3. Eells J. — *A class of smooth bundles over a manifold.* Pacific Journal of Math., X (1960), p. 525—538.
4. Eells J. — *A setting for global analysis.* Bull. of the Amer. Math. Soc., 72 (1966), p. 751—807.
5. Eells J. — *Fibring spaces of maps.* Proc. Symp. on Infinite Dimensional Topology, 1967.
6. Helgason S. — *Differential geometry and symmetric spaces.* (Ediția în limba rusă, Moscova 1964).
7. Hochschild G. și Serre J. P. — *Cohomology of Lie algebras.* Annals of Math., 57 (1953), p. 591—603.
8. Kervaire M. — *Courbure intégrale généralisée et homotopie.* Math. Ann., 131 (1956), p. 219—252.
9. Kurzweil J. — *On approximation in real Banach spaces.* Studia Math., XIV (1954), p. 214—231.
10. Lang S. — *Introduction to differentiable manifolds.* (Ediția în limba rusă, Moscova, 1967).
11. Palais R. S. — *Lectures on the differential topology of infinite dimensional manifolds.* Brandeis University, 1964—1965.
12. Serre J. P. — *Homologie singulière des espaces fibrés.* Annals of Math., 54 (1951), p. 425—505.
13. Steenrod N. — *The topology of fibre bundles.* (Ediția în limba rusă, Moscova, 1953).
14. Thom R. — *Quelques propriétés globales des variétés différentiables.* Comm. Math. Helv., 28 (1954), p. 17—86.

ON A CLASS OF SMOOTH BUNDLES

Abstract

The manifolds of maps of type $L_1^p(I, 0; G, e) = E^p(G)$ [4] which generalize the case $E(G)$ [3] ($p = 2$), are considered. It is shown that $E^p(G)$ is a Banach-Lie group and its Banach-Lie algebra, when G is compact and semisimple, is studied.

The smooth $E^p(G, H)$-bundles over a smooth finite-dimensional manifold (H is a closed subgroup of G) are considered and some topological properties of them are studied. When p is even, an explicit integral representation formula for their characteristic classes are obtained. Finaly some applications which generalize the results of [3] are given.

DESPRE SPAȚII CU STRUCTURĂ APROAPE-PRODUS CARE ADMIT UN GRUP SIMPLU TRANZITIV

DE

E. VAMANU

Fie V_n o varietate diferențiabilă de clasă C^∞ dotată cu o structură aproape-produs, T spațiul tangent într-un punct generic al varietății și P și Q două distribuții complementare ale spațiului tangent, determinate de operatorul liniar φ de clasă C^∞ care caracterizează structura aproape-produs ($\varphi^2 = I$). Avem

$$T_x = P_x \oplus Q_x \text{ pentru orice } x \in V_n \tag{1}$$

pi dacă $\dim P = p$, $\dim Q = q$; $p + q = n = \dim T$.

Fie (e_i) respectiv (dx^i) reperul și coreperul natural într-un punct oarecare $x \in V_n$. Pe spațiul V_n putem însă considera și repere adaptate la structura aproape-produs. Notăm prin $(\lambda_\alpha) = (\lambda_{a_1}, \lambda_{a_2})$ un reper neolonom adaptat la structura aproape-produs, în punctul x, deci $\lambda_{a_1} \in P_x$ și $\lambda_{a_2} \in Q_x$ ($a_1 = 1, \ldots, p$; $a_2 = 1, \ldots, q$).

Dacă g este o metrică de clasă C^∞ definită pe V_n, notăm prin g_{ij} respectiv $g_{\alpha\beta}$ componentele tensorului metric față de cele două repere în punctul $x \in V_n$.

Legătura între g_{ij} și $g_{\alpha\beta}$ este dată de

$$g_{ij} = \lambda_i^\alpha \lambda_j^\beta g_{\alpha\beta}, \quad g^{ij} = \lambda_\alpha^i \lambda_\beta^j g^{\alpha\beta}, \tag{2}$$

(λ_i^α) fiind matricea inversă matricei (λ_β^j). Alegem în fiecare punct al varietății V_n vectorii reperului adaptat la structura aproape-produs unitari și ortogonali doi cîte doi, atunci

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \tag{3}$$

și din (2) rezultă

(4) $$g_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_i^\alpha \lambda_j^\alpha; \quad g^{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha^i \lambda_\alpha^j.$$

Mai mult, avem

$$g_{ij} \lambda_\beta^j = \lambda_i^\beta,$$

deci λ_i^β devin componentele covariante ale vectorilor λ_β.

