SOLUTIONS PÉRIODIQUES ET PRESQUE-PÉRIODIQUES DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

PAR

P. TALPALARU

Dans ce travail, nous allons considérer quelques problèmes concernant l'existence des solutions périodiques et presque-périodiques de certains systèmes différentiels. La méthode que nous allons utiliser sera celle du point fixe sous la forme du théorème de Banach et celle de la fonction de Liapounov.

1. Soit $A(t)$ une matrice du type $n \times n$ satisfaisant aux conditions :

1° $A(t)$ est continue et ω-périodique ;

2° le système

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{1.1}$$

où $x \in R^n$, n'a pas des solutions ω-périodiques $x(t) \not\equiv 0$.

Désignons par $X(t)$ la matrice fondamentale du système (1.1) telle que $X(0) = E$. Si $x = x(t)$ est une solution quelconque du système (1.1), alors $x = x(t + \omega)$ est aussi une solution du système (1.1).

On sait que nous avons

$$X(t + \omega) = X(t) \cdot X(\omega).$$

D'autre part la matrice $B = X(\omega) - E$ est telle que $\det B = \det (X(\omega) - E) \neq 0$.

En effet, si nous supposons que $\det B = 0$ il existe un vecteur $h \neq 0$ de sorte que

$$Bh = (X(\omega) - E)h = 0.$$

La fonction $x(t) = X(t)h$ est une solution du système (1.1) et il est évident que $x(t) \not\equiv 0$. Mais

$$x(t+\omega) = X(t+\omega)h = X(t)X(\omega)h = X(t)h = x(t)$$

ce qui constitue une contradiction.

Remarquons encore le fait que

$$B^{-1}X(\omega) = X(\omega)B^{-1}, \quad X(\omega)B = BX(\omega),$$

ce qui suit de

$$B^{-1}X(\omega) = (X^{-1}(\omega) - E)X(\omega) = E - X(\omega) = X(\omega)(X^{-1}(\omega) - E) = \\ = X(\omega)B^{-1}$$

et de

$$X(\omega)B = X(\omega)(X(\omega) - E) = X(\omega)(E - X^{-1}(\omega))X(\omega) = \\ = (X(\omega) - E)X(\omega) = BX(\omega).$$

Du fait que

$$X(t+\omega) = X(t)X(\omega)$$

il s'ensuit

$$X^{-1}(t+\omega) = X^{-1}(\omega)X^{-1}(t).$$

En vertu des conditions 1° et 2° il résulte que le système

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \tag{1.2}$$

où $f(t)$ est une fonction ω-périodique, a une solution ω-périodique et seulmenet une.

Plus précisément, on peut démontrer le

Lemme. *La fonction*

$$u(t) = -X(t)B^{-1}X(\omega)\int_t^{t+\omega} X^{-1}(s)f(s)ds \tag{1.3}$$

est une solution ω-périodique du système (1.2).

La démonstration du lemme peut être faite en vérifiant que $u(t+\omega) = u(t)$ et que

$$\frac{du}{dt} = A(t)u + f(t),$$

et peut être trouvée, par exemple, dans [3] et [4].

Dans ce qui suit nous allons considérer le système

$$\dot{x} = A(t)x + \lambda g(t\,;\,x), \tag{1.4}$$

où λ est un paramètre réel et $g(t\,;\,\cdot)$ est un opérateur défini sur $C(-\infty, \infty)$, pour $t \in (-\infty, \infty)$ (espace des fonctions continues et bornées sur $(-\infty, \infty)$,

ayant des valeurs dans R^n). Pour marquer le fait que le résultat de l'application de l'opérateur g à une fonction $x(t) \in C(-\infty, \infty)$ est aussi une fonction de t nous allons écrire encore $g(t\,;\,x) = (Gx)(t)$.

Soit $P(\omega)$ l'espace de Banach des fonctions ω-périodiques sur l'axe réel, avec la norme $\|x\|_P = \sup_{t\in(-\infty,\infty)} \|x(t)\|$.

Définition 1.1. *L'opérateur $g(t\,;\,x)$ défini pour $(t, x) \in (-\infty, \infty) \times P(\omega)$ s'appelle ω-périodique si pour toute fonction $\varphi(t) \in P(\omega)$ la fonction $g(t\,;\,\varphi) = (G\varphi)(t) \in P(\omega)$.*

A l'aide du lemme et de la définition on peut établir aisément un théorème qui donne la forme de la solution ω-périodique du système (1.4).

