ziune : I ⊃ II ⊃ IV ⊃ V. O consecinţă importantă care rezultă din această observaţie este următoarea : dacă tensorul structurii aproape-produs este invariant în raport cu grupul G_n atunci structura aproape-produs este integrabilă.

BIBLIOGRAFIE

1. Vamanu E. — *Despre structuri aproape-produs şi conexiuni liniare complet reductibile asociate*. An. şt. Univ. Iaşi, s. I, T. XIII, f. 2, 1967, p. 393—400.
2. Yano Kentaro — *Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces*. Pergamon Press, 1965.

SUR LES ESPACES A STRUCTURE PRESQUE-PRODUIT QUI ADMETTENT UN GROUPE SIMPLEMENT TRANSITIF

Résumé

Sur un espace à structure presque-produit V_n on peut considérer des repères adaptés à cette structure. On suppose que V_n est doté avec une métrique riemannienne et que les vecteurs du repère adapté déterminent un groupe simplement transitif d'ordre n.

On étudie différentes propriétés structurales de ce groupe à l'aide de certaines propriétés des deux distributions de l'espace tangent à V_n.

SPAŢII RIEMANN DOTATE CU O ANUMITĂ STRUCTURĂ APROAPE-PRODUS

DE

ELENA VAMANU

Fie V_n un spaţiu Riemann, g o metrică a acestui spaţiu şi v un cîmp de vectori pe V_n. Presupunem că într-o vecinătate de coordonate (U, x^i) componentele vectorului v şi ale tensorului metric g satisfac condiţiile :

$$\nabla_i v^k \nabla_j v^l g_{kl} = g_{ij} , \tag{1}$$

$$\nabla_i v_j - \nabla_j v_i = 0 , \tag{2}$$

unde ∇ este simbolul diferenţierii covariante în raport cu conexiunea dată de simbolii lui Christoffel.

Notînd

$$\varphi_j^i = \nabla_j v^i , \tag{3}$$

se verifică uşor că $\varphi_j^i \varphi_l^j = \delta_l^i$, deci tensorul φ_j^i defineşte pe V_n o structură aproape-produs.

Observaţie. Condiţia (2) este echivalentă cu faptul că v este un gradient.

În Nota de faţă ne propunem să studiem unele proprietăţi ale spaţiului riemannian V_n dotat cu o structură aproape-produs definită de tensorul $\varphi_j^i = \nabla_j v^i$.

Tensorului φ_j^i îi putem asocia tensorul covariant φ_{ij} dat de

$$\varphi_{ij} = \varphi_i^l g_{lj} . \tag{4}$$

Din (2) şi (3) rezultă

$$\varphi_{ij} = \nabla_i v_j \quad \text{şi} \quad \varphi_{ij} = \varphi_{ji} . \tag{5}$$

Să demonstrăm acum următorul rezultat: Într-un spațiu Riemann V_n, în care tensorul $\nabla_j v^i$ determină o structură aproape-produs, gradientul v nu poate avea lungimea constantă.

Presupunem că lungimea vectorului v ar fi constantă, deci $v_i v^i = \text{const.}$; diferențiind, obținem

$$(\nabla_k v^i) v_i + v^i (\nabla_k v_i) = 2(\nabla_k v^i) v_i = 0.$$

Cum $\nabla_k v^i = \varphi^i_k$ obținem:

$$\varphi^i_k v_i = 0. \tag{6}$$

Dar $\det(\varphi^i_k) = \pm 1$, de unde rezultă că (6) nu poate avea loc, deci lungimea vectorului v nu poate fi constantă.