În cele ce urmează, vom considera pe V_n repere adaptate în raport cu care tensorul metric are componentele date de (4).

Fie φ_j^i tensorul de tipul (1.1) corespunzător operatorului structurii aproape-produs. Acest tensor, în fiecare punct $x \in V_n$ este dat de

(5) $$\varphi_j^i = \lambda_{a_1}^i \lambda_j^{a_1} - \lambda_{a_2}^i \lambda_j^{a_2}.$$

Metrica g dată pe V_n determină o conexiune Γ de componente Γ_{jk}^i definite prin

(6) $$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} (g_{lj,k} - g_{jk,l} + g_{kl,j}).$$

Presupunem acum că vectorii reperului adaptat la structura aproape-produs λ_α determină operatorii infinitezimali ai unui grup simplu tranzitiv G_n.

În Nota de față ne propunem să studiem structura grupului G_n cu ajutorul proprietăților celor două distribuții ale planului tangent determinate de operatorul liniar φ. Dacă notăm prin X_α operatorii grupului G_n, avem

(7) $$X_\alpha = \lambda_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Ecuațiile de structură a grupului G sînt date de

(8) $$(X_\alpha, X_\beta) = C_{\beta\alpha}^\gamma X_\gamma,$$

$C_{\beta\alpha}^\gamma$ fiind constantele de structură a grupului.

Ținînd cont de (7), aceste ecuații mai pot fi puse și sub forma

(9) $$\lambda_\alpha^j \partial_j \lambda_\beta^i - \lambda_\beta^j \partial_j \lambda_\alpha^i + C_{\alpha\beta}^\gamma \lambda_\gamma^i = 0,$$

unde $\partial_j = \partial/\partial x_j$.

Folosind relația $\lambda_\alpha^i \lambda_i^\beta = \delta_\alpha^\beta$, din (9) rezultă pentru constantele de structură expresiile:

(10) $$C_{\alpha\beta}^\gamma = \lambda_\alpha^i \lambda_\beta^j (\partial_i \lambda_j^\gamma - \partial_j \lambda_i^\gamma)$$

și

(10') $$C_{\alpha\beta}^\gamma = \lambda_i^\gamma (\partial_\beta \lambda_\alpha^i - \partial_\alpha \lambda_\beta^i).$$

Din aceste expresii rezultă

(11) $$C_{\alpha\beta}^\gamma = W_{\beta\alpha}^\gamma,$$

unde $W_{\beta\alpha}^\gamma$ este obiectul de neolonomie determinat de reperul adaptat la structura aproape-produs.

Fie $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ componentele coeficienților de conexiune față de reperul adaptat. Avem

(12) $$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \lambda_i^\alpha \Gamma_{jk}^i \lambda_\beta^j \lambda_\gamma^k + \lambda_i^\alpha \partial_\beta \lambda_\gamma^i.$$

Ținînd cont de (4) și (6), obținem pentru acești coeficienți expresia

(13) $$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} (C_{\gamma\beta}^\alpha + C_{\beta\alpha}^\gamma + C_{\gamma\alpha}^\beta),$$

de unde

(14) $$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha - \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha = C_{\gamma\beta}^\alpha.$$

Deci, față de aceste repere adaptate, conexiunea Γ nu mai este simetrică.

Ne propunem acum să cercetăm cum se reflectă unele proprietăți ale distribuțiilor P, Q asupra structurii grupului G_n.

§ 1. Distribuția P (respectiv Q) este integrabilă. Aceasta se caracterizează prin ([2], p. 234)

$$W_{b_1c_1}^{a_1} = 0 \text{ (respectiv } W_{b_2c_2}^{a_1} = 0).$$

Ținînd cont de (11) rezultă că P (respectiv Q) este integrabilă dacă și numai dacă avem

(15) $$C_{b_1c_1}^{a_2} = 0 \text{ (respectiv } C_{b_2c_2}^{a_1} = 0).$$

În aceste condiții, ecuațiile de structură a grupului G_n devin:

(16) $$\begin{aligned} (X_{a_1}, X_{b_1}) &= C_{b_1a_1}^{c_1} X_{c_1}, \\ (X_{a_1}, X_{b_2}) &= C_{b_2a_1}^{c_1} X_{c_1} + C_{b_2a_1}^{c_2} X_{c_2}, \\ (X_{a_2}, X_{b_2}) &= C_{b_2a_2}^{c_1} X_{c_1} + C_{b_2a_2}^{c_2} X_{c_2} \end{aligned}$$

și respectiv

(16') $$\begin{aligned} (X_{a_1}, X_{b_1}) &= C_{b_1a_1}^{c_1} X_{c_1} + C_{b_1a_1}^{c_2} X_{c_2}, \\ (X_{a_1}, X_{b_2}) &= X_{b_2a_1}^{c_1} X_{c_1} + C_{b_2a_1}^{c_2} X_{c_2}, \\ (X_{a_2}, X_{b_2}) &= C_{b_2a_2}^{c_2} X_{c_2}. \end{aligned}$$

Din (16) și (16') rezultă teoremele:

Teorema 1. *Condiția necesară și suficientă ca distribuția P să fie integrabilă, este ca operatorii $X_1, X_2, \ldots, X_p$ să formeze un subgrup cu p parametri H_p al grupului G_n.*

Teorema 2. *Condiția necesară și suficientă ca distribuția Q să fie integrabilă este ca operatorii $X_{p+1}, X_{p+2}, \ldots, X_n$ să formeze un subgrup cu q parametri H_q al grupului G_n.*

Structura aproape-produs se numește integrabilă dacă cele două distribuții sînt integrabile. Din teoremele 1 și 2 rezultă că în acest caz primii p operatori X_{a_1} formează un subgrup H_p iar restul, X_{c_1}, formează un subgrup H_q al grupului G_n și avem

$$G_n = H_p \cdot H_q \text{ (produs obișnuit).} \tag{17}$$

Deci structura aproape-produs este integrabilă dacă și numai dacă grupul G_n este de forma (17).

§ 2. Distribuția P (respectiv Q) este plană dacă și numai dacă $\Gamma^{a_2}_{b_1c_1} = 0$ (respectiv $\Gamma^{a_1}_{b_2c_2} = 0$) [1]. Din (13) rezultă

$$\Gamma^{a_2}_{b_1c_1} = \frac{1}{2}\left(C^{a_2}_{c_1b_1} + C^{b_1}_{c_1a_2} + C^{c_1}_{b_1a_2}\right) \tag{18}$$

și

$$\Gamma^{a_1}_{b_2c_2} = \frac{1}{2}\left(C^{a_1}_{c_2b_2} + C^{b_2}_{c_2a_1} + C^{c_2}_{b_2a_1}\right). \tag{18'}$$

$\Gamma^{a_2}_{b_1c_1} = 0$ atrage $C^{a_2}_{c_1b_1} + C^{b_1}_{c_1a_2} + C^{c_1}_{b_1a_2} = 0$. Ținînd cont și de (14) rezultă

$$C^{a_2}_{c_1b_1} = 0, \quad C^{b_1}_{c_1a_2} + C^{c_1}_{b_1a_2} = 0. \tag{19}$$

(19) reprezintă condiții necesare și suficiente ca distribuția P să fie plană Analog obținem

$$C^{a_1}_{c_2b_2} = 0, \quad C^{b_2}_{c_2a_1} + C^{c_2}_{b_2a_1} = 0. \tag{19'}$$

În condițiile (19) ecuațiile de structură a grupului G_n capătă forma:

$$\begin{aligned} (X_{a_1}, X_{b_1}) &= C^{c_1}_{b_1a_1} X_{c_1}, \\ (X_{a_1}, X_{b_2}) &= C^{c_1}_{b_2a_1} X_{c_1} + C^{c_2}_{b_2a_1} X_{c_2} = - C^{a_1}_{b_2c_1} X_{c_1} + C^{c_2}_{b_2a_1} X_{c_2}, \\ (X_{a_2}, X_{b_2}) &= C^{c_1}_{b_2a_2} X_{c_1} + C^{c_2}_{b_2a_2} X_{c_2}. \end{aligned} \tag{20}$$

Din (20) rezultă că operatorii $X_1, \ldots, X_p$ formează un subgrup cu p parametri al grupului G_n și

$$\frac{\partial(X_{a_1}, X_{b_2})}{\partial X_{c_1}} + \frac{\partial(X_{c_1}, X_{b_2})}{\partial X_{a_1}} = 0. \tag{21}$$

Deci putem enunța

Teorema 3. *Condiția necesară și suficientă ca distribuția P să fie plană este ca operatorii $X_1, X_2, \ldots, X_p$ să determine un subgrup H_p, cu p parametri, al grupului G_n și în plus operatorii acestui grup să verifice condiția* (21).