Théorème 1.1. *Si la matrice $A(t)$ satisfait aux conditions 1° et 2° et l'opérateur $g(t\,;\,x)$ est ω-périodique, alors toute solution ω-périodique du système* (1.4) *est une solution ω-périodique du système des équations intégrales*

$$y(t) = -\lambda X(t)B^{-1}X(\omega)\int_t^{t+\omega} X^{-1}(s)g(s\,;\,y)ds, \tag{1.5}$$

et réciproquement.

Démonstration. Soit $x = u(t)$ une solution ω-périodique du système (1.4) et

$$h(t) = \lambda g(t\,;\,u) = \lambda(Gu)(t).$$

Alors $x = u(t)$ est une solution ω-périodique du système

$$\dot{x} = A(t)x + h(t). \tag{1.6}$$

Du fait que (1.6) a une seule solution ω-périodique, en vertu du lemme il résulte que

$$u(t) = -X(t)B^{-1}X(\omega)\int_t^{t+\omega} X^{-1}(s)h(s)ds,$$

et par conséquent $u(t)$ est une solution ω-périodique du système (1.5).

Soit maintenant $x = v(t)$ une solution ω-périodique du système (1.5). Alors la fonction

$$l(t) = \lambda g(t\,;\,v) = \lambda(Gv)(t)$$

est ω-périodique.

Selon le lemme, la fonction

$$v(t) = -X(t)B^{-1}X(\omega)\int_t^{t+\omega} X^{-1}(s)l(s)ds$$

est la solution ω-périodique du système

$$\dot{x} = A(t)x + l(t),$$

c'est-à-dire $x = v(t)$ est la solution du système (1.4), ce qui démontre le théorème 1.1.

Soit de nouveau le système des équations intégrales (1.5) et notons

$$(Ty)(t) = -\lambda X(t)B^{-1}X(\omega)\int_t^{t+\omega} X^{-1}(s)g(s\,;y)ds.$$

Remarquons que si les conditions 1° et 2° sont remplies et l'opérateur $g(t\,;y)$ est ω-périodique alors l'opérateur T est tel que $T(P(\omega)) \subset P(\omega)$.

Dans ce qui suit nous allons considérer l'opérateur T défini sur l'espace $P(\omega)$.

Théorème 1.2. *Si la matrice $A(t)$ satisfait aux conditions 1° et 2°, l'opérateur $g(t\,;x)$ est ω-périodique et satisfait à la condition*

$$\|g(t\,;x) - g(t\,;y)\| \leqslant L\|x - y\|_P,$$

pour toute paire $x, y \in P(\omega)$, alors il existe une solution unique ω-périodique du système (1.4), dès que λ est assez petit.

Démonstration. Nous avons fait la remarque que $T(P(\omega)) \subset P(\omega)$. Puisque l'espace $P(\omega)$ est un espace de Banach, il reste à montrer que l'opérateur T est un opérateur contractant, ce qui permet d'appliquer le théorème du point fixe de Banach, en choisissant $P(\omega)$ comme espace fondamental avec

$$\rho(u, v) = \sup_{t\in(-\infty,\infty)} \|u(t) - v(t)\| = \|u - v\|_P.$$

Soit dans le domaine (Δ) : $0 \leqslant t \leqslant \omega$, $0 \leqslant s \leqslant 2\omega$

$$\sup \|X(t+\omega)B^{-1}X^{-1}(s)\| = m.$$

Si les fonctions $u(t)$ et $v(t)$ appartiennent à l'espace $P(\omega)$ nous avons :

$$\|(Tu)(t) - (Tv)(t)\| \leqslant |\lambda| \int_t^{t+\omega} \|X(t)B^{-1}X(\omega)X^{-1}(s)\|\,\|g(s\,;u) -$$

$$- g(s\,;v)\|ds \leqslant |\lambda| m \int_0^{\omega} L\|u - v\|_P\, ds = |\lambda| m \int_0^{\omega} L\rho(u, v)\, ds = |\lambda|\, m\omega\rho(u, v),$$

et par conséquent

$$\rho((Tu)(t), (Tv)(t)) \leqslant |\lambda| Lm\omega\rho(u, v).$$

Si nous prenons

$$|\lambda| < \frac{1}{Lm\omega},$$

il résulte que l'opérateur T est contractant et le théorème 1.2 est démontré.