Fie v_1 și v_2 două cîmpuri de vectori pe V_n ortogonale pe cîmpul v dat. Să arătăm că și cîmpul croșet $[v_1, v_2]$ este ortogonal pe v. În adevăr, avem:

$$[v_1, v_2]^i v_i = (v^k_1 \nabla_k v^i_2 - v^k_2 \nabla_k v^i_1) v_i = - v^k_1 v^i_2 \nabla_k v_i + v^k_2 v^i_1 \nabla_k v_i =$$
$$= v^i_1 v^k_2 (\nabla_k v_i - \nabla_i v_k) = 0.$$

Din această observație rezultă că, dacă luăm mulțimea tuturor vectorilor coliniari cu v pe de o parte și mulțimea vectorilor ortogonali pe v pe de altă parte, în fiecare punct $x \in V_n$ obținem două subspații ale spațiului tangent, ortogonale și complementare de dimensiune 1 și respectiv $n-1$. Deci obținem pe V_n o structură aproape-produs particulară, indusă tot de cîmpul de vectori v și studiată de I. Cattaneo-Gasparini în [1].

Structura aproape-produs determinată de tensorul $\nabla_j v^i$ este mai generală. Notăm

$$l = g_{ij} v^i v^j = v^i v_i. \tag{7}$$

Din (7) rezultă

$$\frac{\partial l}{\partial x^k} v^k = \frac{\partial}{\partial x^k} (v^i v_i) v^k = 2\varphi^i_k v_i v^k = 2\varphi_{ik} v^i v^k = 2 g_{kl} v^k \varphi^l_m v^m. \tag{8}$$

În (8) distingem cazurile

I. $$\frac{\partial l}{\partial x^k} v^k = 0, \quad \text{deci } g_{kl} v^k \varphi^l_m v^m = 0,$$

ceea ce înseamnă că vectorul v și transformatul lui prin φ (operatorul structurii aproape-produs) sînt ortogonali.

Să dăm și o altă interpretare acestei condiții.

V_n avînd o structură aproape-produs, spațiul tangent la V_n în fiecare punct poate fi considerat ca sumă directă de două subspații complementare P și Q. Orice vector al spațiului tangent, în particular v, se va scrie sub forma

$$v = v_1 + v_2, \quad \text{cu } v_1 \in P, \quad v_2 \in Q, \text{ sau} \tag{9}$$

$$v^i = P^i_j v^j + Q^i_j v^j, \text{ unde } P^i_j v^j = v^i_1, \; Q^i_j v^j = v^i_2, \tag{9'}$$

$$P^i_j = \frac{1}{2}(\delta^i_j + \varphi^i_j), \; Q^i_j = \frac{1}{2}(\delta^i_j - \varphi^i_j).$$

P^i_j și Q^i_j fiind tensorii-proiecție corespunzători celor două subspații.

Să calculăm lungimile vectorilor v_1 și v_2. Avem:

$$l_1 = g_{ij} v^i_1 v^j_1 = g_{ij} P^i_k P^j_m v^k v^m = \frac{1}{2} g_{ij} v^i v^j + \frac{1}{2} g_{ik} \varphi^i_m v^m v^k =$$
$$= \frac{1}{2} l + \frac{1}{2} g_{ik} \varphi^i_m v^m v^k \tag{10}$$

și respectiv

$$l_2 = g_{ij} v^i_2 v^j_2 = g_{ij} Q^i_k Q^j_m v^k v^m =$$
$$= \frac{1}{2} g_{ij} v^i v^j - \frac{1}{2} g_{ik} \varphi^i_m v^m v^k = \frac{1}{2} l - \frac{1}{2} g_{ik} \varphi^i_m v^m v^k. \tag{10'}$$

Din (10) și (10') rezultă

$$l_1 + l_2 = l,$$
$$l_1 - l_2 = g_{ik} \varphi^i_m v^m v^k. \tag{11}$$

Deci vectorul v este ortogonal pe transformatul lui prin operatorul φ, dacă și numai dacă vectorii induși de v prin operatorii proiecție pe cele două subspații, au aceeași lungime.

