ASUPRA UNEI CLASE DE FIBRĂRI DIFERENȚIABILE

DE

MIRCEA CRAIOVEANU

În acest articol vom prezenta generalizări ale unor rezultate date de Ellis [3], [4].

1. Reamintim întîi unele noțiuni și rezultate privind teoria G-fibratelor principale [5].

Fie $\mathcal{S}$ un spațiu topologic și G un grup topologic acționînd continuu la dreapta pe $\mathcal{S}$. Aceasta înseamnă că este definită o aplicație continuă $\varphi : \mathcal{S} \times G \to \mathcal{S}$ astfel încît

$$\varphi(x, g_1 g_2) = \varphi(\varphi(x, g_1), g_2) \tag{I}$$

și

$$\varphi(x, e) = x, \tag{II}$$

oricare ar fi $x \in \mathcal{S}$, $g_1, g_2 \in G$, unde prin e am notat elementul neutru al lui G. Vom spune că $\mathcal{S}$ este un G-spațiu.

Fie $\mathcal{B} = \mathcal{S}/G$ spațiul orbitelor și $f : \mathcal{S} \to \mathcal{B}$ aplicația - cît respectivă în raport cu acțiunea lui G pe $\mathcal{S}$. Dotăm $\mathcal{B}$ cu topologia cît, adică cu cea mai fină topologie pentru care aplicația f este continuă ; se mai zice în acest caz că $\mathcal{B}$ este topologizat cu topologia *coindusă* de aplicația cît f.

Cînd $\varphi(x, g) = x$ se întîmplă dacă și numai dacă $g = e$, acțiunea lui G se numește *liberă*. Notînd cu E mulțimea $\{(x, x_1) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \mid$ există $g \in G$, unic pentru care $x_1 = \varphi(x, g)\}$ obținem o aplicație $\psi : E \to G$ definită prin $\psi(x, \varphi(x, g)) = g$. Dacă aplicația ψ este continuă, acțiunea lui G pe $\mathcal{S}$ se numește *proprie*. Dacă orice punct $y \in \mathcal{B}$ are o vecinătate V_y pe care există o secțiune continuă S_y, adică o aplicație continuă $S_y : V_y \to \mathcal{S}$ astfel ca $f \circ S_y = \mathrm{id}_{V_y}$, acțiunea lui G se numește *local trivială*. Vom spune că $f : \mathcal{S} \to \mathcal{B}$ este un *G-fibrat principal* sau, pe scurt, un G-fibrat dacă acțiunea continuă a lui G pe $\mathcal{S}$ este liberă, proprie și local trivială.

Un G-fibrat $f: \mathcal{S} \to \mathcal{B}$ se numește *G-universal* dacă spațiul $\mathcal{S}$ este contractibil.

Un izomorfism de G-fibrate peste $\mathcal{B}$ este un homeomorfism χ care realizează comutativitatea diagramei

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[rr, "\chi"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathcal{S}' \arrow[dl, "f'"] \\ & \mathcal{B} & \end{tikzcd}$$

și care în plus satisface condiția:

$$\chi(\varphi(x, g)) = \varphi'(\chi(x), g), \text{ oricare ar fi } x \in \mathcal{S},\ g \in G.$$

Teorema de clasificare. *Fie G un grup topologic și $f: \mathcal{S} \to \mathcal{B}$ un G-fibrat universal. Fie B un spațiu topologic paracompact. Atunci clasele de izomorfism ale G-fibratelor peste B sînt în corespondență naturală bijectivă cu clasele de homotopie ale aplicațiilor lui B în $\mathcal{B}$.*

Teorema de clasificare rămîne valabilă și pentru cazul cînd G este un grup diferențiabil, iar $\mathcal{B}$ și B, C^∞-varietăți paracompacte finit dimensionale, anume clasele de izomorfism ale G-fibratelor diferențiabile de clasă C^∞ peste $\mathcal{B}$ sînt în corespondență naturală bijectivă cu C^∞-clasele diferențiabile de homotopie ale aplicațiilor lui B în $\mathcal{B}$.

2. Fie G un grup Lie conex finit-dimensional. Dacă H este un subgrup închis al lui G, vom nota cu B spațiul omogen G/H al claselor la stînga ale lui H. Se știe că aplicația-cît $\lambda: G \to B$ este o fibrare local trivială de clasă C^∞.

Vom presupune mai departe că G admite o structură riemanniană stîng invariantă dată de un produs interior pe algebra Lie a grupului G. Prin urmare fibratul tangent al lui G, $T(G)$ are o structură riemanniană indusă de cea a lui G. Dacă u, v sînt vectori tangenți într-un punct $g \in G$, adică $u, v \in T_g(G)$, vom nota cu $\langle u, v \rangle_g$ produsul lor interior, iar cu $\|u\|_g$ lungimea lui u. În acest caz, H acționează ca un grup de izometrii pe G, cu clasele date drept orbite. Se știe că B este completă în orice structură riemanniană G-invariantă [6, p. 145].

În cele ce urmează vom considera o clasă specială de spații de drumuri pe G, care constituie o variantă a spațiului de drumuri cu originea într-un punct, considerată pentru prima oară de către Serre [12]. În acest scop dăm următoarea

Definiție 2.1. *Vom spune că o aplicație $x: I \to G$ ($I = [0, 1]$) este un p-drum admisibil pe G, dacă el satisface următoarele trei condiții:*

(A) $x(0) = e$, *e fiind elementul neutru al lui G;*

(B) *x este absolut continuă în metrica lui G.* Din (B) urmează că vectorul tangent $x'(t)$ există aproape peste tot;

(C) *aplicația tangentă $x': I \to T(G)$ este de clasă L^p, adică integrala în sens Lebesgue*

$$\int_0^1 \|x'(t)\|^p_{x(t)}\, dt \quad (1 \leq p < \infty)$$

este finită.

Mai departe vom nota cu $E^p(G)$ totalitatea p-drumurilor admisibile pe G. Dacă $x \in E^p(G)$, atunci $x(t) = \tau_G \circ x'(t)$ pentru toți $t \in I$ pentru care $x'(t)$ există, unde cu τ_G am notat proiecția fibratului tangent $(T(G), \tau_G, G)$.

Să mai observăm că pentru $q < p$ avem $E^p(G) \subset E^q(G)$. Dacă $x, y \in E^p(G)$, iar φ este legea de compoziție grupală a lui G, atunci legea

$$\varphi^*(x, y)(t) = \varphi(x(t), y(t))$$

organizează mulțimea $E^p(G)$ ca un grup.

