SUL COMPORTAMENTO ASINTOTICO DI UNA EQUAZIONE INTEGRALE NON LINEARE*

DI

G. P. SZEGÖ

1. Introduzione

Si consideri l'equazione integrale non lineare

1.1 $$\sigma(t) = f(t) + \int_0^t k(t-z)\varphi(\sigma(z))dz$$

con le seguenti ipotesi:

1.2 La funzione reale $f(t)$ è definita per $t \geqslant 0$ insieme con la sua derivata prima $f'(t)$, ed inoltre $f(t)$, $f'(t) \in \mathcal{L}_1[0, +\infty)$.

1.3 La funzione reale $k(t)$ è definita per $t \geqslant 0$ insieme con la sua derivata prima $k'(t)$ ed inoltre $k(t)$, $k'(t) \in \mathcal{L}_1[0, +\infty) \cap \mathcal{L}_2[0, +\infty)$. Sotto queste ipotesi esiste la trasformata unilatera di Fourier sulla semiretta $[0, +\infty)$ della funzione $k(t)$.

Sia

1.4 $$\tilde{k}(i\omega) = \int_0^\infty k(t) \exp(-i\omega t)dt$$

tale transformata unilatera.

1.5. La funzione reale $\varphi(\sigma)$ è continua sull'asse reale, $\varphi(0) = 0$ ed inoltre tale che

1.6 $$0 < \sigma\varphi(\sigma) < \beta\sigma^2$$

---

* Lavoro svolto nell' ambito del Comitato di Scienze Matematiche del C.N.R.

ove β è un numero reale positivo. Esiste inoltre un numero reale $\gamma \geqslant 0$ tale che la disuguaglianza:

$$1.7 \qquad -\frac{1}{\beta} + \operatorname{Re}\{(1 + i\omega\gamma)\,\tilde{k}(i\omega)\} < 0$$

è soddisfatta per ogni numero reale ω.

Nei paragrafi successivi si dimostreranno vari teoremi relativi al comportamento asintotico delle soluzioni $\sigma(t)$ dell'equazione 1.1. In particolare nella sezione 2 si enuncerà un teorema 2.1 di attrazione globale della soluzione $\sigma(t) \equiv 0$ per le soluzioni limitate dell'equazione 1.1, teorema già dimostrato nel lavoro [1] ed analogo ad un teorema presentato nel lavoro [2]. Nella sezione 2 si presentano inoltre i lemmi necessari alla dimostrazione dei teoremi. La dimostrazione del teorema menzionato, oltre a quella di un nuovo teorema di attrazione globale, viene svolta nella sezione 3. La tecnica che useremo in queste dimostrazioni è essenzialmente dovuta a C. Corduneanu [3] ed il nostro contributo consiste nel dimostrare i risultati di attrazione per una classe di sistemi diversa da quella considerata dall'autore citato. La dimostrazione del teorema 2.1 presentata in questo lavoro corregge e completa i risultati preliminari presentati nel lavoro [1].

L'autore ringrazia il professor Aldo Ghizzetti ed il professor Constantin Corduneanu per i preziosi consigli.

2. Teoremi di attrazione globale

2.1. **Teorema.** *Siano soddisfatte le condizioni* 1.2, 1.3, 1.5, 1.6 *ed* 1.7, *della sezione precedente; allora se* $\sigma(t)$ *è una soluzione dell'equazione* 1.1, *limitata per* $t \geqslant 0$, *si ha:*

$$2.2 \qquad \lim_{t \to +\infty} \sigma(t) = 0.$$

La dimostrazione di questo teorema è basata sui seguenti lemmi:

2.3. **Lemma.** (Nohel [4]). *Sia* $\sigma(t)$ *una soluzione dell'equazione* (1.1) *che esiste su un intervallo massimo* $[0, \beta)$. *Se l'equazione* 1.1 *soddisfa le condizioni* 1.2 *ed* 1.3 *e se* $|\sigma(t)|$ *è limitata sull'intervallo* $[0, \beta)$, *allora* $\beta = +\infty$.