Remarques. 1. Dans le cas particulier où $g(t\,;x) = \int_0^{\alpha(t)} k(t, s, x(s))\, ds$ la fonction $\alpha(t)$ étant ω-périodique et la fonction vectorielle $k(t, s, x)$ ω-périodique par rapport à t et continue dans le domaine (Δ_1) : $\{t \in (-\infty, \infty), x \in R^n, |s| \leqslant r\}$, (où le nombre r est tel que $|\alpha(t)| \leqslant r$), des résultats semblables ont été établis par I. V. Bykov et M. Imanaliev [3].

2. Un autre cas particulier intéressant est celui où $g(t\,;x) = g(t\,;x_t)$ avec $x_t = x(s)$, $\alpha \leqslant s \leqslant t$, c'est-à-dire $g(t\,;x)$ est un opérateur de Volterra.

2. Dans ce paragraphe nous allons considérer le problème de l'existence des solutions presque-périodiques pour un certain système d'équations différentielles en utilisant une fonction de Liapounov particulière et la méthode du point fixe.

Considérons d'abord le système d'équations différentielles

$$\dot{x} = f(t, x) + h(t), \tag{2.1}$$

où $f(t, x) \in C((-\infty, \infty) \times R^n)$, $f(t_0, x) \in C^1(R^n)$ pour tout point $t_0 \in (-\infty, \infty)$ et la fonction $h(t) \in C(-\infty, \infty)$, toutes les deux avec des valeurs dans R^n. Soit $\Lambda(t, x)$ le plus grand nombre caractéristique de la matrice

$$J_s(t, x) = \frac{1}{2}[Af'_x(t, x) + (Af'_x(t, x))^*],$$

où $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une matrice constante, symétrique, positivement définie.

Théorème 2.1. *Supposons que les conditions suivantes sont remplies :*

a) $\Lambda(t, x) \leqslant -\alpha < 0$ *pour* $(t, x) \in (-\infty, \infty) \times R^n$;

b) $\|f(t, 0)\| \leqslant \beta$ *et* $\|h(t)\| \leqslant \gamma$;

alors il existe une solution bornée unique du système (2.1), $x = x(t)$ ($\|x(t)\| \leqslant R$). Si de plus les fonctions $f(t, x)$ et $h(t)$ sont presque-périodiques par rapport à t, uniformément par rapport à x, pour $\|x\| \leqslant R$, alors la solution bornée $x = x(t)$ est aussi presque-périodique.

Démonstration. Remarquons d'abord que la démonstration du théorème est semblable au théorème 2 dû à B. P. Demidovitch [2], avec la modification due à la présence du terme $h(t)$. Soit la fonction $V(x) = (Ax, x)$ pour laquelle nous avons

$$\alpha' \|x\|^2 \leqslant (Ax, x) \leqslant \alpha'' \|x\|^2,$$

où α', α'' sont des constantes positives.

Si $x = x(t)$ est une solution du système (2.1) on obtient

$$\dot V(x(t)) = 2(A\dot x(t), x(t)) = 2(Af(t, x), x) + 2(Ah(t), x) =$$
$$= 2(A[f(t, x) - f(t, 0)], x) + 2(Af(t, 0), x) + 2(Ah(t), x).$$

D'après le lemme de D e m i d o v i t c h [2] et la condition a) nous avons

$$(A[f(t, x) - f(t, 0)], x) \leqslant A(t, x)\|x\|^2 \leqslant -\alpha\|x(t)\|^2 \leqslant -\frac{\alpha}{\alpha''} V(x(t))$$
$$= -kV(x(t)).$$

De la condition b) on obtient

$$\dot V(x(t)) \leqslant -2kV(x(t)) + 2\|A\|(\beta + \gamma)\|x\| \leqslant -2kV(x(t)) +$$
$$+ 2\|A\| \frac{(\beta + \gamma)}{\alpha'} V^{1/2}(x(t))$$

or

$$\frac{1}{2}\dot V(x(t)) \leqslant -kV(x(t)) + rV^{1/2}(x(t)), \tag{2.2}$$

où

$$r = \|A\| \frac{(\beta + \gamma)}{\alpha'}.$$

En utilisant le résultat sur les inégalités différentielles (par exemple [1], p. 106) on trouve

$$V(x(t)) \leqslant \left[\sqrt{V(x(t_0))}\, e^{-k(t-t_0)} + \frac{r}{k}\right]^2,$$

d'où il résulte l'existence des solutions bornées.