Fie

$$y^i = f^i(x^j) \tag{12}$$

o schimbare de coordonate pe V_n. Notăm cu u^i și respectiv G_{ij} componentele vectorului v și ale tensorului metric fundamental în acest sistem. Alegem funcțiile $f^2, f^3, \ldots, f^n$ soluții independente ale ecuației $(\partial\varphi/\partial x^i) v^i = 0$, iar f^1 o soluție a ecuației $(\partial\varphi/\partial x^i) v^i = 1$, atunci $\det(\partial f^i/\partial x^j) \neq 0$ și în sistemul de coordonate y^i definit de (12) cu f^i astfel alese, componentele vectorului v vor fi $(1, 0, \ldots, 0)$ deci

$$u^i = \delta^i_1. \tag{13}$$

Deoarece sîntem în cazul $(\partial l/\partial x^i) v^i = 0$, putem lua, de exemplu,

$$f^n = l = v_i v^i. \tag{14}$$

Din (14) rezultă

(15) $$v^i v_i = u^i u_i = G_{ij} u^i u^j = G_{11} = y^n.$$

Componentele covariante ale vectorului u vor fi date de

(16) $$u_i = G_{ij} u^j = G_{i1}.$$

Cum vectorul u este un gradient, $\nabla_j u_i = \nabla_i u_j$; de aici rezultă

(17) $$\partial_j G_{i1} - \partial_i G_{j1} = 0.$$

În (17) distingem cazurile

a) $i = 1$, $j = n$ care dă $\partial_n G_{11} - \partial_1 G_{1n} = 0$, deci $\partial_1 G_{1n} = 1$,

de unde rezultă

(18) $$G_{1n} = y^1 + h_n(y^2, \ldots, y^n).$$

b) $i = 1$, $j = \alpha'$; $\alpha' = 2, \ldots, n-1$

$\partial_{\alpha'} G_{11} - \partial_1 G_{1\alpha'} = 0$, deci $\partial_1 G_{1\alpha'} = 0$, de unde rezultă

(19) $$G_{1\alpha'} = h_{\alpha'}(y^2, \ldots, y^n)$$

c) $i = n$, $j = \alpha'$ $\partial_{\alpha'} G_{1n} - \partial_n G_{1\alpha'} = 0$, care dă

(20) $$\partial_{\alpha'} h_n - \partial_n h_{\alpha'} = 0.$$

d) $i = \alpha'$, $j = \beta'$.

$$\partial_{\beta'} G_{1\alpha'} - \partial_{\alpha'} G_{1\beta'} = 0 \text{ sau}$$

(21) $$\partial_{\beta'} h_{\alpha'} - \partial_{\alpha'} h_{\beta'} = 0.$$

Din (20) și (21) rezultă

(22) $$h_\alpha = \frac{\partial f}{\partial y^\alpha} \text{ cu } \alpha = 2, \ldots, n.$$

Ținînd cont de (22) obținem:

(23) $$G_{11} = y^n,\ G_{1n} = y^1 + \frac{\partial f(y^2, \ldots y^n)}{\partial y^n},\ G_{1\alpha'} = \frac{\partial f(y^2, \ldots, y^n)}{\partial y^{\alpha'}}.$$

Deci am asociat gradientului v un sistem de coordonate în care acesta are componentele $(1, 0, \ldots, 0)$, iar componentele G_{1i} ale tensorului fundamental sînt date de (23).

