d'une équation $v(x) = h(x, u, v)$, alors dans quelles conditions $\partial u/\partial x$ existe-t-il et quand avons-nous $\partial u/\partial x = v$?

Le théorème 2.1 donne une réponse à un problème analogue, mais plus général, dans la théorie des espaces métriques.

Dans les deuxièmes membres des formules de définition (3.3)—(3.7), c'est l'intégrale Riemann-Graves qui intervient. Les propriétés des symboles intégraux, définis par les formules (3.3)—(3.7), se déduisent à l'aide du théorème 2.2 qui a été énoncé dans un cas particulier dans [16].

Dans le cas des espaces euclidiens, la formule (3.11) est la formule de Stokes. Le théorème 3.4 a été démontré par Lepage [12] pour le cas particulier des fonctions f et g linéaires en y et $X = R^2$, $Y = R$.

2. Un théorème de point fixe

Comme on sait, le théorème de point fixe de Banach affirme que si l'espace métrique (X, ρ_X) est complet et l'opérateur $f: X \to X$ est contractant, alors il existe un point fixe unique de l'opérateur f. Le théorème suivant donne, dans des hypothèses convenables, la possibilité d'obtenir l'appartenance d'un point fixe à un sousensemble Y de X.

Théorème 2.1. *Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées:*

a) *l'espace métrique (X, ρ_X) est complet, $Y \subseteq X$, l'espace métrique (Z, ρ_Z) est complet;*

b) *l'opérateur $f: X \to X$ est contractant (soit x_* son point fixe) et $f(Y) \subseteq Y$;*

c) *l'opérateur $g: Y \to Z$ est fermé;*

d) *il existe un opérateur $h: X \times Z \to Z$ avec les propriétés:*

e) *les opérateurs $h(x, \cdot): Z \to Z$ sont également contractants (soit z_* le point fixe de l'opérateur $h(x_*, \cdot)$);*

* Par $\{F(x, y)\} \circ \{f(x, y)\}$ on entend $F(x, y)\, f(x, y) \Delta x$.

f) *les opérateurs $h(\cdot, z): X \to Z$ sont continus;*

g) $g(f(y)) = h(y, g(y))$.

Alors $x_* \in Y$ et $g(x_*) = z_*$.

Démonstration. Considérons la suite $y_1 = f(y)$, $y_{n+1} = f(y_n)$ où $y \in Y$. Par le théorème de Banach, on a $\lim_{n\to\infty} y_n = x_*$ et $\rho_X(y_n, x_*) \leq [\alpha^n/(1-\alpha)] \times \rho_X(y, f(y))$, où α est le coefficient de contraction de l'opérateur f. Comme $y \in Y$ et $f(Y) \subseteq Y$, il résulte que $y_n \in Y$. Soit $\delta(\varepsilon)$ le nombre positif qui correspond au nombre positif ε dans la définition de la continuité de l'opérateur $h(\cdot, z_*)$ au point x_*, et $\nu(\varepsilon)$ un nombre naturel qui vérifie l'inégalité:

$$\frac{\alpha^{\nu(\varepsilon)}}{1-\alpha} \rho_X(y, f(y)) \leq \delta(\varepsilon).$$

Si $n > \nu(\varepsilon)$, alors:

$$\rho_X(y_n, x_*) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \rho_X(y, f(y)) < \frac{\alpha^{\nu(\varepsilon)}}{1-\alpha} \rho_X(y, f(y)) \leq \delta(\varepsilon).$$

Soit β le coefficient d'égale contraction des opérateurs $h(x, \cdot)$. Comme $\rho_X(y_n, x_*) < \delta(\varepsilon)$, il résulte que

$$\begin{aligned}\rho_Z(g(y_{n+1}), z_*) &= \rho_Z(g(f(y_n)), z_*) = \rho_Z(h(y_n, g(y_n)), h(x_*, z_*)) \leq \\ &\leq \rho_Z(h(y_n, g(y_n)), h(y_n, z_*)) + \rho_Z(h(y_n, z_*), h(x_*, z_*)) \leq \\ &\leq \beta\, \rho_Z(g(y_n), z_*) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Pour $n > \nu(\varepsilon)$, on démontre, par induction, l'inégalité:

$$\rho_Z(g(y_n), z_*) \leq \beta^{n-\nu(\varepsilon)} \rho_Z(g(y_{\nu(\varepsilon)}), z_*) + \frac{1-\beta^{n-\nu(\varepsilon)}}{1-\beta} \varepsilon.$$

Il en résulte que

$$\limsup_{n\to\infty} \rho_Z(g(y_n), z_*) \leq \frac{1}{1-\beta} \varepsilon,$$

ou, puisque ε est positif arbitraire, $\limsup_{n\to\infty} \rho_Z(g(y_n), z_*) = 0$ et donc $\lim_{n\to\infty} \rho_Z(g(y_n), x_*) = 0$. Comme $\lim_{n\to\infty} y_n = x_*$, $\lim_{n\to\infty} g(y_n) = z_*$ et l'opérateur g est fermé, il résulte que $x_* \in Y$ et $g(x_*) = z_*$.

Le théorème reste vrai si on remplace les propriétés e) et f) par:

e') *les opérateurs $h(x, \cdot): Z \to Z$ sont contractants (soit z_* le point fixe de l'opérateur $h(x_*, \cdot)$);*

f') *les opérateurs $h(\cdot, z): X \to Z$ sont également continus.*

Théorème 2.2. *Si (X, ρ_X) et (Y, ρ_Y) sont des espaces métriques, la fonction $f: X \to Y$ est continue et K est un compact de X, alors pour tout nombre positif ε, il existe un nombre positif $\delta(\varepsilon)$ tel que pour $x' \in X$, $x \in K$ et $\rho_X(x', x) < \delta(\varepsilon)$ on ait $\rho_Y(f(x'), f(x)) < \varepsilon$.*

Démonstration. Soit $\delta_X(\varepsilon)$ le nombre positif qui correspond au nombre positif ε dans la définition de la continuité de la fonction f au point x. La famille de boules ouvertes $S(x, 1/2\,\delta_x(\varepsilon/2))$, où $x \in K$, recouvre le compact K. Donc, il existe un ensemble fini de points $x_1, \ldots, x_n$ de K tel que la famille $S(x_i, 1/2\delta_{x_i}(\varepsilon/2))$, où $i = 1, \ldots, n$, recouvre K. Le nombre

$$\delta(\varepsilon) = \min\left\{\frac{1}{2}\,\delta_{x_i}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right);\ i = 1, \ldots, n\right\}$$

a la propriété du théorème énoncé. En effet, soit $x' \in X$, $x \in K$ et $\rho_X(x', x) < \delta(\varepsilon)$; comme $x \in K$, x appartient à une boule $S(x_i, 1/2\delta_{x_i}(\varepsilon/2))$ De l'inégalité

$$\rho_X(x, x_i) < \frac{1}{2}\,\delta_{x_i}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) < \delta_{x_i}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

il résulte $\rho_Y(f(x), f(x_i)) < \varepsilon/2$ et de l'inégalité

$$\rho_X(x', x_i) \leqslant \rho_X(x', x) + \rho_X(x, x_i) < \delta(\varepsilon) + \frac{1}{2}\,\delta_{x_i}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant \delta_{x_i}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

on obtient $\rho_Y(f(x'), f(x_i)) < \varepsilon/2$. On déduit finalement l'inégalité

$$\rho_Y(f(x'), f(x)) \leqslant \rho_Y(f(x'), f(x_i)) + \rho_Y(f(x_i), f(x)) < \varepsilon,$$

et le théorème est démontré.

3. Formules de calcul intégral

Nous supposerons Λ et X des espaces linéaires normés, Y un espace de Banach, A un ensemble ouvert de Λ, B un ensemble ouvert et convexe de X et

$$C = \{y\,;\, y \in Y, \|y - c\| < r\},$$

où $c \in Y$ et $r > 0$ sont fixes*.

Théorème 3.1. *Si les fonctions*

$$\varphi : \{t\,;\, 0 \leqslant t \leqslant 1\} \to Y,$$

$$\psi : \{(t_1, t_2)\,;\, 0 \leqslant t_1,\ 0 \leqslant t_2,\ t_1 + t_2 \leqslant 1\} \to Y$$

sont continues, alors

$$\int_0^1 \varphi(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\varphi\left(\frac{t}{2}\right) + \varphi\left(\frac{t+1}{2}\right)\right] dt, \tag{3.1}$$

* Pour les intégrales de ce paragraphe, voir [7], [8].

$$\int_0^1 \left\{\int_0^{1-t_1} \psi(t_1, t_2)\,dt_2\right\} dt_1 = \int_0^1 \left\{\int_0^{1-t_1} \left[\psi\left(\frac{t_1}{2}, \frac{t_2}{2}\right) + \right.\right. \tag{3.2}$$

$$\left.\left. + \psi\left(\frac{1-t_1}{2}, \frac{1-t_2}{2}\right) + \psi\left(\frac{t_1}{2}, \frac{1+t_2}{2}\right) + \psi\left(\frac{1+t_1}{2}, \frac{t_2}{2}\right)\right] dt_2\right\} dt_1.$$

Démonstration. L'intégrale $\int_0^1 \varphi(t)dt$ se décompose dans les intégrales $\int_0^{1/2} \varphi(t)\,dt$, $\int_{1/2}^1 \varphi(t)$, dans lesquelles on fait les changements de variable $t = \tau/2$ $t = (\tau+1)/2$ respectivement, en obtenant ainsi le second membre de (3.1). L'intégrale

$$\int_0^1 \left\{\int_0^{1-t_1} \psi(t_1, t_2)\,dt_2\right\} dt_1$$

se décompose dans les intégrales

$$\int_0^{1/2} \left\{\int_0^{1/2-t_1} \psi(t_1, t_2)\,dt_2\right\} dt_1, \quad \int_0^{1/2} \left\{\int_{1/2-t_1}^{1/2} \psi(t_1, t_2)\,dt_2\right\} dt_1,$$

$$\int_0^{1/2} \left\{\int_{1/2}^{1-t_1} \psi(t_1, t_2)\,dt_2\right\} dt_1, \quad \int_{1/2}^1 \left\{\int_0^{1-t_1} \psi(t_1, t_2)\,dt_2\right\} dt_1,$$

dans lesquelles on fait les changements de variables

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{\tau_1}{2} \\ t_2 = \dfrac{\tau_2}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} t_1 = \dfrac{1-\tau_1}{2} \\ t_2 = \dfrac{1-\tau_2}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} t_1 = \dfrac{\tau_1}{2} \\ t_2 = \dfrac{1+\tau_2}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} t_1 = \dfrac{1+\tau_1}{2} \\ t_2 = \dfrac{\tau_2}{2}, \end{cases}$$

en obtenant ainsi le second membre de (3.2).