Pour démontrer l'unicité de la solution bornée $x = x(t)$, considérons la fonction $V = (A(x - \bar x), x - \bar x)$ où $x = \bar x(t)$ est une autre solution du système (2.1) supposée aussi bornée. Mais alors il s'ensuit

$$\frac{1}{2}\dot V(t) = (A[f(t, x(t)) - f(t, \bar x(t))], x(t) - \bar x(t)) \leqslant -\|x(t) - \bar x(t)\|^2,$$

d'où

$$\dot V(t) \leqslant -2\frac{\alpha}{\alpha''} V(t),$$

c'est-à-dire

$$\|x(t) - \bar x(t)\| \leqslant \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha''}}\, \|x(t_0) - \bar x(t_0)\|\, e^{-\alpha/\alpha''(t-t_0)}, \quad t \geqslant t_0. \tag{2.3}$$

Si nous faisons $t_0 \to -\infty$ il résulte que $x(t) = \bar x(t)$ pour $t \in (-\infty, \infty)$, donc l'unicité de la solution bornée.

Démontrons maintenant la deuxième partie du théorème.

Remarquons d'abord que du fait que $f(t, x)$ et $h(t)$ sont presque-périodiques, la condition b) est remplie. Soit $\|x(t)\| \leqslant R$. Alors du fait que $f(t, x)$ est uniformément presque-périodique de t pour $\|x\| \leqslant R$ il résulte que pour tout $\eta > 0$ il existe $\sigma(\eta) > 0$ tel que tout intervalle de l'axe réel de longueur σ contient au moins un nombre τ tel que

$$\|f(t + \tau, x) - f(t, x)\| < \eta^2, \quad -\infty < t < \infty, \ \|x\| \leqslant R$$

et respectivement

$$\|h(t + \tau) - h(t)\| \leqslant \eta^2.$$

Posons

$$V(t) = (A[x(t + \tau) - x(t)], x(t + \tau) - x(t)).$$

Alors

$$\frac{1}{2}\dot V(t) = (A[f(t + \tau, x(t + \tau)) + h(t + \tau) -$$
$$- f(t, x(t)) - h(t)], x(t + \tau) - x(t)) =$$
$$= (A[f(t + \tau, x(t + \tau)) - f(t + \tau, x(t))], x(t + \tau) - x(t)) +$$
$$+ (A[f(t + \tau, x(t)) - f(t, x(t))], x(t + \tau) - x(t)) +$$
$$+ (A[h(t + \tau) - h(t)], x(t + \tau) - x(t)) \leqslant -\frac{\alpha}{\alpha''} V(t) + 4\|A\| R\eta^2$$

et donc

$$V(t) \leqslant V(t_0)\, e^{-2\alpha/\alpha''(t-t_0)} + \frac{4\|A\|\, R\, \alpha''}{\alpha} \eta^2 \text{ pour } t \geqslant t_0. \tag{2.4}$$

Si nous faisons $t_0 \to -\infty$ nous obtenons

$$V(t) \leqslant \frac{4\|A\|}{\alpha} R\alpha'' \eta^2,$$

c'est-à-dire

$$\|x(t + \tau) - x(t)\| < \lambda\eta, \tag{2.5}$$

où $\lambda = 2\sqrt{\|A\| R\alpha''/\alpha\alpha'}$ ce qui prouve que la solution $x = x(t)$ est presque-périodique.

Remarque. Un résultat similaire peut être démontré dans le cas où $f(t, x)$ est périodique de t uniformément par rapport à x, $\|x\| \leq R$ et $h(t)$ est périodique.