$E^p(G)$ poate fi dotat cu următoarea topologie de spațiu metric: dacă $x, y \in E^p(G)$, definim distanța dintre x și y ca fiind

$$d(x, y) = \sup_{t \in I} \rho(x(t), y(t)),$$

unde ρ este o distanță pe G definită de structura riemanniană a lui G [3]. $E^p(G)$ devine în acest fel un grup topologic (metrizabil). Grupul $E^p(G)$ este contractibil deoarece există aplicația continuă h a produsului cartezian $E^p(G) \times I$ în $E^p(G)$ definită prin $[h(x, t)](s) = x[(1-t)s]$ cu proprietățile

$$h(x, 0) = x,$$

$$h(x, 1) = \mathbf{e},$$

$$h(\mathbf{e}, t) = \mathbf{e},$$

unde $\mathbf{e}$ este aplicația constantă $\mathbf{e}: I \to \{e\}$. $\mathbf{e}$ este prin urmare elementul neutru al lui $E^p(G)$.

Fie $\mu^p: E^p(G) \to G$ aplicația Serre definită prin $\mu^p(x) = x(1)$ și $\Omega^p(G)$ subgrupul p-drumurilor admisibile închise în e pe G, adică $\Omega^p(G) = \operatorname{Ker} \mu^p$. Dacă notăm $E^p(G, H) = \{x \in E^p(G) : x(1) \in H\}$, atunci $E^p(G, H)$ este un subgrup închis al lui $E^p(G)$ și compunerea

$$\nu^p = \lambda \circ \mu^p : E^p(G) \to G \to B$$

este o reprezentare a lui B ca spațiu omogen al lui $E^p(G)$, cu $E^p(G, H)$ ca fibră peste $b_0 = \lambda(H) \in B$.

Analog ca în [3] se demonstrează

Teorema 1. *$(E^p(G), \nu^p, B)$ este un $E^p(G, H)$-fibrat principal.*

De asemenea avem

Teorema 2. *$E^p(G)$ este un grup Lie infinit-dimensional modelat de un spațiu Banach separabil. Aplicația*

$$\mu^p : E^p(G) \to G$$

este un epimorfism fibrat analitic.

Demonstrația acestei afirmații folosește detalii tehnice prezentate în [2], [3]; de aceea renunțăm la ea. Reamintim doar modul cum se definește spațiul tangent la $E^p(G)$ în punctul x. Acesta va fi prin definiție spațiul Banach separabil al tuturor aplicațiilor $u : I \to T(G)$ ce satisfac următoarele condiții:

(a) $\tau_G \circ u(t) = x(t)$ oricare ar fi $t \in I$,

(b) $u(0) = 0'$, unde $0'$ este elementul neutru al algebrei Lie a lui G, $L(G)$,

(c) aplicația u este absolut continuă în metrica lui $T(G)$, cîmpul vectorilor ei tangenți este de clasă L^p și norma

$$\|u\|_x = \left(\int_0^1 \|u'(t)\|^p_{x(t)}\, dt\right)^{1/p} \tag{1}$$

este finită.

Norma (1) înzestrează $E^p(G)$ cu o structură Finsler naturală, ceea ce înseamnă că fiecărui punct x al lui $E^p(G)$, $x \in E^p(G)$, i s-a atașat o normă $\|\ \|_x$ în spațiul tangent în x la $E^p(G)$, $T_x(E^p(G))$, care este compatibilă cu structura de spațiu Banach a acestuia, corespondența $x \to \|\ \|_x$ fiind continuă și local uniformă pe $E^p(G)$.

Din teorema 1 și teorema 2 urmează că

Teorema 3. *ν^p este o aplicație fibrată analitică.*

3. Presupunem că G este conex, compact și semisimplu. Ultimele două condiții impun ca forma biliniară

$$F(X, Y) = \text{Trace}\,(\text{ad}\, X\ \text{ad}\, Y) \tag{2}$$

definită pe $L(G) \times L(G)$ ($X \in L(G)$, $Y \in L(G)$) să fie nedegenerată și pozitiv definită [6, p. 140–141]. Prin ad X am notat aplicația liniară $Y \to [X, Y]$ a lui $L(G)$ în el însuși. Forma (2) numită forma lui Killing a algebrei $L(G)$ definește pe G o structură riemanniană bi-invariantă unică. În plus au loc proprietățile

$F(\tau X, \tau Y) = F(X, Y)$ pentru orice automorfism τ al algebrei Lie $L(G)$, și

$F(X, [Y, Z]) = F(Y, [Z, X]) = F(Z, [X, Y])$ oricare ar fi $X, Y, Z \in L(G)$.

$F(X, Y)$ definește pe $L(G)$ un produs interior de tipul celui considerat în § 2 și pentru a păstra notația luăm $\|X\|^2 = F(X, X)$. Atunci, fără a restrînge generalitatea, putem presupune că

$$\|[X, Y]\| \leqslant \|X\| \cdot \|Y\| \tag{3}$$

oricare ar fi $X, Y \in L(G)$.

Să definim acum algebra Lie $L(E^p(G))$ a lui $E^p(G)$. Prin definiție ea va coincide cu spațiul tangent în $\mathbf{e}$ la grupul $E^p(G)$, adică

$$L(E^p(G)) \overset{\text{def}}{=} T_{\mathbf{e}}(E^p(G)).$$

Așadar $L(E^p(G))$ constă din mulțimea p-drumurilor admisibile pe $L(G)$ cu originea în $0'$. Dacă $u, v \in L(E^p(G))$ vom defini $[u, v] \in L(E^p(G))$ prin următoarea relație

$$([u, v])(t) = [u(t), v(t)], \text{ oricare ar fi } t \in I, \tag{4}$$

unde partea dreaptă a acestei relații este construită cu ajutorul croșetului din $L(G)$. Într-adevăr, dacă $u, v : I \to L(G)$ satisfac condițiile de tipul (a), (b), (c) atunci și $[u, v] : I \to L(G)$ satisface aceleași condiții.

Să observăm că în baza definiției date avem

$$L(E^p(G)) = E^p(L(G)).$$

Are loc

Teorema 4. *$L(E^p(G))$ este o algebră Lie-Banach, adică croșetul definit prin (4) respectă structura de spațiu Banach a lui $L(E^p(G))$.*

Demonstrație. Să notăm cu $\|u\|_{\mathbf{e}}$ norma lui $u \in L(E^p(G))$ definită de (1), iar cu $M_u = \max_{t \in I} \{\|u(t)\|\}$. Avem atunci

$$M_u \leqslant \|u\|_{\mathbf{e}}, \tag{5}$$

căci aplicînd inegalitatea lui Hölder din $L(G)$ obținem:

$$\|2u(t) - u(1)\| = \|u(t) - u(0) - (u(1) - u(t))\| =$$

$$= \left\|\int_0^t u'(s)\, ds - \int_0^1 u'(s)\, ds\right\| = \left\|\int_0^1 \text{sgn}\,(t - s)\, u'(s)\, ds\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \|\text{sgn}\,(t - s)\, u'(s)\|\, ds \leqslant \left(\int_0^1 |\text{sgn}\,(t - s)|^q\, ds\right)^{1/q} \left(\int_0^1 \|u'(s)\|^p\, ds\right)^{1/p} = \|u\|_{\mathbf{e}},$$

pentru orice $t \in I$, unde $1/p + 1/q = 1$. Așadar

$$M_u \leqslant \max_{t \in I} \{\|2u(t) - u(1)\|\} \leqslant \|u\|_{\mathbf{e}}.$$