Metrica spațiului în sistemul considerat capătă forma:

(24) $$ds^2 = y^n (dy^1)^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial y^{\alpha'}} (y^2, \ldots, y^n) dy^1 dy^{\alpha'} +$$

$$+ 2\left(y^1 + \frac{\partial f}{\partial y^n}(y^2, \ldots, y^n)\right) dy^1 dy^n + G_{\alpha\beta}(y^1, \ldots, y^n) dy^\alpha dy^\beta.$$

Reciproc, dacă un spațiu Riemann V_n admite un sistem de coordonate y^i în care metrica spațiului e de forma (24), atunci vectorul u de componente $u^i = \delta^i_1$ în acest sistem este gradient și pătratul lungimii lui este y^n. Vom numi un astfel de sistem de coordonate asociat vectorului v, sistem de coordonate de tip I. Evident, acest sistem nu este unic. În adevăr, dacă y^i este un sistem de coordonate de tip I, atunci $\tilde{y}^i$ dat de

(25) $$\tilde{y}^1 = y^1,$$
$$\tilde{y}^{\alpha'} = p^{\alpha'}(y^2, \ldots, y^{n-1}) \quad (\alpha' = 2, \ldots, n-1),$$
$$\tilde{y}^n = y^n,$$

cu $\det(\partial p^{\alpha'} / \partial y^{\beta'}) \neq 0$, este tot un sistem de coordonate de tip I.

Într-un sistem de coordonate de tip I tensorul structurii aproape-produs φ^i_j este dat de

(26) $$\varphi^i_j = \nabla_j u^i = \Gamma^i_{j1} = \frac{1}{2} G^{il} (\partial_1 G_{jl} - \partial_l G_{j1} + \partial_j G_{1l}) = \frac{1}{2} G^{il} \partial_1 G_{lj}$$

iar tensorul covariant φ_{ij} este dat de

(27) $$\varphi_{ij} = \nabla_i u_j = G_{il} \varphi^l_j = G_{il} \Gamma^l_{j1} = [i, j1] = \frac{1}{2} \partial_1 G_{ij}$$

$[i, j1]$ fiind simbolii lui Christoffel de specia I.

Deoarece φ^i_j satisface (1), vom avea

$$G_{ij} = \varphi^k_i \varphi^m_j G_{km} = \Gamma^k_{i1} \Gamma^m_{j1} G_{km} = \frac{1}{4} G^{kn} G^{lm} \partial_1 G_{kl} \partial_1 G_{mj} G_{nl} =$$

$$= \frac{1}{4} G^{lm} \partial_1 G_{il} \partial_1 G_{jm}.$$

Deci

(28) $$G_{ij} = \frac{1}{4} G^{lm} \partial_1 G_{il} \partial_1 G_{jm}$$

sau, pe larg,

$$G^{nn} = 4 y^n,$$

$$G_{1\alpha'} = y^n \partial_1 G_{n\alpha'} + \frac{1}{4} G^{n\beta'} \partial_1 G_{\alpha'\beta'}$$

$$G_{1n} = y^n \partial_1 G_{n\alpha'} + \frac{1}{4}(G^{1n} + G^{n\alpha'} \partial_1 G_{nn'}),$$

(29)
$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}[G^{11} \delta^n_\alpha \delta^n_\beta + G^{1\rho'}(\delta^n_\alpha \partial_1 G_{\rho'\beta} + \delta^n_\beta \partial_1 G_{\alpha\rho'}) +$$
$$+ G^{1n}(\delta^n_\alpha \partial_1 G_{n\beta} + \delta^n_\beta \partial_1 G_{n\alpha}) + G^{\rho'\delta'} \partial_1 G_{\alpha\rho'} \partial_1 G_{\beta\delta'} +$$
$$+ G^{n\rho'}(\partial_1 G_{\alpha\rho'} \partial_1 G_{\beta n} + \partial_1 G_{\alpha n} \partial_1 G_{\beta\rho'}) + 4y^n \partial_1 G_{\alpha n} \partial_1 G_{\beta n}].$$

Din cele de mai sus rezultă că dacă, în sistemul considerat, tensorul φ^i_j satisface (1) atunci componentele tensorului fundamental al spațiului Riemann satisfac condițiile (29).

Reciproc, dacă într-un sistem de coordonate de tip I, componentele tensorului fundamental al spațiului satisfac condițiile (29), atunci tensorul $\varphi^i_j = \nabla_j u^i$ verifică (1).