Définition. *Considérons les fonctions continues $f : B \to L(X, Y)$ et $g : B \to L(X, L(X, Y))$, ($L(X, Y)$ est l'espace linéaire normé des opérateurs linéaires et continus de X à Y, etc.). Pour des points x_0, x, x_1, x_2 de B, on note :*

$$\int_{(x_0, x)} f(\theta)\,(d\theta) = \int_0^1 f(x_0 + t(x - x_0))\,(x - x_0)\,dt, \tag{3.3}$$

$$\int_{(x_0,\,x_1,\,x_2)^*} f(0)\,(d0) = \int_{(x_0,\,x_1)} f(0)\,(d0) + \int_{(x_1,\,x_2)} f(0)\,(d0) + \int_{(x_2,\,x_0)} f(0)\,(d0)\,, \tag{3.4}$$

$$\int_{(x_0,\,x)}^{*} g(0)\,(d0) = \int_0^1 t g\,(x_0 + t(x - x_0))\,(x - x_0)\,dt\,, \tag{3.5}$$

$$\iint_{(x_0,\,x_1,\,x_2)}^{*} g(0)(d_1 0)(d_2 0) = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-t_1} g(x_0 + t_1(x_1 - x_0) + t_2(x_2 - x_0))\,(x_1 - x_0)\,(x_2 - x_0)\,dt_2 \right\} dt_1\,, \tag{3.6}$$

$$\iint_{(x_0,\,x_1,\,x_2)} g\,(0)\,(d_2 0)\,(d_1 0) = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-t_1} g(x_0 + t_1(x_1 - x_0) + t_2(x_2 - x_0))(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)\,dt_2 \right\} dt_1\,. \tag{3.7}$$

Théorème 3.2. *Si les fonctions $f: B \to L(X, Y)$ et $g: B \to L(X, L(X, Y))$ sont continues, alors pour tous les points x_1, x_2, x_3 de B on a les égalités*

$$\int_{(x_1,\,x_2)} f(0)\,(d0) = \int_{(x_1,\,\xi_3)} f(0)\,(d0) + \int_{(\xi_3,\,x_2)} f(0)\,(d0)\,, \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} \iint_{(x_1,\,x_2,\,x_3)} g\,(0)\,(d_1 0)\,(d_2 0) &= \iint_{(x_1,\,\xi_3,\,\xi_2)} g(0)(d_1 0)(d_2 0) + \\ &+ \iint_{(\xi_1,\,\xi_2,\,\xi_3)} g\,(0)\,(d_1 0)\,(d_2 0) + \iint_{(\xi_2,\,\xi_1,\,x_3)} g\,(0)\,(d_1 0)\,(d_2 0) + \\ &+ \iint_{(\xi_3,\,x_2,\,\xi_1)} g\,(0)\,(d_1 0)\,(d_2 0)\,, \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} \int_{(x_1,\,x_2,\,x_3)^*} f(0)\,(d0) &= \int_{(x_1,\,\xi_3,\,\xi_2)^*} f(0)\,(d0) + \int_{(\xi_1,\,\xi_2,\,\xi_3)^*} f(0)\,(d0) + \\ &+ \int_{(\xi_2,\,\xi_1,\,x_3)^*} f(0)\,(d0) + \int_{(\xi_3,\,x_2,\,\xi_1)^*} f(0)\,(d0)\,, \end{aligned} \tag{3.10}$$

où $\xi_1 = \frac{1}{2}(x_2 + x_3)$, $\xi_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_3)$ *et* $\xi_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$.

Démonstration. Les égalités (3.8) et (3.9) résultent des formules (3.1) et (3.2) appliquées aux fonctions:

$$t \to f(x_1 + t(x_2 - x_1))(x_2 - x_1),$$

$$(t_1, t_2) \to g(x_0 + t_1(x_1 - x_0) + t_2(x_2 - x_0))(x_1 - x_0)(x_2 - x_0).$$

Moyennant la formule:

$$\int_{(x_0,\,x)} f(0)(d0) = -\int_{(x,\,x_0)} f(0)\,(d0)$$

et (3.8), on démontre (3.10).

Théorème 3.3 (Stokes). *Si la fonction $f: B \to L(X, Y)$ est dérivable Fréchet et $\partial f/\partial x: B \to L(X, L(X, Y))$ est continue, alors pour tous points x_1, x_2, x_3 de B on a l'égalité*

$$\int_{(x_1,\,x_2,\,x_3)^*} f(0)\,(d0) = \iint_{(x_1,\,x_2,\,x_3)} \frac{\partial f}{\partial x}(0)(d_1 0)(d_2 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0)(d_2 0)\,(d_1 0)\,. \tag{3.11}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} &\iint_{(x_1,\,x_2,\,x_3)} \frac{\partial f}{\partial x}(0)\,(d_1 0)\,(d_2 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0)\,(d_2 0)\,(d_1 0) = \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-t_1} \frac{\partial f}{\partial x}(x_1 + t_1(x_2 - x_1) + t_2(x_3 - x_1))\,(x_2 - x_1)\,(x_3 - x_1)\,dt_2 \right\} dt_1 - \\ &- \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-t_1} \frac{\partial f}{\partial x}(x_1 + t_1(x_2 - x_1) + t_2(x_3 - x_1))\,(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)\,dt_2 \right\} dt_1 = \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-t_2} \frac{\partial}{\partial t_1} f(x_1 + t_1(x_2 - x_1) + t_2(x_3 - x_1))\,(x_3 - x_1)\,dt_1 \right\} dt_2 - \\ &- \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-t_1} \frac{\partial}{\partial t_2} f(x_1 + t_1(x_2 - x_1) + t_2(x_3 - x_1))\,(x_2 - x_1)\,dt_2 \right\} dt_1 = \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \left\{ f(x_2 + t_2(x_3 - x_2))(x_3 - x_1) - f(x_1 + t_2(x_3 - x_1))(x_3 - x_1) \right\} dt_2 -$$

$$- \int_0^1 \left\{ f(x_3 + t_1(x_2 - x_3))(x_2 - x_1) - f(x_1 + t_2(x_2 - x_1))(x_2 - x_1) \right\} dt_1 .$$

Par des changements de variables convenables, on arrive à l'expression :

$$\int_0^1 \left\{ f(x_1 + t(x_2 - x_1))(x_2 - x_1) + f(x_2 + t(x_3 - x_2))(x_3 - x_2) + \right.$$

$$\left. + f(x_3 + t(x_1 - x_3))(x_1 - x_3) \right\} dt$$

qui est le premier membre de (3.11).

Théorème 3.4 (Lepage). *Supposons que la fonction $f : B \times C \to L(X, Y)$ est continue, dérivable Fréchet par rapport à la variable y, $\partial f / \partial y : B \times C \to L(Y, L(X, Y))$ et $g : B \times C \to L(X, L(X, Y))$ sont continues, et pour tous points x_1, x_2, x_3 de B et y de C on a l'égalité*

$$\int_{(x_1, x_2, x_3)^*} f(\theta, y)(d\theta) = \iint_{(x_1, x_2, x_3)} g(\theta, y)(d_1\theta)(d_2\theta) . \tag{3.12}$$

Alors, pour tous les points x_1, x_2, x_3 de B et pour toute fonction $h : B \to C$ dérivable Fréchet avec $\partial h / \partial x : B \to L(X, Y)$ continue, on a l'égalité

$$\int_{(x_1, x_2, x_3)^*} f(\theta, h(\theta))(d\theta) = \iint_{(x_1, x_2, x_3)} g(\theta, h(\theta))(d_1\theta)(d_2\theta) + \tag{3.13}$$

$$+ \iint_{(x_1, x_2, x_3)} \frac{\partial f}{\partial y}(\theta, h(\theta)) \left(\frac{\partial h}{\partial x}(\theta)(d_1\theta) \right)(d_2\theta) -$$

$$- \frac{\partial f}{\partial y}(\theta, h(\theta)) \left(\frac{\partial h}{\partial x}(\theta)(d_2\theta) \right)(d_1\theta) .$$

Démonstration. Soit T le point (x_1, x_2, x_3) de $B \times B \times B$ et $[T]$ l'enveloppe convexe des points x_1, x_2, x_3. Le théorème 3.2 donne un procédé d'obtenir quatre points (x_1, ξ_3, ξ_2), (ξ_1, ξ_2, ξ_3), (ξ_2, ξ_1, x_3), (ξ_3, x_2, ξ_1) de $B \times B \times B$. Si nous répétons ce procédé n fois, nous obtiendrons 4^n points

de $B \times B \times B$, $T_i (i = 1, \ldots, 4^n)$. Évidemment $[T_i] \subseteq [T]$. Soit $\tau_{ii} \in [T_i]$ $(i = 1, \ldots, 4^n)$. On a alors de (3.10) :

$$\int_{T^*} f(\theta, h(\theta))(d\theta) = \sum_{i=1}^{4^n} \int_{T_i^*} f(\theta, h(\theta))(d\theta) =$$

$$= \sum_{i=1}^{4^n} \int_{T_i^*} \{ f(\theta, h(\theta)) - f(\tau_{ii}, h(\theta)) - f(\theta, h(\tau_{ii})) + f(\tau_{ii}, h(\tau_{ii})) \}(d\theta) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{4^n} \int_{T_i^*} f(\tau_{ii}, h(\theta))(d\theta) + \sum_{i=1}^{4^n} \int_{T_i^*} f(\theta, h(\tau_{ii}))(d\theta) - \sum_{i=1}^{4^n} \int_{T_i^*} f(\tau_{ii}, h(\tau_{ii}))(d\theta).$$