2.4. **Lemma.** *Sotto le ipotesi fatte, le soluzioni limitate* $\sigma(t)$ *dell'equazione* 1.1 *sono uniformemente continue su* $t \geqslant 0$.

Dimostrazione. Si consideri la funzione

$$2.5. \qquad \sigma'(t) = f'(t) + k(0)\varphi[\sigma(t)] + \int_0^t k'(t-z)\,\varphi[\sigma(z)]\,dz,$$

ottenuta differenziando la 1.1. Sia

$$2.6 \qquad \sigma'(t) = f'(t) + \mu(t),$$

ove

$$2.7 \qquad \mu(t) = k(0)\varphi[\sigma(t)] + \int_0^t k'(t-z)\varphi[\sigma(z)]\,dz.$$

Essendo $\sigma(t)$ per ipotesi, limitata, esiste un numero reale positivo δ tale che

$$|\sigma(t)| \leqslant \delta.$$

Quindi, dalla condizione 1.6,

$$2.8 \qquad |\varphi[\sigma(t)]| < \beta|\sigma(t)| \leqslant \beta\delta,$$

mentre

$$\left|\int_0^t k'(t-z)\varphi[\sigma(z)]\,dz\right| < \beta\delta\int_0^t |k'(t-z)|\,dz \leqslant \beta\delta\int_0^{+\infty} |k'(t)|\,dt.$$

Quindi introducendo la 2.7 e la 2.8 nella 2.6, si ha che $\mu(t)$ è una funzione limitata. Sia

$$2.9 \qquad |\mu(t)| \leqslant \nu.$$

Essendo $\sigma'(t)$ (2.6) somma di una funzione sommabile su $[0, +\infty)$ (ipotesi 1.2) e di una funzione limitata, la funzione $\sigma(t)$ è una funzione uniformemente continua. Infatti, fissato $\varepsilon > 0$ arbitrario, per l'ipotesi 1.2, esiste un Δt, sufficientemente piccolo, tale che

$$2.10 \qquad \left|\int_t^{t+\Delta t} f'(z)\,dz\right| < \frac{\varepsilon}{2};$$

ora, dalle 2.6, 2.9 e 2.10 si ha:

$$2.11 \qquad |\sigma(t+\Delta t) - \sigma(t)| \leqslant \left|\int_t^{t+\Delta t} f'(z)\,dz\right| + \left|\int_t^{t+\Delta t} \mu(z)\,dz\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \nu|\Delta t|$$

e scegliendo Δt tale che

$$|\Delta t| < \frac{\varepsilon}{2\nu}$$

si ha che, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\lambda > 0$ sufficientemente piccolo, tale che

$$2.12 \qquad |\sigma(t+\Delta t) - \sigma(t)| < \varepsilon \quad \text{per } |\Delta t| < \lambda,$$

da cui segue l'asserto.

2.13. **Lemma** (Barbălat [5]). *Sia* $g(x)$ *una funzione limitata sull'intervallo* $[0, +\infty)$, *e tale che*

2.14 $$\lim_{x \to +\infty} g(x) = k, \ |k| < +\infty,$$

Se su $[0, +\infty)$ *tale intervallo esiste ed è uniformemente continua la derivata* $g'(x)$, *si ha:*

2.15 $$\lim_{x \to +\infty} g'(x) = 0.$$

2.16. **Lemma.** (Nohel, [4]). *Se l'equazione* 1.1 *soddisfa le ipotesi* 1.2 *ed* 1.3, *esiste allora un numero* $\beta > 0$, *tale che l'equazione* 1.1 *ammette almeno una soluzione continua su* $[0, \beta)$.