Ținînd acum seama de inegalitatea lui Minkowski în $L(G)$, precum și de relațiile (3) și (5) găsim că

$$\|[u, v]\|_{\mathbf{e}} = \left(\int_0^1 \|([u, v])'(t)\|^p_{e(t)}\, dt\right)^{1/p} = \left(\int_0^1 \|[u'(t), v(t)] + [u(t), v'(t)]\|^p\, dt\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^1 \|[u'(t), v(t)]\|^p\, dt\right)^{1/p} + \left(\int_0^1 \|[u(t), v'(t)]\|^p\, dt\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^1 \| u'(t) \|^p \| v(t) \|^p \, dt \right)^{1/p} + \left(\int_0^1 \| u(t) \|^p \| v'(t) \|^p \, dt \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant M_v \left(\int_0^1 \| u'(t) \|^p \, dt \right)^{1/p} + M_u \left(\int_0^1 \| v'(t) \|^p \, dt \right)^{1/p} \leqslant 2 \| u \|_{\mathbf{e}} \| v \|_{\mathbf{e}},$$

inegalitate care ne arată că croșetul definit prin (4) este continuu în norma corespunzătoare lui (1) pentru spațiul $L(E^p(G))$.

Să definim acum aplicația $\mu_*^p : L(E^p(G)) \to L(G)$ prin relația $\mu_*^p(u) = u(1)$. Aplicația μ_*^p este liniară. Mai mult, din punctul de vedere al structuri de algebră Lie, ea este chiar un epimorfism, deoarece sînt satisfăcute relațiile

$$\mu_*^p(L(E^p(G))) = L(G)$$

și

$$\mu_*^p([u, v]) = [u, v](1) = [u(1), v(1)] = [\mu_*^p(u), \mu_*^p(v)].$$

Să dovedim acum următoarea

Lemă. *μ_*^p este o aplicație mărginită și prin urmare continuă.*

Demonstrație. Aplicînd inegalitatea lui Hölder din $L(G)$ obținem

$$\| u(t_2) - u(t_1) \| \leqslant | t_2 - t_1 |^{1/q} \cdot \| u \|_{\mathbf{e}}, \tag{6}$$

oricare ar fi $t_1, t_2 \in I$, unde $1/p + 1/q = 1$. Într-adevăr avem

$$\| u(t_2) - u(t_1) \| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} u'(s) \, ds \right\| \leqslant \left| \int_{t_1}^{t_2} \| u'(s) \| \, ds \right| \leqslant \left| \int_{t_1}^{t_2} ds \right|^{1/q} \cdot$$

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \| u'(s) \|^p \, ds \right|^{1/p} \leqslant | t_2 - t_1 |^{1/q} \cdot \left(\int_0^1 \| u'(s) \|^p \, ds \right)^{1/p} = | t_2 - t_1 |^{1/q} \| u \|_{\mathbf{e}}.$$

Dar atunci, în baza lui (6) rezultă că

$$\| \mu_*^p(u) \| = \| u(1) \| = \| u(1) - u(0) \| \leqslant \| u \|_{\mathbf{e}}, \text{ c.c.t.d.}$$

În baza proprietăților algebrice ale lui μ_*^p și a lemei demonstrate urmează

Teorema 5. *Dacă G este un grup Lie conex, compact și semisimplu, atunci μ_*^p este un epimorfism continuu de algebre Lie al cărui nucleu $L(\Omega^p(G)) = \Omega^p(L(G))$ este idealul închis al p-drumurilor admisibile pe $L(G)$ închise*

în O'. Cu alte cuvinte

$$0 \to L(\Omega^p(G)) \to L(E^p(G)) \xrightarrow{\mu_*^p} L(G) \to 0$$

este un șir exact de algebre Lie-Banach.

Corolar. *Grupul $\Omega^p(G)$ al p-drumurilor admisibile pe G închise în e formează un subgrup al lui $E^p(G)$ cu proprietatea că*

$$\operatorname{codim}(E^p(G), \Omega^p(G)) = \dim G.$$

Să mai observăm că dacă H este un subgrup închis al lui G și dacă notăm

$$\nu_*^p = \lambda_* \circ \mu_*^p : L(E^p(G)) \to L(G) \to L(G)/L(H),$$

atunci șirul de spații vectoriale

$$0 \to L(E^p(G, H)) \to L(E^p(G)) \xrightarrow{\nu_*^p} L(G)/L(H) \to 0$$

este exact.

4. Fie $\mathfrak{A}$ o algebră Lie-Banach peste corpul $\mathbf{K}$. Printr-un $\mathfrak{A}$-modul Banach vom înțelege ansamblul format dintr-un spațiu Banach $\mathbf{E}$ peste $\mathbf{K}$ și un homomorfism continuu $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_{\mathbf{E}}$, unde cu $\mathfrak{A}_{\mathbf{E}}$ s-a notat algebra Lie-Banach a operatorilor liniari continui pe $\mathbf{E}$. Dacă $e \in \mathbf{E}$ și $X \in \mathfrak{A}$, atunci $h(X)e$ este o aplicație biliniară continuă în raport cu (X, e) și în plus avem

$$h(X)(h(Y)e) - h(Y)(h(X)e) = h([X, Y])e,$$

unde cu $[X, Y]$ se notează croșetul din $\mathfrak{A}$ al elementelor X și $Y \in \mathfrak{A}$. Colanțurile n-dimensionale ale lui $\mathfrak{A}$ din $\mathbf{E}$ sînt definite drept elemente din $L_a^n(\mathfrak{A}, \ldots, \mathfrak{A}; \mathbf{E})$, adică elemente din spațiul Banach peste $\mathbf{K}$ al aplicațiilor n-liniare $\alpha : \mathfrak{A} \times \ldots \times \mathfrak{A} \to \mathbf{E}$ continue și alternante. Notăm $L_a^n(\mathfrak{A}, \ldots, \mathfrak{A}; \mathbf{E})$ prin $C^n(\mathfrak{A}, \mathbf{E})$ și, prin definiție, luăm $C^0(\mathfrak{A}, \mathbf{E}) = \mathbf{E}$.

Dacă $\mathfrak{J}$ este un ideal închis din $\mathfrak{A}$, putem defini pe fiecare $C^n(\mathfrak{J}, \mathbf{E})$ o structură de $\mathfrak{A}$-modul Banach. Pentru aceasta vom proceda inductiv. Pentru $n = 0$ avem $C^0(\mathfrak{J}, \mathbf{E}) = \mathbf{E}$ și afirmația noastră este adevărată. Pentru $n > 0$, $\alpha \in C^n(\mathfrak{J}, \mathbf{E})$, $X \in \mathfrak{A}$, $Y_1, \ldots, Y_n \in \mathfrak{J}$ definim homomorfismul continuu

$$k : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_{C^n(\mathfrak{J}, \mathbf{E})}$$

prin formula

$$(k(X)\alpha)(Y_1, \ldots, Y_n) = h(X)\alpha(Y_1, \ldots, Y_n) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \alpha(Y_1, \ldots, Y_{i-1}, [X, Y_i], Y_{i+1}, \ldots, Y_n).$$

În particular, $C^n(\mathfrak{A}, \mathbf{E})$ are o structură de $\mathfrak{A}$-modul Banach oricare ar fi n nenegativ.