Nous allons démontrer maintenant qu'on a les égalités :

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{4^n} \int_{T_i^*} \{ f(\theta, h(\theta)) - f(\tau_{ii}, h(\theta)) - f(\theta, h(\tau_{ii})) + f(\tau_{ii}, h(\tau_{ii})) \}(d\theta) = 0,$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{4^n} \int_{T_i^*} f(\tau_{ii}, h(\theta))(d\theta) =$$

$$= \iint_T \frac{\partial f}{\partial y}(\theta, h(\theta)) \left(\frac{\partial h}{\partial x}(\theta)(d_1\theta) \right)(d_2\theta) - \frac{\partial f}{\partial y}(\theta, h(\theta)) \left(\frac{\partial h}{\partial x}(\theta)(d_2\theta) \right)(d_1\theta),$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{4^n} \int_{T_i^*} f(\theta, h(\tau_{ii}))(d\theta) = \iint_T g(\theta, h(\theta))(d_1\theta)(d_2\theta)),$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{4^n} \int_{T_i^*} f(\tau_{ii}, h(\tau_{ii}))(d\theta) = 0.$$

D'abord, les fonctions $\partial f / \partial y$ et g sont uniformément continues sur le compact $K \subset B \times C$ des points $(x, h(x'))$ où $x \in [T]$ et $x' \in [T]$. Soit $\delta(\varepsilon)$ le nombre positif qui correspond au nombre positif ε dans la définition de la continuité uniforme des fonctions $\partial f / \partial y$ et g sur le compact K. Si

d est le diamètre de l'ensemble $[T]$, alors, évidemment $d/2^n$ est le diamètre des ensembles $[T_i]$ $(i = 1, \ldots, 4^n)$. Soit, pour l'instant

$$\varphi(y) = f(x, y) - f(\tau_{ii}, y).$$

Alors

$$\|f(x, h(x)) - f(\tau_{ii}, h(x)) - f(x, h(\tau_{ii})) + f(\tau_{ii}, h(\tau_{ii}))\| =$$

$$= \|\varphi(h(x)) - \varphi(h(\tau_{ii}))\| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial y} (h(\tau_{ii} + t(x - \tau_{ii}))) \left(\frac{\partial h}{\partial x} (\tau_{ii} + t(x - \tau_{ii}))(x - \tau_{ii}) \right) \right\| dt \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t \in [0,1]} \left\| \frac{\partial f}{\partial y} (x, h(\tau_{ii} + t(x - \tau_{ii}))) - \frac{\partial f}{\partial y} (\tau_{ii}, h(\tau_{ii} + t(x - \tau_{ii}))) \right\| \times$$

$$\times \sup_{t \in [0,1]} \left\| \frac{\partial h}{\partial x} (\tau_{ii} + t(x - \tau_{ii})) \right\| \|x - \tau_{ii}\|.$$

Si $d/2^n < \delta(\varepsilon)$, alors

$$\left\| \sum_{i=1}^{4^n} \int_{T_i^*} \{f(0, h(0)) - f(\tau_{ii}, h(0)) - f(0, h(\tau_{ii})) + f(\tau_{ii}, h(\tau_{ii}))\} (d0) \right\|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{4^n} \varepsilon \sup_{x \in [T]} \left\| \frac{\partial h}{\partial x}(x) \right\| \frac{d}{2^n} 3 \frac{d}{2^n} = 3d^2 \sup_{x \in [T]} \left\| \frac{\partial h}{\partial x}(x) \right\| \varepsilon,$$

ce qui démontre la première égalité. On obtient maintenant de (3.11)

$$\sum_{i=1}^{4^n} \int_{T_i^*} f(\tau_{ii}, h(0))(d0) = \sum_{i=1}^{4^n} \iint_{T_i} \frac{\partial f}{\partial y} (\tau_{ii}, h(0)) \times$$

$$\times \left(\frac{\partial h}{\partial x}(0)(d_1 0) \right)(d_2 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(\tau_{ii}, h(0)) \left(\frac{\partial h}{\partial x}(0)(d_2 0) \right)(d_1 0)$$

et on a de (3.12)

$$\sum_{i=1}^{4^n} \int_{T_i^*} f(0, h(\tau_{ii}))(d0) = \sum_{i=1}^{4^n} \iint_{T_i} g(0, h(\tau_{ii}))(d_1 0)(d_2 0).$$

A l'aide des nouvelles expressions et par un procédé analogue, on démontre les deux égalités suivantes. La quatrième égalité est vraie, car

chaque membre de la suite est nul. L'égalité (3.13) est une conséquence des quatre égalités démontrées.

Soient les fonctions continues $f : A \times B \to L(X, Y)$, $g : A \times B \to L(X, L(X, Y))$ et les fonctions $F : A \times B \times B \to Y$, $G : A \times B \times B \to L(X, Y)$ données par les formules

$$F(\lambda, x_1, x_2) = \int_{(x_1, x_2)} f(\lambda, 0)(d0), \tag{3.14}$$

$$G(\lambda, x_1, x_2) = \int_{(x_1, x_2)} g(\lambda, 0)(d0). \tag{3.15}$$

Les théorèmes 3.5, 3.6 et 3.7 établissent des propriétés des fonctions F et G.

Théorème 3.5. *Les fonctions $F : A \times B \times B \to Y$ et $G : A \times B \times B \to L(X, Y)$ sont continues.*

Démonstration. Soient le point $(\lambda, x_1, x_2) \in A \times B \times B$ et le compact $K \subset A \times B$ formé par les points $(\lambda, x_1 + t(x_2 - x_1))$ où $0 \leqslant t \leqslant 1$. Soient $m = \sup \{\|f(\lambda, x)\| : (\lambda, x) \in K\}$ et $\delta(\varepsilon)$ le nombre positif qui correspond au nombre positif ε par le théorème 2.2. Si $\|\Delta x_1\|$, $\|\Delta x_2\|$, $\|\Delta\lambda\|$ sont plus petits que $\delta(\varepsilon)$, alors

$$\|F(\lambda + \Delta\lambda, x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) - F(\lambda, x_1, x_2)\| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \|f(\lambda + \Delta\lambda, x_1 + \Delta x_1 + t(x_2 + \Delta x_2 - x_1 - \Delta x_1)) \times$$

$$\times (x_2 + \Delta x_2 - x_1 - \Delta x_1) - f(\lambda, x_1 + t(x_2 - x_1))(x_2 - x_1)\| dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \|f(\lambda + \Delta\lambda, x_1 + t(x_2 - x_1) + (1 - t)\Delta x_1 + t\Delta x_2)\| (\|\Delta x_1\| + \|\Delta x_2\|) dt +$$

$$+ \int_0^1 \|f(\lambda + \Delta\lambda, x_1 + t(x_2 - x_1) + (1 - t)\Delta x_1 + t\Delta x_2) -$$

$$- f(\lambda, x_1 + t(x_2 - x_1))\| |x_2 - x_1| dt \leqslant (\varepsilon + m)(\|\Delta x_1\| + \|\Delta x_2\|) + \varepsilon \|x_1 - x_2\|$$

et la continuité de la fonction F est prouvée. On démontre la continuité de la fonction G de la même façon.

Théorème 3.6. *Si pour toute terne de points x_1, x_2, x_3 de B et λ de A on a l'égalité*

$$\int\limits_{(x_1, x_2, x_3)^*} f(\lambda, \theta)\,(d\theta) = \iint\limits_{(x_1, x_2, x_3)} g(\lambda, \theta)\,(d_1\theta)\,(d_2\theta), \tag{3.16}$$

alors la fonction F est dérivable Fréchet par rapport aux variables x_1 et x_2 et on a les égalités

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(\lambda, x_1, x_2) = -f(\lambda, x_1) + G(\lambda, x_2, x_1), \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}(\lambda, x_1, x_2) = f(\lambda, x_2) - G(\lambda, x_1, x_2). \tag{3.18}$$

Démonstration.

$$F(\lambda, x_1, x_2 + \Delta x_2) - F(\lambda, x_1, x_2) = \int\limits_{(x_1, x_2 + \Delta x_2)} f(\lambda, \theta)\,(d\theta) -$$

$$- \int\limits_{(x_1, x_2)} f(\lambda, \theta)\,(d\theta) = \int\limits_{(x_2, x_1, x_2 + \Delta x_2)^*} f(\lambda, \theta)\,(d\theta) + \int\limits_{(x_2, x_2 + \Delta x_2)} f(\lambda, \theta)\,(d\theta) =$$

$$= \iint\limits_{(x_2, x_1, x_2 + \Delta x_2)} g(\lambda, \theta)\,(d_1\theta)\,(d_2\theta) + \int\limits_{(x_2, x_2 + \Delta x_2)} f(\lambda, \theta)\,(d\theta).$$

$$f(\lambda, x_2)\,(\Delta x_2) = \int_0^1 f(\lambda, x_2)\,(\Delta x_2)\,dt.$$

$$G(\lambda, x_1, x_2)\,(\Delta x_2) = \int_0^1 t g(\lambda, x_1 + t(x_2 - x_1))\,(x_2 - x_1)\,(\Delta x_2)\,dt =$$

$$= -\int_0^1 (1 - t)\, g(\lambda, x_2 + t(x_1 - x_2))\,(x_1 - x_2)\,(\Delta x_2)\,dt =$$

$$- \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-t_1} g(\lambda, x_2 + t_1(x_1 - x_2))\,(x_1 - x_2)\,(\Delta x_2)\,dt_2 \right\} dt_1.$$