Putem enunța următoarea

Teoremă. *Dat un cîmp de vectori-gradient* u *pe un spațiu Riemann* V_n, *condiția necesară și suficientă ca tensorul* $\nabla_j u^i$ *să determine o structură aproape-produs pe acest spațiu este ca să fie îndeplinite următoarele condiții:*

a) *să existe un sistem de coordonate de tip I,*

b) *tensorul metric fundamental al spațiului* V_n *să verifice în acest sistem condițiile* (29).

Un alt caz care rezultă din (8) este:

II. $\dfrac{\partial l}{\partial x^k} v^k \neq 0$, deci $2\varphi_{ij} v^i v^j = 2g_{im} v^i \varphi^m_j v^j \neq 0$.

„Normăm" coordonatele vectorului v așa fel ca

(30)
$$\varphi_{ij} v^i v^j = g_{im} v^i \varphi^m_j v^j = 1.$$

Să alegem și în acest caz un sistem de coordonate convenabil.

Fie $y^i = f^i(x^j)$ o schimbare de coordonate pe V_n; notăm ca mai sus cu u^i respectiv G_{ij} componentele vectorului v și ale tensorului metric fundamental g_{ij} în acest sistem.

Alegem $f^1 = l/2$, unde l este pătratul lungimii vectorului v, iar $f^2, f^3, \ldots, f^n$ soluții independente ale ecuației $(\partial\varphi/\partial x^i) v^i = 0$, cu condiția $|\partial f^i/\partial x^j| \neq 0$. Astfel, schimbarea de coordonate va fi de forma:

(31)
$$y^1 = \frac{l}{2}(x^1, \ldots, x^n), \qquad y^\alpha = f^\alpha(x^1, \ldots, x^n), \qquad \text{cu } \left|\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right| \neq 0 \text{ și } \alpha = 2, \ldots, n.$$

Deoarece $(\partial f^1/\partial x^j) v^j = \frac{1}{2}(\partial l/\partial x^j) v^j = 1$ și $(\partial f^\alpha/\partial x^j) v^j = 0$, în acest sistem avem:

(32)
$$u^i = \delta^i_1, \text{ iar } u_i = G_{ij} u^j = G_{i1},$$

(33)
$$l = v_i v^i = u_i u^i = G_{ij} u^i u^j = G_{11} = 2y^1.$$

Cum vectorul u este gradient, vom avea

(34)
$$\partial_j G_{i1} - \partial_i G_{j1} = 0.$$

Luînd în (34) $i = 1$, $j = \alpha$ obținem $\partial_1 G_{1\alpha} = 0$ iar pentru $i = \alpha$, $j = \beta$ obținem $\partial_\beta G_{1\alpha} - \partial_\alpha G_{1\beta} = 0$.

Deci, în sistemul de coordonate astfel ales, avem

(35)
$$u^i = \delta^i_1, \; G_{11} = 2y^1, \; G_{1\alpha} = \frac{\partial f(y^2, \ldots, y^n)}{\partial y^\alpha} \; (\alpha = 2, \ldots, n),$$

f fiind o funcție arbitrară de $y^2, \ldots, y^n$.

Metrica spațiului devine

(36)
$$ds^2 = 2y^1 (dy^1)^2 + 2\frac{\partial f}{\partial y^\alpha}(y^2, \ldots, y^n) dy^1 dy^\alpha +$$
$$+ G_{\alpha\beta}(y^1, y^2, \ldots, y^n) dy^\alpha dy^\beta.$$