Operatorul de cofrontieră este o aplicaţie liniară continuă $d: C^n(\mathfrak{A}, \mathbf{E}) \to C^{n+1}(\mathfrak{A}, \mathbf{E})$ astfel ca $d^2 = 0$, $d(k(X)\alpha) = k(X)d\alpha$ şi pentru $\alpha \in C^0(\mathfrak{A}, \mathbf{E}) = \mathbf{E}$, $(d\alpha)(X) = h(X)\alpha$. Pentru $n > 0$ definim d inductiv prin formula

$$(d\alpha)_X = k(X)\,\alpha - d(\alpha_X),$$

unde, dacă $\alpha \in C^n(\mathfrak{A}, \mathbf{E})$ atunci pentru $X \in \mathfrak{A}$ definim $\alpha_X \in C^{n-1}(\mathfrak{A}, \mathbf{E})$ punînd

$$\alpha_X(X_1, \ldots, X_n) = \alpha(X, X_1, \ldots, X_n).$$

Procedînd atunci inductiv putem arăta că obţinem următoarea formulă

$$(d\alpha)(X_0, \ldots, X_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i k(X_i)\,\alpha(X_0, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, X_n) +$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_0, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, \widehat{X}_j, \ldots, X_n),$$

unde semnul $\wedge$ indică faptul că argumentul de sub el trebuie omis.

Fie $\mathfrak{A}'$ o subalgebră închisă a lui $\mathfrak{A}$ şi să notăm ${}^nA = C^n(\mathfrak{A}, \mathbf{E})$ conceput aici ca grup abelian. Atunci operatorul d considerat mai sus este un operator diferenţial de grad 1 şi (A, d) defineşte un complex de colanţuri, unde cu A am notat suma directă $\sum_{n=0}^{\infty} {}^nA$.

Utilizînd subalgebra închisă $\mathfrak{A}'$ putem construi o filtrare descrescătoare $(A^j)_{j \in \mathbf{Z}}$ a lui A în felul următor:

(a) dacă $j < 0$, $A^j = A$,

(b) dacă $j > 0$, $A^j = \sum_{n=0}^{\infty} A^j \hat{\times} {}^nA$, unde

$A^j \hat{\times} {}^nA = (0)$, dacă $j > n$; în caz contrar mulţimea respectivă constă din acele colanţuri n-dimensionale α, pentru care $\alpha(X_1, \ldots, X_n) = 0$, ori de cîte ori $n - j + 1$ argumente X_i aparţin lui $\mathfrak{A}'$.

Într-adevăr sînt satisfăcute condiţiile

$$A^j \supset A^{j+1}, \quad d(A^j) \subset A^j \quad \text{şi} \quad \bigcap_j A^j = (0).$$

În plus avem $h(X)\,A^j \subset A^j$ oricare ar fi $X \in \mathfrak{A}'$.

În particular $A^j \hat{\times} {}^jA$ poate fi identificat cu $C^j(\mathfrak{A}/\mathfrak{A}', \mathbf{E})$ şi prin urmare poate fi conceput ca un $\mathfrak{A}'$-modul Banach.

Notăm cu E_0 grupul graduat asociat lui A prin filtrarea $(A^j)_{j \in \mathbf{Z}}$ adică E_0 este suma directă a grupurilor $E_0^j = A^j/A^{j+1}$ şi cu $E_0^{j,i}$ imaginea naturală a lui $A^j \hat{\times}\, {}^{i+j}A$ în E_0^j.

Operatorul de cofrontieră d induce într-o manieră naturală un operator diferenţial d_0 în E_0^j cu proprietatea $d_0(E_0^{j,i}) \subset E_0^{j,i+1}$. Putem apoi defini grupul abelian E_1 drept suma directă $\sum_{j=0}^{\infty} E_1^j$, unde E_1^j este grupul de cohomologie $H(E_0^j) = H^j(E_0)$ în raport cu d_0, care la rîndul său este graduat prin subgrupurile $E_1^{j,i} = H^{j,i}(E_0) = H_i(E_0^j)$. Operatorul diferenţial d_1 al lui E_1, indus de d permite definirea grupului abelian $E_2 = H(E_1)$ în raport cu d_1. În acest fel obţinem un şir spectral $(E_r)_{r=0,1,2,\ldots}$ al lui A.

Analog ca în [7] se pot dovedi propoziţiile 1 şi 2.

Propoziţia 1. *Grupurile $E_0^{j,i}$ şi $C^j(\mathfrak{A}', C^j(\mathfrak{A}/\mathfrak{A}', \mathbf{E}))$ sînt izomorfe pentru toţi $i \geqslant 0$ şi $j \geqslant 0$. Dacă cu φ se notează izomorfismul lui E_0 pe $C(\mathfrak{A}', C(\mathfrak{A}/\mathfrak{A}', \mathbf{E}))$, acesta induce un izomorfism $\varphi_1^{j,i}$ al lui $E_1^{j,i}$ pe $H^i(\mathfrak{A}', C^j(\mathfrak{A}/\mathfrak{A}', \mathbf{E}))$.*

Să presupunem acum că $\mathfrak{A}'$ este un ideal închis al lui $\mathfrak{A}$. Atunci $H^i(\mathfrak{A}', \mathbf{E})$ este un $\mathfrak{A}$-modul Banach şi are loc

Propoziţia 2. *Izomorfismul φ_1 din Propoziţia 1 defineşte un izomorfism al lui $E_1^{j,i}$ pe $C^j(\mathfrak{A}/\mathfrak{A}', H^i(\mathfrak{A}', \mathbf{E}))$, care la rîndul lui induce un izomorfism al lui $E_2^{j,i}$ pe $H^j(\mathfrak{A}/\mathfrak{A}', H^i(\mathfrak{A}', \mathbf{E}))$.*

Aplicînd aceste consideraţii pentru cazul cînd $\mathfrak{A} = L(E^p(G))$ şi $\mathfrak{A}' = L(\Omega^p(G))$, unde G satisface condiţiile din § 3 şi ţinînd seama de teorema 5 obţinem

Teorema 6. *Grupurile abeliene $E_2^{j,i}$ şi $H^i(L(G), H^j(L(\Omega^p(G))$, sînt izomorfe pentru orice spaţiu Banach* $\mathbf{E}$.