A l'aide des formules précédentes, on déduit les inégalités

$$\| F(\lambda, x_1, x_2 + \Delta x_2) - F(\lambda, x_1, x_2) - f(\lambda, x_2)\,(\Delta x_2) + G(\lambda, x_1, x_2)\,(\Delta x_2) \| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \iint\limits_{(x_2, x_1, x_2 + \Delta x_2)} g(\lambda, \theta)\,(d_1\theta)\,(d_2\theta) + G(\lambda, x_1, x_2)\,(\Delta x_2) \right\| +$$

$$+ \left\| \int\limits_{(x_2, x_2 + \Delta x_2)} f(\lambda, \theta)\,(d\theta) - f(\lambda, x_2)\,(\Delta x_2) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-t_1} \| g(\lambda, x_1 + t_1(x_1 - x_2) + t_2 \Delta x_2) - g(\lambda, x_2 + t_1(x_1 - x_2)) \| \times \right.$$

$$\left. \times \| x_1 - x_2 \| \, \| \Delta x_2 \| \, dt_2 \right\} dt_1 + \int_0^1 \| f(\lambda, x_2 + t\Delta x_2) - f(\lambda, x_2) \| \, \| \Delta x_2 \| \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\, \varepsilon \| x_1 - x_2 \| \, \| \Delta x_2 \| + \varepsilon \| \Delta x_2 \|,$$

si $\|\Delta x_2\| < \delta(\varepsilon)$, où $\delta(\varepsilon)$ est le nombre positif qui correspond au nombre positif ε dans la définition de la continuité de la fonction f au point x_2 et dans la définition de la continuité uniforme de la fonction g aux points $(\lambda, x_2 + t(x_1 - x_2))$ où $0 \leqslant t \leqslant 1$. La dérivabilité de la fonction F par rapport à la variable x_2 est prouvée. De l'égalité

$$F(\lambda, x_1, x_2) = -F(\lambda, x_2, x_1)$$

on déduit

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(\lambda, x_1, x_2) = -\frac{\partial F}{\partial x_2}(\lambda, x_2, x_1) = -f(\lambda, x_1) + G(\lambda, x_2, x_1).$$

Théorème 3.7. *Si la fonction f est dérivable Fréchet par rapport à la variable λ et $\partial f/\partial\lambda : A \times B \to L(\Lambda, L(X, Y))$ est continue, alors la fonction F est dérivable Fréchet par rapport à la variable λ et on a l'égalité*

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda, x_1, x_2)\,(\Delta\lambda) = \int\limits_{(x_1, x_2)} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, \theta)\,(\Delta\lambda)\,(d\theta). \tag{3.19}$$

Démonstration. Soit $\delta(\varepsilon)$ le nombre positif qui correspond au nombre positif ε, dans le théorème 2.2, à la fonction $\partial f/\partial\lambda$ et au compact K formé par les points $(\lambda, x_1 + t(x_2 - x_1))$ où $0 \leqslant t \leqslant 1$. Si $\|\Delta\lambda\| < \delta(\varepsilon)$ alors

$$\Big\| f(\lambda + \Delta\lambda, x_1 + t(x_2 - x_1)) - f(\lambda, x_1 + t(x_2 - x_1)) -$$

$$- \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x_1 + t(x_2 - x_1))(\Delta\lambda) \Big\| \leq \sup_{\tau \in [0,1]} \Big\| \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda + \tau\Delta\lambda, x_1 +$$

$$+ t(x_2 - x_1)) - \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x_1 + t(x_2 - x_1)) \Big\| \, \|\Delta\lambda\| < \varepsilon \|\Delta\lambda\|$$

et par conséquent

$$\Big\| F(\lambda + \Delta\lambda, x_1, x_2) - F(\lambda, x_1, x_2) - \int_{(x_1, x_2)} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, 0)(\Delta\lambda)(d0) \Big\| \leq$$

$$\leq \varepsilon \|\Delta\lambda\| \, \|x_2 - x_1\|,$$

ce qui démontre le théorème.

Supposons maintenant que les fonctions $f : B \to L(X, Y)$, $g : B \to L(X, L(X, Y))$ soient continues et que les fonctions $F : B \to Y$, $G : B \to L(X, Y)$ soient données par les formules

$$F(x) = \int_{(x_0, x)} f(0)(d0), \tag{3.20}$$

$$G(x) = \int_{(x_0, x)} g(0)(d0). \tag{3.21}$$

Les théorèmes 3.8 et 3.9 établissent des propriétés des fonctions F et G.

Théorème 3.8. *Les fonctions $F : B \to Y$ et $G : B \to L(X, Y)$ sont continues.*

Théorème 3.9. *Si pour toute terne de points x_1, x_2, x_3 de B on a l'égalité*

$$\int_{(x_1, x_2, x_3)^*} f(0)(d0) = \iint_{(x_1, x_2, x_3)} g(0)(d_1 0)(d_2 0), \tag{3.22}$$

alors la fonction F est dérivable Fréchet et on a

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x) = f(x) - G(x). \tag{3.23}$$

Les démonstrations des théorèmes 3.8 et 3.9 sont identiques à celles des théorèmes 3.5 et 3.6.

4. Résolution d'une équation aux dérivées Fréchet

Considérons le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x) = f(x, u(x)), \\ u(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Théorème 4.1. *Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées :*

a) *la fonction $f : B \times C \to L(X, Y)$ est dérivable Fréchet par rapport à la variable y ; les fonctions f et $\partial f / \partial y : B \times C \to L(Y, L(X, Y))$ sont bornées et continues ; les fonctions $\partial f / \partial y(x, \cdot) : C \to L(Y, L(X, Y))$ sont uniformément continues, également par rapport à $x \in B$;*

b) *pour toute terne de points x_1, x_2, x_3 de B et y de C on a l'égalité*

$$\int_{(x_1, x_2, x_3)^*} f(0, y)(d0) = \iint_{(x_1, x_2, x_3)} \Big\{ \frac{\partial f}{\partial y}(0, y)(f(0, y)(d_2 0))(d_1 0) - \tag{4.2}$$

$$- \frac{\partial f}{\partial y}(0, y)(f(0, y)(d_1 0))(d_2 0) \Big\}.$$

Alors il existe une solution unique du système (4.1), définie sur l'ensemble

$$D = \{x \, ; \, x \in B, \|y_0 - c\| + m\|x - x_0\| < r\},$$

où $m = \sup \{\|f(x, y)\| \, ; \, x \in B, \, y \in C\}$.

La démonstration du théorème peut être divisée en trois parties :

a) toute solution du système (4.1) définie sur D est une solution continue de l'équation

$$u(x) = y_0 + \int_{(x_0, x)} f(0, u(0))(d0) \, ; \tag{4.3}$$

b) il existe une solution unique de l'équation (4.3) définie et continue sur D ; en outre, cette solution est dérivable Fréchet et cette dérivée est bornée et continue ;

c) la solution de l'équation (4.3) définie et continue sur D est la solution du système (4.1).

a) Soit u une solution du système (4.1) définie sur D. La fonction u est continue et

$$y_0 + \int_{(x_0, x)} f(0, u(0))(d0) = u(x_0) + \int_{(x_0, x)} \frac{\partial u}{\partial x}(0)(d0) =$$

$$= u(x_0) + \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0)\,dt =$$

$$= u(x_0) + \int_0^1 \frac{d}{dt} u(x_0 + t(x - x_0))\,dt = u(x).$$

b) Nous allons appliquer à l'équation (4.3) le théorème 2.1. On introduit les ensembles, métriques et opérateurs qui vérifient les conditions du théorème 2.1 :

Soit U l'ensemble des fonctions continues $u : D \to C$ qui vérifient l'inégalité $\| u(x) - y_0 \| \leqslant m \| x - x_0 \|$. Soit [2]

$$\rho_U(u_1, u_2) = \sup \{ \| u_1(x) - u_2(x) \| e^{-l\|x - x_0\|} ;\ x \in D \},$$

où

$$l = \sup \left\{ \left\| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right\| ;\quad x \in B,\quad y \in C \right\}.$$

L'espace métrique (U, ρ_U) *est complet:* Soit V l'ensemble des fonctions $v \in U$ dérivables Fréchet et dont la dérivée Fréchet est bornée et continue. Soit W l'ensemble des fonctions $w : D \to L(X, Y)$ bornées et continues et

$$\rho_W(w_1, w_2) = \sup \{ \| w_1(x) - w_2(x) \| e^{-2l\|x - x_0\|} ;\ x \in D \}.$$

L'espace métrique (W, ρ_W) *est complet:* Soit

$$P(u)(x) = y_0 + \int_{(x_0, x)} f(\theta, u(\theta))(d\theta).$$

$P(u)$ est une fonction définie sur D et qui vérifie les inégalités :

$$\| P(u)(x) - y_0 \| \leqslant m \| x - x_0 \|.$$

$$\| P(u)(x) - c \| \leqslant \| P(u)(x) - y_0 \| + \| y_0 - c \| \leqslant m \| x - x_0 \| + \\ + \| y_0 - c \| < r.$$