Scriind ecuațiile de structură ale grupului G_n în condițiile (19') vom obține o teoremă analogă.

Teorema 4. *Condiția necesară și suficientă ca distribuția Q să fie plană este ca operatorii $X_{p+1}, \ldots, X_n$ să determine un subgrup H_q cu q parametri al grupului G_n și în plus operatorii acestui grup să verifice condiția*

$$\frac{\partial(X_{a_1}, X_{b_2})}{\partial X_{c_2}} + \frac{\partial(X_{a_1}, X_{c_2})}{\partial X_{b_2}} = 0.$$

Observație. Dacă distribuția P (respectiv Q) este plană atunci ea este și integrabilă. Reciproca nu este totdeauna adevărată.

§ 3. Derivata Lie a tensorului metric g_{ij} în raport cu vectorii λ_α e dată de

$$\underset{(\lambda_\alpha)}{\mathcal{L}}\, g_{ij} = \lambda^\gamma_i \lambda^\beta_j \left(C^\beta_{\alpha\gamma} + C^\gamma_{\alpha\beta}\right). \tag{22}$$

Anularea acestei derivate atrage $C^\beta_{\alpha\gamma} + C^\gamma_{\alpha\beta} = 0$.

Deci grupul G_n este grup de mișcări al spațiului V_n în raport cu metrica (4), dacă și numai dacă constantele lui de structură sînt antisimetrice în toți indicii.

În particular, dacă G_n este abelian sau ortogonal atunci el este grup de mișcări al spațiului V_n.

§ 4. Presupunem că vectorii $\lambda_{a_1} (a_1 = 1, \ldots, p)$ ai reperului adaptat se transportă prin paralelism în raport cu conexiunea $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$.

Vom avea

$$d\lambda^\alpha_{a_1} + \omega^\alpha_\beta \lambda^\beta_{a_1} = 0; \tag{23}$$

dar $\lambda^\alpha_{a_1} = \delta^\alpha_{a_2}$ și (23) atrage

$$\omega^\alpha_{a_1} = 0, \text{ adică } \Gamma^\alpha_{\beta a_1} = 0. \tag{24}$$

Deci condiția necesară și suficientă ca vectorii λ_{a_1} să se transporte prin paralelism în raport cu conexiunea Γ e dată de

$$\Gamma^\alpha_{\beta a_1} = 0. \tag{24'}$$

(24') atrage

$$C^{a_1}_{\alpha\beta} = 0, \quad C^\alpha_{a_1\beta} + C^\beta_{a_1\alpha} = 0 \tag{25}$$

sau, pe larg

$$C^{a_1}_{b_1c_1} = 0, \quad C^{a_1}_{b_1c_2} = 0, \quad C^{a_1}_{b_2c_2} = 0, \quad C^{c_2}_{a_1b_1} = 0, \quad C^{c_2}_{a_1b_2} + C^{b_2}_{a_1c_2} = 0. \tag{25'}$$

În condițiile (25), ecuațiile de structură a grupului G_n capătă forma:

$$(26)\qquad (X_{a_1}, X_{b_1}) = 0,\ (X_{a_1}, X_{b_2}) = C^{c_2}_{b_2a_1} X_{c_2},\ (X_{a_2}, X_{b_2}) = C^{c_2}_{b_2a_2} X_{c_2}$$

iar din (22) rezultă

$$(27)\qquad \underset{(\lambda_{a_2})}{\mathfrak{L}}\, g_{ij} = 0.$$

Din (26) rezultă că operatorii $X_1, \ldots, X_p$, determină un subgrup abelian A_p cu p parametri, iar operatorii $X_{p+1}, \ldots, X_n$ determină un subgrup invariant N_q cu q parametri al grupului G_n și acest grup poate fi scris sub forma:

$$(28)\qquad G_n = A_n \overline{\times} N_q \text{ (produs semidirect).}$$

Condiția (27) exprimă că subgrupul abelian A_p este grup de mișcări în raport cu metrica g. Putem enunța

Teorema 5. *Condiția necesară și suficientă ca vectorii λ_{a_2} să se transporte prin paralelism în raport cu conexiunea Γ ($\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$) este ca grupul G_n să se descompună într-un produs semidirect de forma*

$$G_n = A_p \overline{\times} N_q \qquad \begin{array}{l} A_p = \text{subgrup abelian} \\ N_q = \text{subgrup invariant,} \end{array}$$

subgrupul abelian A fiind grup de mișcări în raport cu metrica g.