Rezultatul stabilit acum poate fi formulat în particular şi pentru algebra topologică (în sensul structurii de spaţiu Banach) exterioară reală a lui $L(E^p(G))$, $C^*(L(E^p(G)))$, anume filtrarea lui $C^*(L(E^p(G)))$ prin idealul $L(\Omega^p(G))$ determină un şir spectral, astfel încît $E_2^{j,i}$ şi $H^i(L(G), H^j(L(\Omega^p(G))))$ sînt izomorfe şi a cărui algebră terminală este izomorfă cu algebra graduată asociată lui $H^*(L(E^p(G)))$ convenabil filtrată.

5. Deoarece $E^p(G)$ este contractibil, fibratul $(E^p(G), \nu^p, B)$ ce intervine în teorema 1 poate fi conceput ca un $E^p(G, H)$-fibrat universal în sensul § 1 şi în baza teoremei de clasificare specializată pentru varietăţi diferenţiabile avem:

Teorema 7. *Dacă V este o C^∞-varietate paracompactă finit-dimensională, atunci clasele de izomorfism ale $E^p(G, H)$-fibratelor peste V sînt în corespondenţă naturală bijectivă cu C^∞-clasele diferenţiabile de homotopie ale C^∞-aplicaţiilor lui V în B.*

În toate consideraţiile care urmează de acum înainte vom presupune că B este $(n-1)$-conex, adică grupurile de homotopie $\pi_i(B) = 0$ pentru $i = 1, \ldots, n-1$ şi că grupul de homotopie de dimensiune n, $\pi_n(B)$, este ciclic infinit $(n > 1)$; atunci grupul $E^p(G, H)$ este $(n-2)$-conex şi $\pi_{n-1}(E^p(G, H))$ este un grup ciclic infinit, deoarece în baza şirului exact de homotopie al fibratului $(E^p(G), \nu^p, B)$, grupurile $\pi_n(B)$ şi $\pi_{n-1}(E^p(G, H))$ sînt izomorfe.

Fie $\xi : W \to V$ un $E^p(G, H)$-fibrat peste V (în sens topologic). După cum se știe, [13, p. 215] clasa sa caracteristică este prima obstrucție în construcția unei secțiuni a fibratului, adică în prelungirea unei secțiuni de la pasul $n-1$ la n. Condiția $n > 1$ implică că fibratul $\mathfrak{K}(\pi_{n-1})$ al coeficienților locali [13, p. 184] este simplu, adică trivial; el este izomorf cu $V \times \mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}$ fiind grupul întregilor. Dacă se alege una din cele două clase de izomorfism al lui $\mathfrak{K}(\pi_{n-1})$ pe $V \times \mathbf{Z}$, aceasta revine la orientarea $E^p(G, H)$-fibratului peste V. Așadar în acest caz clasa caracteristică $\mathbf{c}$ este un element al grupului de coomologie $H^n(V, \mathbf{Z})$ de dimensiune n. Mai mult, această clasă caracteristică poate fi reprezentată ca o pereche transgresivă (a, b) de colanțuri, adică printr-un colanț de dimensiune n, a, al lui V și printr-un colanț de dimensiune $n-1$, b, al lui W, a cărui restricție la orice fibră este un cociclu $(n-1)$-dimensional al lui $E^p(G, H)$, cele două colanțuri fiind legate prin relația $db = \xi^* a$, unde d este operatorul de cofrontieră.

Să notăm cu $\mathbf{c}_0$ clasa caracteristică a $E^p(G, H)$-fibratului universal $\nu^p : E^p(G) \to B$ și cu (a_0, b_0) perechea transgresivă ce o reprezintă. Să presupunem că $E^p(G, H)$-fibratul $\xi : W \to V$ este indus de aplicația continuă $f : V \to B$ și fie $g : W \to E^p(G)$ aplicația fibrată ce realizează comutativitatea următoarei diagrame:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{g} & E^p(G) \\ \xi \downarrow & & \downarrow \nu^p \\ V & \xrightarrow{f} & B \end{array} \tag{7}$$

Atunci se știe că (a, b), unde $a = f^* a_0$, $b = g^* b_0$ este o pereche transgresivă ce reprezintă clasa caracteristică $\mathbf{c}$ a $E^p(G, H)$-fibratului $\xi : W \to V$.

Să presupunem acum că toate considerațiile din această secțiune sînt făcute în ipoteze de diferențiabilitate (de clasă C^∞) referitoare la V (de dimensiune finită) și W.

Pentru cele ce urmează sînt utile următoarele definiții [1], [3]

Definiția 5.1. *Printr-o $(\mathcal{J}, m)$-pereche de forme diferențiabile (ω, θ) pe C^∞-varietatea diferențiabilă V înțelegem:*

a) *o $(m-1)$-formă diferențiabilă θ definită pe $V \setminus e(\theta)$, unde $e(\theta)$ este un C^∞-poliedru diferențiabil al lui V, cu*

$$\dim e(\theta) < \dim V - m;$$

b) *o m-formă diferențiabilă ω definită pe $V \setminus e(\omega)$, unde $e(\omega)$ este un C^∞-subpoliedru al lui $e(\theta)$ cu*

$$\dim e(\omega) < \dim V - m - 1,$$

cu proprietățile:

(α) *$d\theta = \omega$ pe intersecția domeniilor de definiție corespunzătoare,*

(β) *pentru orice C^∞-lanț întreg diferențiabil l de dimensiune m ce satisface condițiile $|l| \cap e(\omega) = \emptyset$, $|\partial l| \cap e(\theta) = \emptyset$, valoarea expresiei*

$$\int_l \omega - \int_{\partial l} \theta \tag{8}$$

aparține subinelului $\mathcal{J}$ din $\mathbf{R}$.

Valoarea expresiei (8) se numește reziduumul perechii (ω, θ) asociat lanțului l. Utilizăm notația

$$R\,[(\omega, \theta) \mid l] = \int_l \omega - \int_{\partial l} \theta.$$

Dacă $e(\theta) = \emptyset$, orice lanț de dimensiune m satisface condițiile din (β) și reziduumul corespunzător este nul.

Definiția 5.2. *Printr-o secțiune admisibilă a $E^p(G, H)$-fibratului $\xi : W \to V$ (în ipotezele date) vom înțelege o secțiune φ de clasă C^∞ definită peste $V \setminus e(\varphi)$, unde $e(\varphi)$ este un C^∞-poliedru diferențiabil al lui V cu* $\dim e(\varphi) < \dim V - n$.

Deoarece $E^p(G, H)$ este $(n-2)$-conex, asemenea secțiuni admisibile există [3].

Fie acum (Ω_0, θ_0) o pereche transgresivă de forme ce reprezintă clasa caracteristică $\mathbf{c}_0$ a $E^p(G, H)$-fibratului $\nu^p : E^p(G) \to B$, unde p este un număr întreg par (vezi Observația 3) din § 6). Atunci cu notațiile din diagrama (7), $\omega = f^* \Omega_0$, $\theta = g^* \theta_0$ constituie o pereche transgresivă de forme reprezentînd clasa caracteristică $\mathbf{c}$. În acest caz $(\omega, \varphi^* \theta)$ este o $(\mathbf{R}, n)$-pereche de forme pe V, φ fiind o secțiune admisibilă. Să observăm că perechea $(\omega, \varphi^* \theta)$ are singularitățile $e(\omega) = \emptyset$ și $e(\varphi^* \theta) = e(\varphi)$.