La continuité de la fonction f entraîne la continuité de la fonction $P(u)$ (théorème 3.8). On a démontré ainsi que $P : U \to U$. Maintenant nous avons

$$\rho_U(P(u_1), P(u_2)) \leqslant \sup_x \int_0^1 l \| u_1(x_0 + t(x - x_0)) - u_2(x_0 + t(x - x_0)) \| \times$$

$$\times \| x - x_0 \| dt\, e^{-l\|x - x_0\|} \leqslant$$

$$\leqslant \rho_U(u_1, u_2) \sup_x \int_0^1 l \| x - x_0 \| e^{(l - 1)l\|x - x_0\|} dt =$$

$$= \rho_U(u_1, u_2) \sup_x (1 - e^{-l\|x - x_0\|}) \leqslant \rho_U(u_1, u_2)(1 - e^{-\frac{lr}{m}}),$$

ce qui démontre que *l'opérateur P est contractant ; soit u_* son point fixe.* u_* est l'unique solution de l'équation (4.3), définie et continue sur D. La formule (4.2) et le théorème 3.4 (Lepage) entraînent l'égalité

$$\int_{(x_0, x_2, x_3)^*} f(\theta, v(\theta))(d\theta) = \iint_{(x_1, x_2, x_3)} \frac{\partial f}{\partial y}(\theta, v(\theta)) \left(\frac{\partial v}{\partial x}(\theta)(d_1\theta) - \right.$$

$$\left. - f(\theta, v(\theta))(d_1\theta) \right)(d_2\theta) - \iint_{(x_1, x_2, x_3)} \frac{\partial f}{\partial y}(\theta, v(\theta)) \left(\frac{\partial v}{\partial x}(\theta)(d_2\theta) - \right.$$

$$\left. - f(\theta, v(\theta))(d_2\theta) \right)(d_1\theta),$$

ou

$$\int_{(x_0, x_2, x_3)^*} f(\theta, v(\theta))(d\theta) = \iint_{(x_1, x_2, x_3)} k\left(\theta, v(\theta), \frac{\partial v}{\partial x}(\theta)\right)(d_1\theta)(d_2\theta),$$

où, pour $x \in B$, $y \in C$, $z \in L(X, Y)$, $\Delta_1 x \in X$, $\Delta_2 x \in X$, on note

$$k(x, y, z)(\Delta_1 x)(\Delta_2 x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)(z(\Delta_1 x) - f(x, y)(\Delta_1 x))(\Delta_2 x) -$$

$$- \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)(z(\Delta_2 x) - f(x, y)(\Delta_2 x))(\Delta_1 x).$$

La fonction $P(v)$ est dérivable Fréchet (théorème 3.9) et on a l'égalité (formule (3.23))

$$\frac{\partial P(v)}{\partial x}(x) = f(x, v(x)) - \int_{(x_0, x)}^* k\left(\theta, v(\theta), \frac{\partial v}{\partial x}(\theta)\right)(d\theta).$$

Comme les fonctions f et $\partial f / \partial y$ sont bornées, la fonction $\partial[P(v)]/\partial x$ est aussi bornée et comme les fonctions f et $\partial f / \partial y$ sont continues, la fonc-

tion $\partial[P(v)]/\partial x$ est aussi continue (théorème 3.8). Ainsi on a démontré que $P(V) \subseteq V$. Soit

$$Q(v)(x) = \frac{\partial v}{\partial x}(x).$$

On a $Q : V \to W$ et Q est fermé, car, si $\lim_{n\to\infty} \rho_U(v_n, u) = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \rho_W(\partial v_n/\partial x, w) = 0$, alors u est dérivable Fréchet et $\partial u/\partial x = w$. Soit

$$R(u, w)(x) = f(x, u(x)) - \int_{(x_0, x)} k(\theta, u(\theta), w(\theta))(d\theta).$$

$R(u, w)$ est une fonction définie sur D, à valeurs dans $L(X, Y)$, bornée, parce que les fonctions f et $\partial f/\partial y$ sont bornées, et continue, parce que les fonctions f et $\partial f/\partial y$ sont continues (théorème 3.8). Donc $R : U \times W \to W$. Maintenant, nous avons

$$\rho_W(R(u, w_1), R(u, w_2)) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_x \int_0^1 2t \|w_1(x_0 + t(x - x_0)) - w_2(x_0 + t(x - x_0))\| \, \|x - x_0\| dt \, e^{-2t\|x - x_0\|} \leqslant$$

$$\leqslant \rho_W(w_1, w_2)\left(1 - e^{-\frac{2r}{m}}\right),$$

ce qui dénote que *les opérateurs $R(u, \cdot)$ sont également contractants (soit w_* le point fixe de l'opérateur $R(u_*, \cdot)$)*. Les fonctions $f(x, \cdot)$ et $k(x, \cdot, w(x))$ sont uniformément continues sur C, également par rapport à $x \in D$, puisque la fonction $\partial f/\partial y$ est bornée et la fonction $\partial f/\partial y\,(x, \cdot)$ est uniformément continue sur C, également par rapport à $x \in B$. Soit $\delta(\varepsilon)$ le nombre positif qui correspond au nombre positif ε dans la définition de la continuité mentionnée pour les fonctions $f(x, \cdot)$ et $k(x, \cdot, w(x))$. Si

$$\rho_W(u_1, u_2) < \delta(\varepsilon)\, e^{-\frac{2r}{m}},$$

alors $\|u_1(x) - u_2(x)\| < \delta(\varepsilon)$ et enfin :

$$\rho_W(R(u_1, w), R(u_2, w) \leqslant \sup_x (\varepsilon + \varepsilon\|x - x_0\|)\, e^{-2\|x - x_0\|} \leqslant \varepsilon\left(1 + \frac{r}{m}\right),$$

ce qui montre que *les opérateurs $R(\cdot, w)$ sont continus.*

Avec la formule :

$$Q(P(v)) = \frac{\partial P(v)}{\partial x} = R\left(v, \frac{\partial v}{\partial x}\right) = R(v, Q(v)),$$

on a vérifié toutes les conditions du théorème 2.1 pour les espaces U, V, W et les opérateurs P, Q, R. La conclusion est que $u_* \in V$ et $Q(u_*) = w_*$. L'unique solution u_* de l'équation (4.3) définie et continue sur D est dérivable Fréchet et cette dérivée est bornée et continue.

c) La fonction $x \to f(x, u(x))$ est un élément de W et elle est le point fixe de l'opérateur $R(u, \cdot)$, vu que $k(x, u(x), f(x, u(x))) = 0$. Il résulte que

$$f(x, u_*(x)) = w_*(x) = Q(u_*)(x) = \frac{\partial u_*}{\partial x}(x).$$

On a aussi l'égalité

$$u_*(x_0) = P(u_*)(x_0) = y_0.$$

Avec cette troisième étape, le théorème 4.1 est complètement démontré.

5. La dépendance du paramètre

Considérons le système :

$$(5.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(\lambda, x) = f(\lambda, x, u(\lambda, x)), \\ u(\lambda, g(\lambda)) = h(\lambda). \end{cases}$$

Théorème 5.1. *Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées :*

a) *la fonction $f : A \times B \times C \to L(X, Y)$ est dérivable Fréchet par rapport aux variables λ et y ; les fonctions f, $\partial f/\partial\lambda : A \times B \times C \to L(\Lambda, L(X, Y))$ et $\partial f/\partial y : A \times B \times C \to L(Y, L(X, Y))$ sont bornées et continues ; les fonctions $\partial f/\partial\lambda\,(\lambda, x, \cdot) : C \to L(\Lambda, L(X, Y))$ et $\partial f/\partial y\,(\lambda, x, \cdot) : C \to L(Y, L(X, Y))$ sont uniformément continues, également par rapport à $\lambda \in A$ et $x \in B$;*

b) *pour toute terne de points x_1, x_2, x_3 de B, y de C et λ de A, on a l'égalité*

$$(5.2) \qquad \int_{(x_1, x_2, x_3)^*} f(\lambda, \theta, y)(d\theta) = \iint_{(x_1, x_2, x_3)} \frac{\partial f}{\partial y}(\lambda, \theta, y)(f(\lambda, \theta, y)(d_2\theta))(d_1\theta) -$$

$$- \frac{\partial f}{\partial y}(\lambda, \theta, y)(f(\lambda, \theta, y)(d_1\theta))(d_2\theta) ;$$

c) *les fonctions $g : A \to B$ et $h : A \to C$ sont dérivables Fréchet ; les onctions $\partial g/\partial\lambda : A \to L(\Lambda, X)$ et $\partial h/\partial\lambda : A \to L(\Lambda, Y)$ sont bornées et continues.*

Alors il existe une solution unique du système (5.1) *définie sur l'ensemble*

$$D = \{(\lambda, x) : \lambda \in A,\ x \in B,\ \|h(\lambda) - c\| + m\|x - g(\lambda)\| < r\},$$

où $m = \sup\{\|f(\lambda, x, y)\| : \lambda \in A,\ x \in B,\ y \in C\}$.

En outre, cette solution est dérivable Fréchet par rapport à la variable λ ; *les fonctions* $\partial u/\partial x$ *et* $\partial u/\partial \lambda$ *sont bornées et continues et on a les égalités* :

$$(5.3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial \lambda}(\lambda, x)(\Delta x)(\Delta\lambda) = \dfrac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x, u(\lambda, x))(\Delta\lambda)(\Delta x) + \\ \qquad + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\lambda, x, u(\lambda, x))\left(\dfrac{\partial u}{\partial \lambda}(\lambda, x)(\Delta\lambda)\right)(\Delta x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \lambda}(\lambda, g(\lambda)) = \dfrac{\partial h}{\partial \lambda}(\lambda) - \{f(\lambda, g(\lambda), h(\lambda))\} \circ \left\{\dfrac{\partial g}{\partial \lambda}(\lambda)\right\}. \end{cases}$$

Démonstration. Le théorème 4.1 affirme que, pour chaque $\lambda \in A$, il existe une solution unique $u(\lambda, \cdot)$ du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x) = f(\lambda, x, u(x)), \\ u(g(\lambda)) = h(\lambda), \end{cases}$$

définie sur l'ensemble

$$\{x ; x \in B,\ \|h(\lambda) - c\| + m\|x - g(\lambda)\| < r\},$$

et cette solution vérifie l'égalité

$$u(x) = h(\lambda) + \int_{(g(\lambda), x)} f(\lambda, \theta, u(\theta))\,(d\theta).$$