Presupunem acum că vectorii λ_{a_2} se transportă prin paralelism în raport cu conexiunea $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$. Aceasta atrage

$$(29)\qquad \Gamma^\alpha_{\beta a_2} = 0 \text{ sau } (29')\ C^{a_2}_{\alpha\beta} = 0,\ C^\alpha_{a_2\beta} + C^\beta_{a_2\alpha} = 0.$$

În acest caz grupul G_n are următoarele ecuații de structură:

$$(30)\qquad (X_{a_1}, X_{b_1}) = C^{c_1}_{b_1a_1} X_{c_1},\ (X_{a_1}, X_{b_2}) = C^{c_1}_{b_2a_1} X_{c_1},\ (X_{a_2}, X_{b_2}) = 0$$

și

$$\underset{(\lambda_{a_2})}{\mathfrak{L}}\, g_{ij} = 0.$$

Deci

$$(31)\qquad G_n = N_p \overline{\times} A_q$$

unde N_p este subgrup invariant cu p parametri și A_q este subgrup abelian cu q parametri și grup de mișcări în raport cu metrica g. Obținem o teoremă analogă cu teorema 5:

Teorema 6. *Condiția necesară și suficientă ca vectorii λ_{a_1} să se transporte prin paralelism în raport cu conexiunea Γ($\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$) este ca grupul G_n să se descompună într-un produs semidirect de forma*

$$G_n = N_p \overline{\times} A_q \ (A_q = \text{subgrup abelian},\ N_p = \text{subgrup invariant}).$$

subgrupul abelian A_q fiind grup de mișcări în raport cu metrica g.

Observație. Vectorii λ_α se transportă prin paralelism în raport cu conexiunea $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ dacă și numai dacă G_n este abelian.

§ 5. Tensorul φ^i_j corespunzător operatorului liniar al structurii aproape-produs e dat de (5). Printr-un calcul simplu, obținem că derivata Lie a acestui tensor în raport cu vectorii λ_α e dată de

$$(31)\qquad \underset{(\lambda_\alpha)}{\mathfrak{L}}\, \varphi^i_j = 2(C^{c_2}_{a_1\alpha} \lambda^i_{c_2} \lambda^{a_1}_j - C^{a_1}_{c_2\alpha} \lambda^i_{a_1} \lambda^{c_2}_j).$$

Anularea acestei derivate atrage

$$(32)\qquad C^{c_2}_{a_1\alpha} \lambda^i_{c_2} \lambda^{a_1}_j - C^{a_1}_{c_2\alpha} \lambda^i_{a_1} \lambda^{c_2}_j = 0.$$

Înmulțind (32) cu $\lambda^{b_2}_j$, apoi cu $\lambda^i_{b_1}$ obținem $C^{c_2}_{a_1\alpha} = 0$. La fel se obține $C^{a_1}_{c_2\alpha} = 0$.

Deci condiția necesară și suficientă ca $\underset{(\lambda_\alpha)}{\mathfrak{L}}\, \varphi^i_j = 0$ e dată de

$$(33)\qquad C^{c_2}_{a_1\alpha} = C^{a_1}_{c_2\alpha} = 0.$$

În acest caz ecuațiile de structură a grupului G_n devin:

$$(34)\qquad (X_{a_1}, X_{b_1}) = C^{c_1}_{b_1a_1} X_{c_1},\ (X_{a_1}, X_{b_2}) = 0,\ (X_{a_2}, X_{b_2}) = C^{c_2}_{b_2a_2} X_{c_2}.$$

Din (34) rezultă că operatorii $X_1, X_2, \ldots, X_p$ formează un subgrup invariant N_p cu p parametri, iar operatorii $X_{p+1}, \ldots, X_n$ formează un subgrup invariant N_q cu q parametri și G_n e de forma:

$$(35)\qquad G_n = N_p \times N_q \text{ (produs direct).}$$

Avem

Teorema 7. *Tensorul structurii aproape-produs φ^i_j este invariant în raport cu grupul G_n dacă și numai dacă G_n este de forma* (35).