Analog ca în [1], [3] se demonstrează atunci

Teorema 8. *Pentru orice secțiune admisibilă φ a $E^p(G, H)$-fibratului orientat $\xi : W \to V$ (p par) și orice C^∞-lanț întreg diferențiabil l, de dimensiune n, pe V cu proprietatea $|\partial l| \cap e(\varphi) = \emptyset$, clasa caracteristică $\mathbf{c}$ este reprezentată pe l prin reziduumul perechii $(\omega, \varphi^* \theta)$ asociat lanțului l:*

$$\mathbf{c} \cdot l = R\,[(\omega, \varphi^* \theta) \mid l].$$

6. Condiția necesară și suficientă pentru ca o C^∞-varietate V să admită partiții de clasă C^∞ ale unității este ca V să fie paracompactă și ca fiecare din spațiile ei tangente să admită partiții de clasă C^∞ ale unității [11]. Pe de altă parte dacă $\mathbf{E}$ este un spațiu Banach separabil a cărui normă este de clasă C^∞ pe $\mathbf{E} - \{0\}$, atunci $\mathbf{E}$ admite partiții de clasă C^∞ ale unității [11].

$E^p(G)$ fiind un spațiu metrizabil este paracompact în baza unei teoreme a lui Stone. Apoi, oricare ar fi $x \in E^p(G)$ am văzut că spațiul tangent $T_x(E^p(G))$ este un spațiu Banach separabil. În baza teoremei 2 din [9, p. 221] rezultă că norma (1) este diferențiabilă de clasă C^∞ cu excepția originii dacă p este un număr par, adică $T_x(E^p(G))$ admite pentru p par partiții

de clasă C^∞ ale unității. Așadar, dacă p este par, $E^p(G)$ admite partiții de clasă C^∞ ale unității. În toate cele ce urmează se va presupune că p este un număr par ($p = 2k$, k fiind un întreg pozitiv).

Teorema lui de Rham generalizată pentru varietăți infinit-dimensionale [2] ne permite să afirmăm că grupul de coomologie reală de dimensiune m al lui $E^{2k}(G)$ este izomorf cu grupul cît al m-formelor închise prin subgrupul formelor exacte. Deoarece $E^p(G)$ este contractibil, grupurile de coomologie de dimensiune $\geqslant 1$ sînt triviale și deci orice m-formă închisă Ω pe $E^{2k}(G)$, de clasă C^∞, este diferențiala exterioară a unei $(m-1)$-forme θ de clasă C^∞, oricare ar fi $m \geqslant 1$.

Fie Ω o m-formă închisă de clasă C^∞ pe G ($m \geqslant 1$) și să considerăm $(m-1)$-forma θ pe $E^{2k}(G)$ definită de (9), anume pentru orice $x \in E^{2k}(G)$ și $m-1$ vectori $u_1, \ldots, u_{m-1}$ din spațiul tangent în x, $T_x(E^{2k}(G))$, fie

$$\langle \theta(x), u_1 \times \ldots \times u_{m-1} \rangle =$$

$$(9) \qquad = \int_0^1 \langle \Omega(x(t)), x'(t) \times u_1(t) \times \ldots \times u_{m-1}(t) \rangle \, dt,$$

unde prin parantezele $\langle \ \rangle$, se notează valorile formelor respective pe vectorii corespunzători. Are loc atunci

Teorema 9. *θ este o $(m-1)$-formă de clasă C^∞ pe $E^{2k}(G)$ ce satisface relația*

$$d\theta = (\mu^{2k})^* \Omega.$$

Demonstrație. Contracția

$$h : E^{2k}(G) \times I \to E^{2k}(G) \text{ dată de } [h(x, t)](s) = x[(1-t)s]$$

este continuă în raport cu (x, t) și de clasă C^∞ în raport cu x pentru fiecare $t \in I$.

Să notăm cu $h_*(x, t)$ diferențiala acestei aplicații. Atunci pentru orice $x \in E^{2k}(G)$ aplicația $t \to h_*(x, t)$ este de clasă L^p, căci dacă notăm cu $\mathbf{i}$ vectorul unitar al lui I avem

$$(10) \qquad [h(x, t)\mathbf{i}](s) = -sx'[(1-t)s] \text{ aproape peste tot în } I.$$

Homomorfismul μ^{2k} fiind analitic, forma indusă $\Omega^* = (\mu^{2k})^*\Omega$ este o m-formă închisă ($d\Omega^* = d(\mu^{2k})^*\Omega = (\mu^{2k})^* d\Omega = 0$) de clasă C^∞ pe $E^{2k}(G)$. Mai mult, integrala în sens Lebesgue

$$\theta(x) = (\varkappa\Omega^*)\, x = -\int_0^1 (h^* \Omega^*)(x, 1-t) \vee \mathbf{i} \, dt$$

există, unde cu $\vee$ s-a notat operația produs interior.

Să arătăm că $\theta(x)$ astfel definit satisface (9), adică θ este o $(m-1)$-formă de clasă C^∞ pe $E^{2k}(G)$. În acest scop să considerăm aplicația compusă

$$\psi = \mu^{2k} \circ h : E^{2k}(G) \times I \to G$$

și să notăm cu ψ_* diferențiala acestei aplicații. Dacă u este un vector din spațiul tangent la $E^{2k}(G)$ în punctul x atunci ținînd seama de faptul că $[h_*(x, t)u](s) = u[(1-t)s]$ și de (10) avem

$$\psi_*(x, t)(u, \mathbf{i}) = (u(1-t), -x'(1-t)).$$

Cu notațiile de mai sus rezultă atunci că

$$\langle \theta(x), u_1 \times \ldots \times u_{m-1} \rangle =$$

$$= -\int_0^1 \langle (h^* (\mu^{2k})^* \Omega)(x, 1-t), \mathbf{i} \times u_1 \times \ldots \times u_{m-1} \rangle \, dt =$$

$$= -\int_0^1 \langle \Omega(x(t)), \psi_*(x, 1-t)\mathbf{i} \times \psi_*(x, 1-t)u_1 \times \ldots \times \psi_*(x, 1-t)u_{m-1} \rangle \, dt =$$

$$= \int_0^1 \langle \Omega(x, t)), x'(t) \times u_1(t) \times \ldots \times u_{m-1}(t) \rangle \, dt, \quad \text{c.c.t.d.}$$

Un calcul analog cu cel din [10, p. 124] ne conduce la relația $\Omega^* = \varkappa d\Omega^* + \varkappa d\Omega^*$, identitate ce are însă un caracter local. Deoarece Ω^* este o m-formă închisă urmează că $\Omega^* = d\theta$, adică $(\mu^{2k})^*\Omega = d\theta$. Această formulă are însă un caracter global, așa după cum reiese din considerațiile efectuate la începutul acestei secțiuni.