Ainsi, nous avons démontré qu'il existe une solution unique du système (5.1), définie sur D. Pour déduire les autres propriétés de la solution du système (5.1), nous allons appliquer le théorème 2.1 à l'équation

$$(5.4)\qquad u(\lambda, x) = h(\lambda) + \int_{(g(\lambda), x)} f(\lambda, \theta, u(\lambda, \theta))\,(d\theta).$$

Soit U l'ensemble des fonctions continues $u : D \to C$ qui vérifient l'inégalité $\|u(\lambda, x) - h(\lambda)\| \leqslant m\|x - g(\lambda)\|$. Soit

$$\rho_U(u_1, u_2) = \sup\{\|u_1(\lambda, x) - u_2(\lambda, x)\|\, e^{-l\|x - g(\lambda)\|} ;\ (\lambda, x) \in D\},$$

où
$$l = \sup\left\{\left\|\frac{\partial f}{\partial y}(\lambda, x, y)\right\| ;\ \lambda \in A,\ x \in B,\ y \in C\right\}.$$

L'espace métrique (U, ρ_U) *est complet:* Soit U' l'ensemble des fonctions $v \in U$ dérivables Fréchet par rapport aux variables λ et x et dont les dérivées Fréchet sont bornées et continues. Soit W' l'ensemble des fonctions $w' : D \to L(X, Y)$ bornées et continues et

$$\rho_{W'}(w'_1, w'_2) = \sup\{\|w'_1(\lambda, x) - w'_2(\lambda, x)\|\, e^{-P\|x - g(\lambda)\|} ;\ (\lambda, x) \in D\}$$

où $P \geqslant 2l$, $P \geqslant 2l'' + l$ et $l'' = \sup\left\{\left\|\dfrac{\partial g}{\partial \lambda}(\lambda)\right\| ;\ \lambda \in A\right\}$. L'espace métrique $(W', \rho_{W'})$ est complet. Soit W'' l'ensemble des fonctions $w'' : D \to L(\Lambda, X)$ bornées et continues et

$$\rho_{W''}(w''_1, w''_2) = \sup\{\|w''_1(\lambda, x) - w''_2(\lambda, x)\|\, e^{-P\|x - g(\lambda)\|} ;\ (\lambda, x) \in D\}.$$

L'espace métrique $(W'', \rho_{W''})$ est complet. Soit $W = W' \times W''$ et

$$\rho_W(w_1, w_2) = \max\{\rho_{W'}(w'_1, w'_2), \rho_{W''}(w''_1, w''_2)\}.$$

L'espace métrique (W, ρ_W) *est complet.* Soit

$$P(u)(\lambda, x) = h(\lambda) + \int_{(g(\lambda), x)} f(\lambda, \theta, u(\lambda, \theta))\,(d\theta).$$

$P(u)$ est une fonction définie sur D et vérifie les inégalités :

$$\|P(u)(\lambda, x) - h(\lambda)\| \leqslant m\|x - g(\lambda)\|,$$

$$\|P(u)(\lambda, x) - c\| \leqslant \|P(u)(\lambda, x) - h(\lambda)\| + \|h(\lambda) - c\| \leqslant m\|x - g(\lambda)\| + \\ + \|h(\lambda) - c\| < r.$$

La continuité des fonctions f, g, h entraîne la continuité de la fonction $P(u)$ (théorème 3.5). Donc, on a démontré que $P : U \to U$. Maintenant nous avons

$$\rho_U(P(u_1), P(u_2)) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{(\lambda, x)} \int_0^1 l\,\|u_1(\lambda, g(\lambda) + t(x - g(\lambda))) - u_2(\lambda, g(\lambda) + \\ + t(x - g(\lambda)))\|\,\|x - g(\lambda)\|\,dt\, e^{-P\|x - g(\lambda)\|} \leqslant \left(1 - e^{-\frac{P}{m}}\right)\rho_U(u_1, u_2),$$

ce qui montre que *l'opérateur* P *est contractant ; soit* u_* *son point fixe.* u_* est l'unique solution définie et continue sur D de l'équation (5.4). La formule (5.2) et le théorème 3.4 (Lepage) entraînent l'égalité

$$\int\limits_{(x_1, x_2, x_3)^*} f(\lambda, 0, v(\lambda, 0))\,(d0) = \iint\limits_{(x_1, x_2, x_3)} \frac{\partial f}{\partial y}(\lambda, 0, v(\lambda, 0)) \times$$

$$\times \left(\frac{\partial v}{\partial x}(\lambda, 0)\,(d_1 0) - f(\lambda, 0, v(\lambda, 0))\,(d_1 0) \right)(d_2 0) -$$

$$- \iint\limits_{(x_1, x_2, x_3)} \frac{\partial f}{\partial y}(\lambda, 0, v(\lambda, 0)) \left(\frac{\partial v}{\partial x}(\lambda, 0)\,(d_2 0) - f(\lambda, 0, v(\lambda, 0))\,(d_2 0) \right)(d_1 0),$$

où

$$\int\limits_{(x_1, x_2, x_3)^*} f(\lambda, 0, v(\lambda, 0))\,(d0) = \iint\limits_{(x_1, x_2, x_3)} k_1 \left(\lambda, 0, v(\lambda, 0), \frac{\partial v}{\partial x}(\lambda, 0) \right)(d_1 0)\,(d_2 0),$$

où, pour $\lambda \in A$, $x \in B$, $y \in C$, $z_1 \in L(X, Y)$, $\Delta_1 x \in X$, $\Delta_2 x \in X$, on note

$$k_1(\lambda, x, y, z_1)\,(\Delta_1 x)\,(\Delta_2 x) = \frac{\partial f}{\partial y}(\lambda, x, y)\,(z_1(\Delta_1 x) -$$

$$- f(\lambda, x, y)\,(\Delta_1 x))\,(\Delta_2 x) - \frac{\partial f}{\partial y}(\lambda, x, y)\,(z_1(\Delta_2 x) - f(\lambda, x, y)(\Delta_2 x))\,(\Delta_1 x).$$

La fonction $P(v)$ est dérivable Fréchet par rapport à la variable x (théorème 3.6) et on a l'égalité (formule (3.18))

$$\frac{\partial P(v)}{\partial x}(\lambda, x) = f(\lambda, x, v(\lambda, x)) - \int\limits_{(g(\lambda), x)}^{*} k_1 \left(\lambda, 0, v(\lambda, 0), \frac{\partial v}{\partial x}(\lambda, 0) \right)(d0).$$

La fonction $P(v)$ est dérivable Fréchet par rapport à la variable λ (théorème 3.7) et on a l'égalité (formules (3.17) et (3.19))

$$\frac{\partial P(v)}{\partial \lambda}(\lambda, x) = \frac{\partial h}{\partial \lambda}(\lambda) + \left\{ - f(\lambda, g(\lambda)\,h(\lambda)) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{(x, g(\lambda))}^{*} k_1 \left(\lambda, 0, v(\lambda, 0), \frac{\partial v}{\partial x}(\lambda, 0) \right)(d0) \right\} \circ \left\{ \frac{\partial g}{\partial \lambda}(\lambda) \right\} +$$

$$+ \int\limits_{(g(\lambda), x)} k_2 \left(\lambda, 0, v(\lambda, 0), \frac{\partial v}{\partial \lambda}(\lambda, 0) \right)(d0),$$

où, pour $\lambda \in A$, $x \in B$, $y \in C$, $z_2 \in L(\Lambda, X)$, $\Delta x \in X$, $\Delta\lambda \in \Lambda$, on note

$$k_2(\lambda, x, y, z_2)\,(\Delta x)\,(\Delta\lambda) = \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x, y)\,(\Delta\lambda)\,(\Delta x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\lambda, x, y)\,(z_2(\Delta\lambda))\,(\Delta x).$$

Comme les fonctions f, $\partial f/\partial\lambda$, $\partial f/\partial y$, $\partial g/\partial\lambda$, $\partial h/\partial\lambda$ sont bornées, les fonctions $\partial[P(v)]/\partial x$ et $\partial[P(v)]/\partial\lambda$ sont aussi bornées, et comme les fonctions f, $\partial f/\partial\lambda$, $\partial f/\partial y$, g, $\partial g/\partial\lambda$, h, $\partial h/\partial\lambda$ sont continues, les fonctions $\partial[P(v)]/\partial x$ et $\partial[P(v)]/\partial\lambda$ sont aussi continues (théorème 3.5). Ainsi on a démontré que $P(V) \subseteq V$. Soit

$$Q'(v)(\lambda, x) = \frac{\partial v}{\partial x}(\lambda, x),$$

$$Q''(v)(\lambda, x) = \frac{\partial v}{\partial \lambda}(\lambda, x),$$

$$Q(v)(\lambda, x) = (Q'(v)(\lambda, x), Q''(v)(\lambda, x)).$$

On a $Q : V \to W$ *et* Q *est fermé*. Soit

$$R'(u, w)(\lambda, x) = f(\lambda, x, u(\lambda, x)) - \int\limits_{(g(\lambda), x)}^{*} k_1(\lambda, 0, u(\lambda, 0), w'(\lambda, 0))\,(d0),$$

$$R''(u, w)(\lambda, x) = \frac{\partial h}{\partial \lambda}(\lambda) + \left\{ - f(\lambda, g(\lambda), h(\lambda)) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{(x, g(\lambda))}^{*} k_1(\lambda, 0, u(\lambda, 0), w'(\lambda, 0))\,(d0) \right\} \circ \left\{ \frac{\partial g}{\partial \lambda}(\lambda) \right\} +$$

$$+ \int\limits_{(g(\lambda), x)} k_2(\lambda, 0, u(\lambda, 0), w''(\lambda, 0))\,(d0),$$

$$R(u, w)(\lambda, x) = (R'(u, w)(\lambda, x), R''(u, w)(\lambda, x)).$$

Par la même méthode que celle du § 4, on montre que $R : U \times W \to W$. Maintenant nous avons

$$\rho_{W''}(R'(u, w_1), R'(u, w_2)) \leq \sup_{(\lambda, x)} \int_0^1 2l \,\|w_1'(\lambda, g(\lambda) + t(x - g(\lambda))) -$$