Dans ce qui suit nous allons établir l'existence des solutions presque-périodiques pour un système perturbé de la forme

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t\,;\, x) \tag{2.6}$$

où $f(t, x)$ est la fonction définie par le théorème 2.1 et $g(t\,;\, x)$ est l'opérateur défini dans le paragraphe 1. Nous donnons d'abord la

Définition 2.1. *L'opérateur $g(t\,;\, x)$ défini pour $(t, x) \in (-\infty, \infty) \times \times AP$, où AP est l'espace de Banach des fonctions presque-périodiques sur $(-\infty, \infty)$, s'appelle presque-périodique si pour toute fonction $\varphi(t) \in AP$ la fonction $g(t\,;\, \varphi) = (G\varphi)(t) \in AP$.*

En utilisant maintenant le théorème 2.1 et le théorème du point fixe de Banach nous pouvons démontrer le

Théorème 2.2. *Supposons que les conditions du théorème 2.1 sont remplies et que l'opérateur $g(t\,;\, x)$ satisfait à la condition*

$$\|g(t\,;\, \varphi) - g(t\,;\, \psi)\| \leq L\|\varphi - \psi\|_{AP}, \tag{2.7}$$

pour toutes $(t, \varphi, \psi) \in (-\infty, \infty) \times AP \times AP$.

Alors si $\|A\|L/\alpha < 1$ le système (2.6) a une solution unique presque-périodique.

Démonstration. Pour toute $\varphi \in AP$, soit $T\varphi$ la solution unique presque-périodique du système

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t\,;\, \varphi), \tag{2.8}$$

ou, autrement écrit,

$$\dot{x} = f(t, x) + (G\varphi)(t)\,; \tag{2.8.}$$

cette solution existe d'après le théorème 2.1.

Par conséquent l'opérateur T est tel que $T(AP) \subset AP$.

Nous allons démontrer encore que T est un opérateur contractant.

Soient les fonctions $\varphi, \psi \in AP$ et $x = T\varphi$, $y = T\psi$ les solutions du système (2.6) qui correspondent à $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ respectivement.

Considérons la fonction $V(t) = (A[x(t) - y(t)],\ x(t) - y(t)$ qui nous donne

$$\frac{1}{2}\dot{V}(t) = (A[\dot{x}(t) - \dot{y}(t)],\ x(t) - y(t)) = (A[f(t, x(t)) - f(t, y(t)) + g(t\,;\, \varphi) -$$

$$- g(t, \psi)],\ x(t) - y(t)) = (A[f(t, x(t)) - f(t, y(t))],\ x(t) - y(t)) +$$

$$+ (A[g(t\,;\, \varphi) - g(t\,;\, \psi)],\ x(t) - y(t)).$$

D'après le lemme de B. P. Demidovitch

$$(A[f(t, x(t)) - f(t, y(t))],\ x(t) - y(t) \leq \Lambda(t, x)\|x(t) - y(t)\|^2 \leq$$

$$\leq -\alpha\|x(t) - y(t)\|^2 \leq -\frac{\alpha}{\alpha''}V(t).$$

De même, d'après l'inégalité de Cauchy,

$$(A[g(t\,;\, \varphi) - g(t\,;\, \psi)],\ x(t) - y(t)) \leq \|A\|\,\|g(t\,;\, \varphi) - g(t, \psi)\|\,\|x(t) - y(t)\| \leq$$

$$\leq \|A\|L\|\varphi - \psi\|_{AP}\,\|x(t) - y(t)\| \leq \frac{\|A\|L}{\sqrt{\alpha'}}\|\varphi - \psi\|_{AP}\,V^{1/2}(t).$$

Par conséquent

$$\frac{1}{2}\dot{V}(t) \leq -\frac{\alpha}{\alpha''}V(t) + \frac{\|A\|L}{\sqrt{\alpha'}}\|\varphi - \psi\|_{AP}\,V^{1/2}(t), \tag{2.9}$$

ou

$$\frac{1}{2}\dot{V}(t) \leq -aV(t) + b\|\varphi - \psi\|_{AP}\,V^{1/2}(t), \tag{2.9'}$$

où

$$a = \frac{\alpha}{\alpha''} > 0, \quad b = \frac{\|A\|L}{\sqrt{\alpha'}} > 0.$$

En utilisant le même résultat sur les inégalités différentielles employé dans la démonstration du théorème 2.1 nous obtenons

$$V(t) \leq \sqrt{V(t_0)}\,e^{-a(t-t^0)} + \left[\frac{b\|\varphi - \psi\|_{AP}}{a}\right]^2 \tag{2.10}$$

ou encore

$$V^{1/2}(t) \leq \sqrt{V(t_0)}\,e^{-a(t-t_0)} + \frac{b\|\varphi - \psi\|_{AP}}{a}, \tag{2.10.}$$

où $V(t_0) = V(x(t_0),\ y(t_0))$.