Observații. 1) Formula ce intervine în teorema 9 este adevărată și în cazul cînd p nu este par, dar în acest caz ea are un caracter local.

2) Dacă $(E^{2k}(G), \nu^{2k}, B)$ este $E^{2k}(G, H)$—fibratul universal din § 2, atunci pentru orice m-formă închisă Ω_0 pe B, formula (9) cu $\Omega = \lambda^*\Omega_0$ definește o $(m-1)$-formă θ_0 pe $E^{2k}(G)$ astfel ca $d\theta_0 = (\nu^{2k})^*\Omega_0$. În adevăr, teorema 9 ne conduce la

$$d\theta_0 = (\mu^{2k})^* \Omega = (\mu^{2k})^* \lambda^* \Omega_0 = (\lambda_\circ \mu^{2k})^* \Omega_0 = (\nu^{2k})^* \Omega_0.$$

3) Dacă B satisface condițiile impuse la începutul § 5 și dacă Ω_0 este o n-formă închisă ce reprezintă un generator al lui $H^n(B, \mathbf{Z})$ atunci (Ω_0, θ_0) este o pereche transgresivă ce reprezintă clasa caracteristică a $E^{2k}(G, H)$-fibratului $(E^{2k}(G), \nu^{2k}, B)$.

7. În §§ 7 și 8 vom da unele aplicații ale considerațiilor precedente ce extind pe cele din [3]. Să luăm $G = SO(n+1)$, $H = SO(n)$. Atunci

spațiul omogen G/H se identifică în mod natural cu sfera unitate de dimensiune n, S^n. Presupunem mai departe că S^n este înzestrată cu structura uzuală riemanniană și că este orientată. Să notăm grupul Lie-Banach $E^p(SO(n+1), SO(n))$ cu Γ_n^p. Fie ω_{ij} $(1 \leqslant i < j \leqslant n+1)$ o bază a 1-formelor stîng-invariante din spațiul dual al lui $L(SO(n+1))$ și

$$\Omega = k(n)\,\omega_{1,n+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{n,n+1}$$

așa-numita formă index a lui Kronecker pe $SO(n+1)$, unde $k(n)$ este inversul măsurii sferei S^n. Se știe că există o n-formă $SO(n+1)$-invariantă unică pe S^n, Ω_0, astfel încît $\lambda^*\Omega_0 = \Omega$. Atunci pentru orice $n > 1$ și orice p par, teorema 9 furnizează o pereche transgresivă în Γ_n^p fibratul universal orientat al lui S^n, complet determinată de forma index a lui Kronecker.

8. Fie X^{n+m} o C^∞-varietate riemanniană compactă, orientată de dimensiune $n+m$ și $f: X^{n+m} \to S^n$, o aplicație continuă în sfera S^n. Vom reaminti întîi unele chestiuni datorate lui Kervaire [8] și Thom [14]. Astfel se știe că f poate fi aproximată printr-o aplicație de clasă C^∞, să zicem $\tilde{f}$, cu proprietatea că există o vecinătate V_x a punctului $x \in S^n$ astfel încît pe preimaginea lui V_x prin f, $\tilde{f}$ să fie o submersie. Atunci preimaginea punctului x, $\tilde{f}^{-1}(x) = Y^m$ este o subvarietate închisă de dimensiune m a lui X^{n+m} orientabilă și, în general, neconexă.

Dacă în punctul x se alege un reper tangent la S^n, aplicația f induce pe Y^m un C^∞-cîmp N^n de n-repere normale în X^{n+m}. Cîmpul N^n permite înzestrarea lui Y^m cu o orientare determinată. În acest sens se face convenția următoare: vectorii unui reper tangent la Y^m ce definesc orientarea pozitivă a lui Y^m, urmați de n vectori liniari independenți ai cîmpului N^n determină orientarea pozitivă a lui X^{n+m}.

Fie $\mathcal{F}_x$ familia aplicațiilor continue a lui X^{n+m} în S^n pentru care un punct fix $x \in S^n$ se bucură de proprietatea de mai sus. Cele spuse pînă acum în această secțiune pot fi rezumate atunci în felul următor: dacă alegem în x un reper fix tangent la S^n, fiecărei funcții din $\mathcal{F}_x$ îi corespunde în mod univoc o subvarietate închisă orientată Y^m a lui X^{n+m} echipată cu un cîmp N^n de repere normale în X^{n+m}. În plus, în fiecare clasă de homotopie de aplicații $X^{n+m} \to S^n$ există o aplicație din familia $\mathcal{F}_x$.

Reciproc, dacă varietatea compactă Y^m este scufundată în X^{n+m} (este vorba de o scufundare închisă [10, p. 35]) și este echipată aici cu un cîmp N^n de vectori normali, atunci perechii $(Y^m; N^n)$ i se poate atașa o aplicație $f: X^{n+m} \to S^n$ ce aparține familiei $\mathcal{F}_x$ [8].

Așadar, oricărei aplicații $f: X^{n+m} \to S^n$ a familiei $\mathcal{F}_x$ îi corespunde o pereche $(Y^m; N^n)$ și, reciproc, oricărei perechi (Y^m, N^n) îi corespunde o aplicație f' a familiei $\mathcal{F}_x$.

Fie $\mathfrak{N}_m(X^{n+m})$ mulțimea tuturor subvarietăților Y^m închise, de clasă C^1 din X^{n+m} echipate cu un cîmp N^n de repere normale. Un element din $\mathfrak{N}_m(X^{n+m})$ este deci reprezentat printr-o pereche $(Y^m; N^n)$. În ceea ce privește legătura între orientarea lui Y^m și cea a lui X^{n+m}, vom accepta convenția

de mai înainte. Vom introduce în $\mathfrak{N}_m(X^{n+m})$ o relație de echivalență. În acest scop să observăm întîi că perechile $(Y^m; N^n)$ și $(Y'^m; N'^n)$ din $\mathfrak{N}_m(X^{n+m})$ pot fi scufundate în mod natural în produsul cartezian $X^{n+m} \times I$ $(I = [0, 1])$: Y^m este scufundată cu cîmpul său în $X^{n+m} \times (0)$ și Y'^m cu cîmpul său în $X^{n+m} \times (1)$, imaginile lor fiind $Y^m \times (0)$ și $Y'^m \times (1)$, respectiv. Aceste perechi se zic echivalente, dacă există o C^1-varietate Z^{m+1} în $X^{n+m} \times I$ de bord $\partial Z^{m+1} = Y'^m \times (1) - Y^m \times (0)$ astfel încît cîmpul reperelor normale pe $Y^m \times (0)$ și $Y'^m \times (1)$ să fie normal la Z^{m+1} și poate fi extins la un cîmp de repere normale pe Z^{m+1} în $X^{n+m} \times I$. Kervaire [8] a dovedit că două perechi $(Y^m; N^n)$ și $(Y'^m; N'^n)$ sînt echivalente dacă și numai dacă aplicațiile induse corespunzătoare $f, f': X^{n+m} \to S^n$ sînt homotope. Prin urmare există o corespondență bijectivă între mulțimea claselor de echivalență ale lui $\mathfrak{N}_m(X^{n+m})$, și mulțimea claselor de homotopie ale aplicațiilor lui X^{n+m} în S^n.