$$- w_2'(\lambda, g(\lambda) + t(x - g(\lambda)))\| \,\|x - g(\lambda)\|\, dt\, e^{-l\|x - g(\lambda)\|} \leq$$

$$\leq \left(1 - e^{-\frac{lr}{m}}\right) \rho_{W''}(w_1', w_2') \leq \left(1 - e^{-\frac{lr}{m}}\right) \rho_W(w_1, w_2),$$

$$\rho_{W''}(R''(u, w_1), R''(u, w_2)) \leq \sup_{(\lambda, x)} \int_0^1 2l'' \,\|w_1'(\lambda, g(\lambda) + t(x - g(\lambda))) -$$

$$- w_2'(\lambda, g(\lambda) + t(x - g(\lambda))) \| x - g(\lambda) \| \, dt \, e^{-t\|x - g(\lambda)\|} +$$

$$+ \sup_{(\lambda, x)} \int_0^1 l \| w_1''(\lambda, g(\lambda) + t(x - g(\lambda))) - w_2''(\lambda, g(\lambda) + t(x - g(\lambda))) \|$$

$$\| x - g(\lambda) \| \, dt \, e^{-t\|x - g(\lambda)\|} \leq \rho_{W''}(w_1', w_2') \sup_{(\lambda, x)} \int_0^1 2l'' e^{(t-1)t\|x - g(\lambda)\|}$$

$$\| x - g(\lambda) \| \, dt + \rho_{W''}(w_1'', w_2'') \sup_{(\lambda, x)} \int_0^1 l e^{(t-1)t\|x - g(\lambda)\|} \| x - g(\lambda) \| \, dt \leq$$

$$\leq \rho_W(w_1, w_2) \sup_{(\lambda, x)} \int_0^1 (2l'' + l) \, e^{(t-1)t\|x - g(\lambda)\|} \| x - g(\lambda) \| \, dt \leq$$

$$\leq (1 - e^{-\frac{Pr}{m}}) \rho_W(w_1, w_2),$$

$$\rho_W(R(u, w_1), R(u, w_2)) \leq (1 - e^{-\frac{Pr}{m}}) \rho_W(w_1, w_2),$$

ce qui montre que *les opérateurs $R(u, \cdot)$ sont également contractants ; soit w_* le point fixe de l'opérateur $R(u_*, \cdot)$*. Les fonctions $f(\lambda, x, \cdot)$, $k_1(\lambda, x, \cdot, w'(\lambda, x))$ et $k_2(\lambda, x, \cdot, w''(\lambda, x))$ sont uniformément continues sur C, également par rapport à $(\lambda, x) \in D$, puisque la fonction $\partial f / \partial y$ est bornée et les fonctions $\partial f / \partial \lambda (\lambda, x, \cdot)$ et $\partial f / \partial y (\lambda, x, \cdot)$ sont uniformément continues sur C également par rapport à $\lambda \in A$, $x \in B$. Par la méthode du § 4, on montre que *les opérateurs $R(\cdot, w)$ sont continus*. Enfin

$$Q(P(v)) = R(v, Q(v)).$$

Les espaces U, V, W et les opérateurs P, Q, R vérifient les conditions du théorème 2.1. La conclusion est $u_* \in V$ et $Q(u_*) = w_*$. La solution unique u_* (définie et continue sur D) de l'équation (5.4) est dérivable Fréchet par rapport aux variables λ et x. Mais comme nous avons remarqué au commencement de la démonstration, u_* est l'unique solution définie sur D de l'équation (5.1). Vu qu'on a les égalités :

$$\frac{\partial u_*}{\partial x}(\lambda, x) = f(\lambda, x, u_*(\lambda, x)),$$

$$k_1(\lambda, x, u(\lambda, x), f(\lambda, x, u(\lambda, x))) = 0,$$

on obtient la formule plus simple

$$\frac{\partial u_*}{\partial \lambda}(\lambda, x) = \frac{\partial h}{\partial \lambda}(\lambda) - \{f(\lambda, g(\lambda), h(\lambda))\} \circ \left\{\frac{\partial g}{\partial \lambda}(\lambda)\right\} +$$

$$+ \int_{(g(\lambda), x)} k_2\left(\lambda, \theta, u_*(\lambda, \theta), \frac{\partial u_*}{\partial \lambda}(\lambda, \theta)\right)(d\theta),$$

qui est équivalente aux formules (5.3). La démonstration du théorème est terminée.

6. La dépendance de la solution des valeurs initiales

Considérons le système

$$(6.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x ; \xi, \eta) = f(x, u(x ; \xi, \eta)), \\ u(\xi ; \xi, \eta) = \eta. \end{cases}$$

Théorème 6.1. *Si les hypothèses du théorème 4.1 sont vérifiées, alors il existe une solution unique du système (6.1) définie sur l'ensemble*

$$D = \{(x ; \xi, \eta) : x \in B, \xi \in B, \eta \in C, \|\eta - c\| + m\|x - \xi\| < r\} ;$$

en outre, cette solution est dérivable Fréchet par rapport aux variables ξ et η ; les fonctions $\partial u / \partial x$, $\partial u / \partial \xi$ et $\partial u / \partial \eta$ sont bornées et continues ; on a les égalités :

$$(6.2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial \xi}(x ; \xi, \eta)(\Delta x)(\Delta \xi) = \\ \qquad = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, u(x ; \xi, \eta)) \left(\dfrac{\partial u}{\partial \xi}(x ; \xi, \eta)(\Delta \xi)\right)(\Delta x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \xi}(\xi ; \xi, \eta) = -f(\xi, \eta) ; \end{cases}$$

$$(6.3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial \eta}(x ; \xi, \eta)(\Delta x)(\Delta \eta) = \\ \qquad = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, u(x ; \xi, \eta)) \left(\dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x ; \xi, \eta)(\Delta \eta)\right)(\Delta x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(\xi ; \xi, \eta)(\Delta \eta) = \Delta \eta ; \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}(x\,;\,\xi,\,\eta) + \left\{\frac{\partial u}{\partial \eta}(x\,;\,\xi,\,\eta)\right\}\circ\{f(\xi,\,\eta)\} = 0. \tag{6.4}$$

Démonstration. En considérant le couple (ξ, η) comme paramètre λ, on obtient les formules (6.2) et (6.3) (théorème 5.1).

Puis, l'expression

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}(x\,;\,\xi,\,\eta)\,(\Delta\xi) + \frac{\partial u}{\partial \eta}(x\,;\,\xi,\,\eta)\,(f(\xi,\,\eta)\,(\Delta\xi))$$

est une solution du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x}(x\,;\,\xi,\,\eta,\,\Delta\xi) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\,u\,(x\,;\,\xi,\,\eta))\,(v\,(x\,;\,\xi,\,\eta,\,\Delta\xi)), \\ v\,(\xi\,;\,\xi,\,\eta,\,\Delta\xi) = 0. \end{cases}$$

Mais ce système a seulement la solution nulle et donc la formule (6.4) est établie.

7. La résolution d'une équation linéaire et homogène aux dérivées Fréchet

Considérons le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,\,y) + \left\{\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,\,y)\right\}\circ\{f\,(x,\,y)\} = 0, \\ u\,(x_0,\,y) = g\,(y). \end{cases} \tag{7.1}$$

(pour la notation, voir la note infra de l'introduction)

Théorème 7.1. *Supposons que la fonction f satisfait aux hypothèses du théorème 4.1 et la fonction $g : C \to Z$, où Z est un espace linéaire normé, est dérivable Fréchet. Alors il existe une solution unique du système (7.1) définie et dérivable Fréchet sur l'ensemble*

$$D = \{(x,\,y)\,;\,x \in B,\,y \in C,\,\|y - c\| + m\,\|x - x_0\| < r\}.$$

Démonstration. Il existe une solution unique du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x}(x\,;\,\xi,\,\eta) = f\,(x,\,v\,(x\,;\,\xi,\,\eta)), \\ v\,(\xi\,;\,\xi,\,\eta) = \eta \end{cases} \tag{7.2}$$

définie sur l'ensemble (théorème 6.1)

$$\{(x\,;\,\xi,\,\eta)\,;\,x \in B,\,\xi \in B,\,\eta \in C,\,\|\eta - c\| + m\,\|\xi - x\| < r\}. \tag{7.3}$$

De plus, cette solution est dérivable Fréchet par rapport aux variables ξ et η et on a l'égalité

$$\frac{\partial v}{\partial \xi}(x\,;\,\xi,\,\eta) + \left\{\frac{\partial v}{\partial \eta}(x\,;\,\xi,\,\eta)\right\}\circ\{f\,(\xi,\,\eta)\} = 0. \tag{7.4}$$

Supposons que le système (7.1) a une solution $u : D \to Z$ dérivable Fréchet sur D. Nous allons démontrer que cette solution est donnée par la formule

$$u\,(x,\,y) = g\,(v\,(x_0\,;\,x,\,y)), \tag{7.5}$$

où v est la solution du système (7.2).