2.17. **Lemma.** (Popov, [8], p. 58). *Se le funzioni continue* $\sigma(t)$ *e* $\sigma'(t)$ *sono limitate per* $t \geq 0$, *la funzione continua* $g(\sigma)$ *è tale che* $g(\sigma) > 0$ *per* $\sigma \neq 0$, $g(0) = 0$ *ed* $\int_0^\infty g(\sigma(t)) < \infty$, *allora* $\lim_{t \to +\infty} \sigma(t) = 0$.

3. Dimostrazione del teorema 2.1.

Seguendo Popov [6] definiamo la funzione

3.1 $$\varphi_t(z) = \begin{cases} \varphi(\sigma(z)) & \text{per } 0 \leq z \leq t \\ 0 & \text{per } z > t. \end{cases}$$

La funzione $\varphi_t(z)$ così definita ha chiaramente la proprietà $\varphi_t(z) \in \mathcal{L}_1[0, +\infty) \cap \mathcal{L}_2[0, +\infty)$. Essa in particolare ammette trasformata di Fourier unilatera sulla semiretta $[0, +\infty)$. Si indichi con $\tilde{\varphi}_t(i\omega)$ tale trasformata di Fourier, ossia

$$\tilde{\varphi}_t(i\omega) = \int_0^{+\infty} \varphi_t(z) \exp(-i\omega z) dz.$$

Si introduca la funzione

3.2 $$\lambda_t(z) = \int_0^z [k(z-\xi) + \gamma k'(z-\xi)] \varphi_t(\xi) d\xi - \left[\frac{1}{\beta} - \gamma k(0)\right] \varphi_t(z) \ (z \geq 0).$$

A motivo della definizione 3.1 la funzione $\lambda_t(z)$ può essere rappresentata nel seguente modo

3.3 $$\lambda_t(z) = \int_0^z [k(z-\xi) + \gamma k'(z-\xi)] \varphi(\sigma(\xi)) d\xi - \left[\frac{1}{\beta} - \gamma k(0)\right] \varphi(\sigma(z))$$

$$\text{per } 0 \leq z \leq t$$

e

3.4 $$\lambda_t(z) = \int_0^t [k(z-\xi) + \gamma k'(z-\xi)] \varphi(\sigma(\xi)) d\xi \ \text{ per } z > t.$$

Tenendo conto delle 1.1 e 2.4, la 3.3 diventa:

3.5 $$\lambda_t(z) = \sigma(z) - f(z) + \gamma[\sigma'(z) - f'(z)] - \frac{1}{\beta} \varphi(\sigma(z)) \ ; \ 0 < z \leq t.$$

Dalle espressioni 3.4 e 3.5 si vede [3] che esiste la trasformata unilatera di Fourier della funzione $\lambda_t(z)$ sulla semiretta $[0, +\infty)$, ossia:

3.6 $$\tilde{\lambda}_t(i\omega) = \int_0^{+\infty} \lambda_t(z) \exp(-i\omega z) dz.$$

Si calcoli ora in dettaglio tale trasformata basandosi sulla definizione 3.2 della funzione $\lambda_t(z)$. Tenendo presente la proprietà dell'integrale di convoluzione di due funzioni [7], si ha:

3.7 $$\tilde{\lambda}_t(i\omega) = \left\{\tilde{k}(i\omega) + \gamma[\tilde{k}'(i\omega) + k(0)] - \frac{1}{\beta}\right\} \tilde{\varphi}_t(i\omega) =$$

$$= \left[-\frac{1}{\beta} + (1 + i\omega\gamma) \tilde{k}(i\omega)\right] \tilde{\varphi}_t(i\omega).$$

Si definisca ora la seguente funzione ausiliaria

3.8 $$\rho(t) = \int_0^t \lambda_t(z) \varphi(\sigma(z)) dz.$$

Per la definizione 3.1 si ha anche

3.9 $$\rho(t) = \int_0^{+\infty} \lambda_t(z) \varphi_t(z) dz.$$

Applicando la uguaglianza di Parseval [7] alla 3.9, si ha:

3.10 $$\rho(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\lambda}_t(i\omega) \tilde{\varphi}_t(-i\omega) d\omega$$

e sostituendo la 3.7 nella 3.10, si ha

3.11 $$\rho(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{-\frac{1}{\beta} + (1 + i\omega\gamma)\,\tilde{k}(i\omega)\right\}|\tilde{\varphi}_t(i\omega)|^2 d\omega.$$

Ora essendo per la definizione 3.8, $\rho(t)$ una funzione reale, si ha che la 3.11 è equivalente alla

3.12 $$\rho(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Re}\left\{-\frac{1}{\beta} + (1 + i\omega\gamma)\,\tilde{k}(i\omega)\right\}|\tilde{\varphi}_t(i\omega)|^2 d\omega.$$

Ora introducendo nella 3.12 la disuguaglianza 1.7, che è verificata per ipotesi, si ha finalmente

3.13 $$\rho(t) < 0.$$

D'altra parte, introducendo la 3.5 nella 3.8, per la 3.13 si ha:

3.14 $$\rho(t) = \int_0^t \varphi(\sigma(z))\sigma(z)dz + \gamma\int_0^t \varphi(\sigma(z))\,\sigma'(z)dz -$$

$$-\frac{1}{\beta}\int_0^t \varphi^2(\sigma(z))dz - \int_0^t [f(z) + \gamma f'(z)]\,\varphi(\sigma(z))dz < 0.$$

Ora

3.15 $$\int_0^t \varphi(\sigma(z))\,\sigma'(z)dz = \int_{\sigma(0)}^{\sigma(t)}\varphi(\mu)d\mu = \int_0^{\sigma(t)}\varphi(\mu)d\mu - \int_0^{\sigma(0)}\varphi(\mu)d\mu$$

ed essendo per la 1.1

3.16 $$\sigma(0) = f(0),$$

sostituendo la 3.16 e 3.15 nella 3.14 si ha:

3.17 $$\int_0^t\left\{\left[\sigma(z) - \frac{1}{\beta}\varphi(\sigma(z))\right] - \left[f(z) + \gamma f'(z)\right]\right\}\varphi(\sigma(z))dz +$$

$$+ \gamma\int_0^{\sigma(t)}\varphi(\mu)d\mu \leq \gamma\int_0^{f(0)}\varphi(\mu)d\mu.$$

D'altra parte per la condizione 1.5, dalla 3.17, si ha:

3.18 $$\int_0^t\left\{\sigma(z) - \frac{1}{\beta}\varphi(\sigma(z))\right\}\varphi(\sigma(z))dz < \nu\int_t^{+\infty}\{|f(z)| + \gamma|f'(z)|\}\,dz + \delta$$

ove

3.19 $$\delta = \int_0^{f(0)}\varphi(\mu)d\mu$$

è un numero reale positivo che dipende solo dalla particolare funzione φ e dalla condizione iniziale $f(0)$ e ν è un numero reale positivo, tale che

3.20 $$|\varphi(\sigma(t))| < \nu \quad \text{per} \quad t \geq 0.$$

Si ha quindi che

3.21 $$0 < \int_0^t\left\{\sigma(z) - \frac{1}{\beta}\varphi(\sigma(z))\right\}\varphi(\sigma(z))dz < k \quad \text{per} \quad t \geq 0.$$

ove k è una costante che dipende solo dai dati del problema e dalle condizioni iniziali.

Sia ora

3.22 $$g(t) = \varphi(\sigma(t))\left\{\sigma(t) - \frac{1}{\beta}\varphi(\sigma(t))\right\} \geq 0.$$

Dai lemmi 2.3 e 2.4 si ha che la funzione limitata $\sigma(t)$ è definita sull'intero intervallo $[0, +\infty)$ ed ivi uniformemente continua, quindi le funzioni $\varphi(\sigma(t))$ e $g(t)$ sono uniformemente continue su $[0, +\infty)$. Esiste quindi finito il