Fie $(Y^m; N^n)$ o pereche de tipul considerat și $i: Y^m \to X^{n+m}$ aplicația de incluziune; atunci, deoarece Y^m este închisă și orientată (orientare determinată de N^n și de orientarea lui X^{n+m}) avem un generator distins $v_0 \in H_m(Y^m, \mathbf{Z})$ care determină o clasă de omologie $i_*(v_0) = v \in H_m(X^{n+m}, \mathbf{Z})$, ce depinde numai de clasa de echivalență a lui $(Y^m; N^n)$.

Ținînd seama de aceste considerații, de teorema 7 și de teorema II. 2 [14], putem enunța acum

Teorema 10. *Dacă X este o C^∞-varietate riemanniană compactă, orientată de dimensiune $n+m$, atunci există o corespondență naturală bijectivă între mulțimea claselor de echivalență definite pe $\mathfrak{N}_m(X)$ și mulțimea claselor de izomorfism ale Γ_n^p-fibratelor de clasă C^∞ peste X. Clasa de omologie a unei perechi $(Y^m; N^n)$ și clasa caracteristică a Γ_n^p-fibratului orientat corespunzător peste X se corespund prin izomorfismul dintre $H_m(X, \mathbf{Z})$ și $H^n(X, \mathbf{Z})$, dat de dualitatea lui Poincaré.*

Încheiem considerațiile aplicative cu următoarea observație. O clasă de coomologie $u \in H^n(X; \mathbf{Z})$ (X este o C^∞-varietate finit-dimensională) se zice că este sferică [3], dacă există o aplicație continuă $f: X \to S^n$ astfel ca $u = f^*(v)$, unde $v \in H^n(S^n, \mathbf{Z})$. Atunci teorema de reprezentare din [1, § 4] a claselor de coomologie prin forme cu singularități împreună cu teorema 8 ne oferă o formulă de reprezentare integrală transgresivă pentru orice clasă sferică a lui X într-un Γ_n^{2k}-fibrat, fibrat ce este unic determinat de clasa de homotopie a lui $f: X \to S^n$, dar care în general nu este determinat de u.

BIBLIOGRAFIE

1. Allendoerfer C. B. și Eells J. — *On the cohomology of a manifold*. Comm. Math. Helv. 32 (1958), p. 165–179.
2. Eells J. — *On the geometry of function spaces*. Symp. Intern. de Top. Alg. Mexico, 1958, p. 303–308.

3. Eells J. — *A class of smooth bundles over a manifold.* Pacific Journal of Math., X (1969), p. 525–538.
4. Eells J. — *A setting for global analysis.* Bull. of the Amer. Math. Soc., 72 (1966), p. 751–807.
5. Eells J. — *Fibring spaces of maps.* Proc. Symp. on Infinite Dimensional Topology, 1967.
6. Helgason S. — *Differential geometry and symmetric spaces.* (Ediția în limba rusă, Moscova 1964).
7. Hochschild G. și Serre J. P. — *Cohomology of Lie algebras.* Annals of Math., 57 (1953), p. 591–603.
8. Kervaire M. — *Courbure intégrale généralisée et homotopie.* Math. Ann., 131 (1956), p. 219–252.
9. Kurzweil J. — *On approximation in real Banach spaces.* Studia Math., XIV (1954), p. 214–231.
10. Lang S. — *Introduction to differentiable manifolds.* (Ediția în limba rusă, Moscova, 1967).
11. Palais R. S. — *Lectures on the differential topology of infinite dimensional manifolds.* Brandeis University, 1964–1965.
12. Serre J. P. — *Homologie singulière des espaces fibrés.* Annals of Math., 54 (1951), p. 425–505.
13. Steenrod N. — *The topology of fibre bundles.* (Ediția în limba rusă, Moscova, 1953).
14. Thom R. — *Quelques propriétés globales des variétés différentiables.* Comm. Math. Helv., 28 (1954), p. 17–86.

ON A CLASS OF SMOOTH BUNDLES

Abstract

The manifolds of maps of type $L_1^p(I, 0; G, e) = E^p(G)$ [4] which generalize the case $E(G)$ [3] ($p = 2$), are considered. It is showm that $E^p(G)$ is a Banach-Lie group and its Banach-Lie algebra, when G is compact and semisimple, is studied.

The smooth $E^p(G, H)$-bundles over a smooth finite-dimensional manifold (H is a closed subgroup of G) are considered and some topological properties of them are studied. When p is even, an explicit integral representation formula for their characteristic classes are obtained. Finaly some applications which generalize the results of [3] are given.

DESPRE SPAȚII CU STRUCTURĂ APROAPE-PRODUS CARE ADMIT UN GRUP SIMPLU TRANZITIV

DE

E. VAMANU

Fie V_n o varietate diferențiabilă de clasă C^∞ dotată cu o structură aproape-produs, T spațiul tangent într-un punct generic al varietății și P și Q două distribuții complementare ale spațiului tangent, determinate de operatorul liniar φ de clasă C^∞ care caracterizează structura aproape-produs ($\varphi^2 = I$). Avem

$$T_x = P_x \oplus Q_x \text{ pentru orice } x \in V_n \tag{1}$$

pi dacă dim $P = p$, dim $Q = q$; $p + q = n =$ dim T.

Fie (e_i) respectiv (dx^i) reperul și coreperul natural într-un punct oarecare $x \in V_n$. Pe spațiul V_n putem însă considera și repere adaptate la structura aproape-produs. Notăm prin $(\lambda_\alpha) = (\lambda_{a_1}, \lambda_{a_2})$ un reper neolonom adaptat la structura aproape-produs, în punctul x, deci $\lambda_{a_1} \in P_x$ și $\lambda_{a_2} \in Q_x$ ($a_1 = 1, \ldots, p$; $a_2 = 1, \ldots, q$).

Dacă g este o metrică de clasă C^∞ definită pe V_n, notăm prin g_{ij} respectiv $g_{\alpha\beta}$ componentele tensorului metric față de cele două repere în punctul $x \in V_n$.

Legătura între g_{ij} și $g_{\alpha\beta}$ este dată de

$$g_{ij} = \lambda_i^\alpha \lambda_j^\beta g_{\alpha\beta}, \quad g^{ij} = \lambda_\alpha^i \lambda_\beta^j g^{\alpha\beta}, \tag{2}$$

(λ_i^α) fiind matricea inversă matricei (λ_β^j). Alegem în fiecare punct al varietății V_n vectorii reperului adaptat la structura aproape-produs unitari și ortogonali doi cîte doi, atunci

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \tag{3}$$

și din (2) rezultă