Soit $(\xi, \eta) \in D$ et x un point de l'ensemble

$$\{x\,;\,x \in B,\,\|\eta - c\| + m\,\|x - \xi\| + m\,\|x - x_0\| < r\}. \tag{7.6}$$

L'ensemble (7.6) est non-vide (puisqu'il contient les points ξ et x_0), convexe et ouvert. Le point $(x\,;\,\xi,\,\eta)$ appartient à l'ensemble (7.3) parce que

$$\|\eta - c\| + m\,\|x - \xi\| < \|\eta - c\| + m\,\|x - \xi\| + m\,\|x - x_0\| < r.$$

Donc l'expression $v(x\,;\,\xi,\,\eta)$ est définie. Le point $(x,\,v(x\,;\,\xi,\,\eta)) \in D$ puisque

$$x \in B\,;\;\; v\,(x\,;\,\xi,\,\eta) \in C\,;$$

$$\|v\,(x\,;\,\xi,\,\eta) - c\| + m\,\|x - x_0\| \leq \|v\,(x\,;\,\xi,\,\eta) - \eta\| + \|\eta - c\| +$$
$$+ m\,\|x - x_0\| \leq m\,\|x - \xi\| + \|\eta - c\| + m\,\|x - x_0\| < r.$$

Donc $u(x,\,v(x\,;\,\xi,\,\eta))$ est définie. Il résulte de (7.1)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,\,v\,(x\,;\,\xi,\,\eta)) + \left\{\frac{\partial u}{\partial y}(x,\,v\,(x\,;\,\xi,\,\eta))\right\}\circ\{f(x,\,v(x\,;\,\xi,\,\eta))\} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,\,v\,(x\,;\,\xi,\,\eta)) + \left\{\frac{\partial u}{\partial y}(x,\,v\,(x\,;\,\xi,\,\eta))\right\}\circ\left\{\frac{\partial v}{\partial x}(x\,;\,\xi,\,\eta)\right\} = 0,$$

ou bien

$$\frac{\partial}{\partial x}\,u\,(x,\,v\,(x\,;\,\xi,\,\eta)) = 0. \tag{7.7}$$

Comme l'ensemble (7.6) est connexe, on constate de (7.7) que la fonction $x \to u(x,\,v(x\,;\,\xi,\,\eta))$ définie sur (7.6) est constante sur (7.6). Comme les points x_0 et ξ appartiennent à l'ensemble (7.6) on peut écrire

$$u\,(x,\,v\,(x\,;\,\xi,\,\eta)) = u\,(x_0,\,v\,(x_0\,;\,\xi,\,\eta)) = g\,(v\,(x_0\,;\,\xi,\,\eta)),$$

$$u\,(\xi,\,\eta) = u\,(\xi,\,v\,(\xi\,;\,\xi,\,\eta)) = g\,(v(x_0\,;\,\xi,\,\eta)).$$

L'unicité de la solution du système (7.1) a été démontrée.

En outre, la fonction donnée par la formule (7.5) vérifie le système (7.1).

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \left\{\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\right\} \circ \{f(x, y)\} = \left\{\frac{\partial g}{\partial y}(v(x_0; x, y))\right\} \circ \left\{\frac{\partial v}{\partial \xi}(x_0; x, y)\right\} +$$

$$+ \left\{\frac{\partial g}{\partial y}(v(x_0; x, y))\right\} \circ \left\{\frac{\partial v}{\partial \eta}(x_0; x, y)\right\} \circ \{f(x, y)\} =$$

$$= \left\{\frac{\partial g}{\partial y}(v(x_0; x, y))\right\} \circ \left\{\frac{\partial v}{\partial \xi}(x_0; x, y) + \left\{\frac{\partial v}{\partial \eta}(x_0, x, y)\right\} \circ \{f(x, y)\}\right\} = 0,$$

$$u(x_0, y) = g(v(x_0; x_0, y)) = g(y).$$

Le théorème est complètement démontré.

8. Intégrales premières

Considérons l'équation (1.1).

Définition. *On appelle intégrale première de l'équation* (1.1) *toute fonction* $(x, y) \to g(x, y)$ *définie sur un sous-ensemble de l'ensemble de définition de la fonction* f *et telle que pour toute solution* $x \to u(x)$ *de l'équation* (1.1), *dont le graphique est contenu dans l'ensemble de définition de la fonction* g, *la fonction* $x \to g(x, u(x))$ *est constante.*

Sous certaines hypothèses de régularité pour la fonction f, on peut démontrer, comme dans le théorème (7.1) qu'une fonction g est intégrale première de l'équation (1.1) si, et seulement si, g est une solution de l'équation (1.3). Le théorème 7.1 peut être considéré un „théorème d'existence des intégrales premières" de l'équation (1.1).

Une hypothèse utilisée dans la résolution de l'équation (1.1) a été l'égalité (4.2). Si f avait une dérivée Fréchet $\partial f/\partial x$ continue, alors, selon la formule (3.11) (Stokes)

$$\int_{(x_1, x_2, x_3)^*} f(0, y)\,(d0) =$$

$$= \iint_{(x_1, x_2, x_3)} \frac{\partial f}{\partial x}(0, y)\,(d_1 0)\,(d_2 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, y)\,(d_2 0)\,(d_1 0),$$

et l'égalité (4.2) deviendrait

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,(\Delta_1 x)\,(\Delta_2 x) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,(\Delta_2 x)\,(\Delta_1 x) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,(f(x, y)\,(\Delta_2 x))\,(\Delta_1 x) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,(f(x, y)\,(\Delta_1 x))\,(\Delta_2 x),$$

ou bien

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,(\Delta_1 x)\,(\Delta_2 x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,(f(x, y)\,(\Delta_1 x))\,(\Delta_2 x) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,(\Delta_2 x)\,(\Delta_1 x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,(f(x, y)\,(\Delta_2 x))\,(\Delta_1 x),$$

et on reconnaît ici la condition classique d'intégrabilité complète.

En utilisant la propriété des fonctions de variables réelles d'être dérivables Fréchet si elles ont des dérivées partielles continues, on peut résoudre à l'aide des théorèmes 4.1 et 7.1 les systèmes des équations (1.2) et (1.4).

BIBLIOGRAPHIE

1. Bächli G. — *Über die Integrierbarkeit von Systemen partieller nichtlinearer Differentialgleichungen erster Ordnung.* Comm. Math. Helv., 36 (1962), p. 345.
2. Bielecki A. — *Une remarque sur la méthode de Banach-Cacciopoli-Tihonov dans la théorie des équations différentielles ordinaires.* Bull. Acad. Polonaise des Sci., cl. III, IV (1956), p. 261.
3. Bruwier L. — *Sur les équations linéaires aux différentielles totales.* Bull. de la Soc. Roy. de Sci. de Liège, VIII (1939), p. 105.
4. Fischer H. R. — *Differentialkalkül für nichtmetrische Strukturen.* Ann. Acad. Sci. Fennicae, I (1957), p. 247.
5. Fischer H. R. — *Differentialkalkül für nichtmetrische Strukturen.* Arch. der Math., 8 (1957), p. 428.
6. Fréchet M. — *La notion de différentielle dans l'analyse générale.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 42 (1925), p. 293.
7. Graves L. M. — *Riemann integration and Taylor's theorem in general analysis.* Trans. Amer. Math. Soc. 29 (1927), p. 163.
8. Graves L. M. — *Topics in the functional calculus.* Bull. Amer. Math. Soc. 41 (1935), p. 641.
9. Haimovici A. — *Sistemele de ecuații diferențiale complet integrabile care generalizează sistemele pfaffiene.* Studia Univ. „Babeș-Bolyai", 1 (1962), p. 81.
10. Keller H. H. — *Über die Differentialgleichung erster Ordnung in normierten linearen Räumen.* Rend. Circ. Mat. Palermo VIII (1959), p. 117.
11. Kerner M. — *Die Differentiale in der allgemeinen Analysis.* Ann. of Math., 34 (1933), p. 546.
12. Lepage T. — *Sur la formule de Green et la variation d'une intégrale double.* Bull. Soc. Roy. Sci. Liège, (1934), p. 141.
13. Mannien J. — *Zur Charakteristikentheorie von Systemen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung.* Ann. Acad. Sci. Fennicae, I, nr. 283 (1960).
14. Michal A. D., Elconin V. — *Completely integrable differential equations in abstract spaces.* Acta Math., 68 (1937), p. 71.
15. Niklibore W. — *Sur les équations linéaires aux différentielles totales.* Studia Math. 1 (1929), p. 41.
16. Sebastião e Silva J. — *Integração e derivação em espaços de Banach.* Revista de Fac. de Ciên. Lisboa, 1 (1959), p. 117.

ECUAŢII CU DERIVATE FRÉCHET

Se studiază ecuaţiile (1.1) şi (1.3), unde funcţia f este derivabilă Fréchet numai în raport cu variabila y şi funcţiile f şi $\partial f/\partial y$ satisfac condiţia de completă integrabilitate (4.2). Existenţa şi unicitatea soluţiei ecuaţiei (1.1) şi dependenţa acestei soluţii de parametru se deduce după aceeaşi schemă, expusă în teorema 2.1. Pentru ecuaţia (3.1) se indică mulţimea pe care există o soluţie unică.

ON THE APPROXIMATE SOLUTION OF NON-LINEAR FUNCTIONAL EQUATIONS. II

BY

M. BALÁZS and G. GOLDNER

In the paper [2] using the divided difference of a non-linear functional $F(x)$ defined in a Banach space two methods for solving the equation

$$F(x) = 0 \tag{1}$$

are given. The advantage of these methods in comparison with Sergejeff's method [4] for the solving of operational equations, consists in the fact that, in the methods of the paper [2], the existence and the boundedness of the inverse of the divided difference are not assumed. The convergence of the above mentioned methods is proved under the conditions of the existence and boundedness of the divided difference of $F(x)$.

The present paper shows: a) the existence of a divided difference for functionals defined in Banach spaces, and b) it proves a Theorem concerning the existence of the solution of the equation (1) under conditions, analogical to those of the theorem given in paper [4].

1. We shall denote with $F_{x',x''}$ [3] the divided difference of the functional $F(x)$ in the points $x', x'' \in X$.

Theorem 1. *For every* $(x', x'') \in X \times X$, *there exists a linear functional* $F_{x',x''} \in X^*$ *with the properties*

$$F_{x',x''}(x' - x'') = F(x') - F(x'') \tag{a}$$

$$\|F_{x',x''}\| = \frac{|F(x') - F(x'')|}{\|x' - x''\|}. \tag{b}$$

Proof. For fixed $(x', x'') \in X \times X$ and given F, let us define

$$f_{x',x''}[r(x' - x'')]' = rF(x') - rF(x''),$$