3.23 $$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t g(z)dz = \alpha.$$

Si può quindi applicare il lemma 2.12 alla funzione 3.21 dimostrando così che

3.24 $$\lim_{t\to+\infty}\varphi(\sigma(t))\left\{\sigma(t) - \frac{1}{\beta}\varphi(\sigma(t))\right\} = 0.$$

Si consideri ora la funzione $\varphi(\sigma)\left|\sigma - \frac{1}{\beta}\varphi(\sigma)\right|$ che per $|\sigma| \in [a, b]$ ha un minimo positivo μ_a che tende a zero solo per $a \to 0$. Preso ora un numero

reale positivo $a > 0$, per la 3.24, esiste un $z_a > 0$ tale che per ogni $t > z_a$ si ha $g(t) < \mu_a$, e quindi $|\sigma(t)| < a$. Da cui si ha che

$$\lim_{t \to +\infty} \sigma(t) = 0, \tag{3.25}$$

ed il teorema è così dimostrato.

REFERENZE

1. A. Albertoni e G. P. Szegö — *Sur une équation intégrale de la théorie du réglage*. C.R. Acad. Sc. Paris, Vol. 261 (1965) pp. 29–32.
2. A. Albertoni, A. Cellina e G. P. Szegö — *Comportamento asintotico di una equazione integrale nonlineare*. Ann. Mat. Pura Applic. Serie IV vol. 72 (1966) pp. 133–140.
3. C. Corduneanu — *Sur une équation intégrale non-linéaire*. An. şt. Univ. Iaşi, Secţ. I, vol. 9, (1963) pp. 379–375.
4. J. Nohel — *Some problems in nonlinear Volterra integral equations*. Bull. Am. Math. Soc. Vol. 68 (1962) pp. 323–329.
5. I. Barbălat — *Systèmes d'équations différentielles d'oscillations non-linéaires*. Revue de Math. Pures Appl., vol. 4 (1959) pp. 267–270.
6. V. M. Popov — *Hiperstabilitatea Sistemelor Automate*. Editura Academiei Republicii Soc. România, Bucarest 1966.
7. E. C. Titchmarsh — *Fourier integral*. Oxford University Press, Oxford 1937.
8. M. A. Aizerman and F. R. Gantmacher — *Absolute Stability of Regulator Systems*. Holden Day, S. Francisco, 1964.

Università di Milano, Milano, Italia

ASUPRA COMPORTĂRII ASIMPTOTICE A UNEI ECUAŢII INTEGRALE NELINIARE

Rezumat

Se studiază ecuaţia (1.1) pe semiaxa $t \geqslant 0$, stabilindu-se faptul că $\lim \sigma(t) = 0$ pentru $t \to \infty$, unde $\sigma(t)$ este o soluţie mărginită iar $f(t), k(t)$ şi $\varphi(\sigma)$ satisfac condiţiile (1.2), (1.3), (1.5)–(1.7) din text.

Autorul foloseşte metoda lui V. M. Popov din teoria stabilităţii sistemelor de reglaj automat.

MÖBIUS TRANSFORMATIONS AND A CLASS OF RICCATI EQUATIONS

BY

E. R. SURYANARAYAN and J. KANE

1. Introduction

In this paper we shall give an algebraic structure of a class of Riccati equations of the type

$$\frac{dy}{dx} = A + By + Cy^2, \tag{A}$$

where A, B, C are functions of x. In order to study the structure, we shall first study some of the algebraic properties of the linear homogeneous second order equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = 0, \tag{B}$$

where k is an integrable function of x over the interval $[x_0, x]$. Over a partition P of $[x_0, x]$ a sequence of step functions is defined over the subintervals of P which converge uniformly to $k^2(x)$ as the norm of P approaches zero. The solution of the differential equation over each subinterval with constant k^2 gives an infinitesimal Möbius transformation and the product of these transformations in limit leads to the solution of the Riccati equation corresponding to B, namely

$$\frac{dy}{dx} = -(y^2 + k^2).$$

We shall use this idea to generalize the result obtained by Davis ([1], p. 11).