De l'inégalité (2.10) on obtient

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \sqrt{V(t_0)}\,e^{-a(t-t_0)} + \frac{b}{a\sqrt{\alpha'}}\|\varphi - \psi\|_{AP}, \quad t \geq t_0. \tag{2.11}$$

Nous démontrons maintenant que l'inégalité (2.11) implique

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \frac{b}{a\sqrt{\alpha'}}\|\varphi - \psi\|_{AP}, \quad t \geq t_0. \tag{2.12}$$

En effet, si l'inégalité (2.12) n'est pas vraie alors il existe $\varepsilon < 0$ et $\bar{t} \in \in (-\infty, \infty)$ tels que

$$\|x(\bar{t}) - y(\bar{t})\| < \frac{b}{a\sqrt{\alpha'}}\|\varphi - \psi\|_{AP} + \frac{\varepsilon}{3}, \quad t \geq t_0 + N(\varepsilon).$$

Comme $x(t)$ et $y(t)$ sont presque-périodiques, il existe $\tau \geq t_0 - \bar{t} + N(\varepsilon)$ qui est $\varepsilon/3$-presque-période de $x(t) - y(t)$ et donc

$$\frac{b}{a\sqrt{\alpha'}}\|\varphi - \psi\|_{AP} + \varepsilon = \|x(\bar{t}) - y(\bar{t})\| \leq \|[x(\bar{t}) - y(\bar{t})] - [x(\bar{t} + \tau) -$$

$$- y(\bar{t} + \tau)]\| + \|x(\bar{t} + \tau) - y(\bar{t} + \tau)\| < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{b}{a\sqrt{\alpha'}}\|\varphi - \psi\|_{AP},$$

d'où $\varepsilon < 2\varepsilon/3$, ce qui n'est pas possible et par conséquent l'inégalité (2.12) est démontrée.

Dans le même temps, l'inégalité (2.12) implique

$$\|T\varphi - T\psi\|_{AP} < \frac{b}{a\sqrt{\alpha'}}\|\varphi - \psi\|_{AP}, \tag{2.13}$$

c'est-à-dire

$$\rho(T\varphi, T\psi) \leq m\rho(\varphi, \psi),$$

où

$$m = \frac{b}{a\sqrt{\alpha'}} = \frac{\|A\|L\alpha''}{\alpha(\sqrt{\alpha'})^2} \leq \frac{\|A\|L}{\alpha} < 1,$$

ce qui démontre le théorème 2.2

Remarques. 1. Un résultat similaire peut être obtenu dans le cas de la périodicité.

2. Un cas particulier intéressant est le cas des équations intégro-différentielles

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t\,;\, x)$$

où $g(t\,;\, x) = \int_{-\infty}^{t} k(t - s)x(s)ds$, cet opérateur satisfaisant à la définition 2.2.

BIBLIOGRAPHIE

1. Birkhoff G. and Rota G. C. — *Ordinary Differential Equations*. Ginn and Company, New York, 1963.
2. Демидович Б. П. — *О некоторых системах с D-свойствам Левинсона*. Труды международного симпозиума по нелинейным колебаниям, Т. II. Киев, 1961, стр. 156—160.

3. Быков Я. В., Исмаилев М. — *О периодических решениях интегро-дифференциальных уравнений*. Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии, вып. 1. Фрунзе 1961, стр. 145—166
4. Villari G. — *Contributi allo studio dell'esistenza di soluzioni periodiche per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie*. Ann. di Mat. pura ed appl. (IV), vol. LXIX, 1965, pp. 171—190.

SOLUŢII PERIODICE ŞI APROAPE-PERIODICE PENTRU SISTEME DIFERENŢIALE

Rezumat

Lucrarea, care cuprinde două părţi, este consacrată existenţei soluţiilor periodice şi aproape-periodice ale unor sisteme diferenţiale.

În partea întîi se studiază existenţa soluţiilor periodice pentru sistemul (1.4) obţinut din sistemul (1.1) prin adăugarea unui termen perturbator care este un operator definit pe spaţiul funcţiilor continue şi mărginite.

Metoda de lucru este dată de aplicarea teoremei de punct fix a lui Banach.

În partea a doua se studiază existenţa soluţiilor aproape-periodice pentru sistemul (2.6) folosind atît teorema de punct fix a lui Banach cît şi o funcţie Liapunov de formă particulară.