Să arătăm că în acest caz conexiunea Γ este complet reductibilă. Conexiunea Γ se numește complet reductibilă dacă diferențiala covariantă a tensorului structurii aproape-produs în raport cu această conexiune este nulă [1]. Dacă notăm prin φ^α_β componentele tensorului φ^i_j față de reperul adoptat avem ([2], p. 234):

$$\varphi^{a_1}_{b_1} = \delta^{a_1}_{b_1},\ \varphi^{a_1}_{b_2} = \varphi^{a_2}_{b_1} = 0,\ \varphi^{a_2}_{b_2} = -\delta^{a_2}_{b_2}$$

$$(36)\qquad \nabla\varphi^\alpha_\beta = 0 \text{ atrage } (37)\ \Gamma^{a_1}_{\alpha b_2} = \Gamma^{a_2}_{\alpha b_1} = 0 \text{ și reciproc.}$$

Condițiile (33) atrag condițiile (37). Deci dacă grupul G_n este de forma (35), conexiunea Γ este complet reductibilă. Reciproca nu este totdeauna adevărată.

Observație. Analizînd structura grupului G obținută în cele patru cazuri (I, II, IV, V), observăm că ultimele trei sînt subordonate cazului I. Mai mult chiar, între cele patru cazuri avem următoarele relații de inclu-

ziune : I ⊃ II ⊃ IV ⊃ V. O consecinţă importantă care rezultă din această observaţie este următoarea : dacă tensorul structurii aproape-produs este invariant în raport cu grupul G_n atunci structura aproape-produs este integrabilă.

BIBLIOGRAFIE

1. Vamanu E. — *Despre structuri aproape-produs şi conexiuni liniare complet reductibile asociate*. An. şt. Univ. Iaşi, s. I. T. XIII, f. 2, 1967, p. 393—400.
2. Yano Kentaro — *Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces*. Pergamon Press, 1965.

SUR LES ESPACES A STRUCTURE PRESQUE-PRODUIT QUI ADMETTENT UN GROUPE SIMPLEMENT TRANSITIF

Résumé

Sur un espace à structure presque-produit V_n on peut considérer des repères adaptés à cette structure. On suppose que V_n est doté avec une métrique riemannienne et que les vecteurs du repère adapté déterminent un groupe simplement transitif d'ordre n.

On étudie différentes propriétés structurales de ce groupe à l'aide de certaines propriétés des deux distributions de l'espace tangent à V_n.

SPAŢII RIEMANN DOTATE CU O ANUMITĂ STRUCTURĂ APROAPE-PRODUS

DE

ELENA VAMANU

Fie V_n un spaţiu Riemann, g o metrică a acestui spaţiu şi v un cîmp de vectori pe V_n. Presupunem că într-o vecinătate de coordonate (U, x^i) componentele vectorului v şi ale tensorului metric g satisfac condiţiile :

$$\nabla_i v^k \nabla_j v^l g_{kl} = g_{ij}\,, \tag{1}$$

$$\nabla_i v_j - \nabla_j v_i = 0\,, \tag{2}$$

unde ∇ este simbolul diferenţierii covariante în raport cu conexiunea dată de simbolii lui Christoffel.

Notînd

$$\varphi^i_j = \nabla_j v^i, \tag{3}$$

se verifică uşor că $\varphi^i_j \varphi^j_l = \delta^i_l$, deci tensorul φ^i_j defineşte pe V_n o structură aproape-produs.

Observaţie. Condiţia (2) este echivalentă cu faptul că v este un gradient.

În Nota de faţă ne propunem să studiem unele proprietăţi ale spaţiului riemannian V_n dotat cu o structură aproape-produs definită de tensorul $\varphi^i_j = \nabla_j v^i$.

Tensorului φ^i_j îi putem asocia tensorul covariant φ_{ij} dat de

$$\varphi_{ij} = \varphi^l_i g_{lj}\,. \tag{4}$$

Din (2) şi (3) rezultă

$$\varphi_{ij} = \nabla_i v_j \quad \text{şi} \quad \varphi_{ij} = \varphi_{ji}\,. \tag{5}$$