În concluzie, dacă spațiul Riemann V_n admite un cîmp de vectori gradient v de lungime neconstantă ale cărui coordonate satisfac condiția de normare (30), atunci există un sistem de coordonate de forma (31) în care componentele u^i ale vectorului și componentele G_{ij} ale tensorului metric satisfac relațiile (35). Reciproc, dacă spațiul Riemann V_n admite un sistem de coordonate y^i în care metrica spațiului este de forma (36) atunci vectorul u de componente δ^i_1 în acest sistem este un gradient și pătratul lungimii lui este $2y^1$. Vom numi acest sistem de coordonate asociat vectorului v sistem de coordonate de tip II. Nici acest sistem nu este unic. Dacă y^i este un sistem de coordonate de tip II, atunci $\tilde{y}^i$, dat de

(37)
$$\tilde{y}^1 = y^1, \qquad \tilde{y}^\alpha = p^\alpha(y^2, \ldots, y^n), \text{ cu } \det\left(\frac{\partial p^\alpha}{\partial y^\beta}\right) \neq 0 \; (\alpha, \beta = 2, \ldots, n),$$

este tot un sistem de coordonate de tip II.

Tensorul φ^i_j este dat de

(38)
$$\varphi^i_j = \nabla_j u^i = \Gamma^i_{j1} = \frac{1}{2} G^{im} \partial_1 G_{mj}.$$

Deoarece φ^i_j satisface (1), avem

(39)
$$G_{ij} = \frac{1}{4} G^{lm} \partial_1 G_{il} \partial_1 G_{jm}$$

sau, pe larg,

$$G_{11} = G^{11} = 2v^1,$$

(39'.) $$G_{1\alpha} = \frac{1}{2} G^{1\beta} \partial_1 G_{\alpha\beta},$$

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} G^{\gamma\delta} \partial_1 G_{\alpha\gamma} \partial_1 G_{\beta\delta}, \quad (\alpha, \beta, \gamma, \ldots = 2, \ldots, n).$$

Putem enunța și aici

Teorema: *Dat un cîmp de vectori gradient u pe un spațiu Riemann V_n, condiția necesară și suficientă ca tensorul $\nabla_j u^i$ să determine o structură aproape-produs pe acest spațiu este ca să fie îndeplinite condițiile:*

a) *să existe un sistem de coordonate de tip II, asociat vectorului u.*

b) *tensorul metric fundamental al spațiului V_n să verifice în acest sistem relațiile* (39').

În continuare, vom prezenta cîteva rezultate valabile în sisteme de coordonate de tip I sau II.

Fie v_1 și v_2 doi vectori oarecare aparținînd distribuției P, deci

(40) $$P^i_j v^j_1 = v^i_1, \quad P^i_j v^j_2 = v^i.$$

Croșetul $[v_1, v_2]$ are componentele

(41) $$[v_1, v_2]^i = v^k_1 \nabla_k v^i_2 - v^k_2 \nabla_k v^i_1.$$

Să vedem în ce condiții vectorul $[v_1, v_2]$ aparține tot distribuției P. Avem

$$P^i_j [v_1, v_2]^j = [v_1, v_2]^i + (\nabla_k P^i_j - \nabla_j P^i_k) v^j_1 v^k_2.$$

Vectorul $[v_1, v_2]$ aparține distribuției P dacă și numai dacă

(42) $$(\nabla_k P^i_j - \nabla_j P^i_k) v^j_1 v^k_2 = 0$$

oricare ar fi v_1, v_2 ce verifică (40), deci dacă avem

(43) $$(\nabla_k P^i_j - \nabla_j P^i_k) P^j_l P^k_m = 0.$$

Dar $P^i_j = (1/2)(\delta^i_j + \varphi^i_j)$ iar $\varphi^i_j = \Gamma^i_{j1}$. Înlocuind, obținem

(44) $$R^i_{1jk} P^j_l P^k_m = 0,$$

Putem enunța

Teorema: *Condiția necesară și suficientă ca distribuția P să fie integrabilă este ca componentele R^i_{1jk} ale tensorului de curbură a spațiului să satisfacă* (44).

O teoremă analogă obținem și pentru distribuția Q.

Teorema: *Condiția necesară și suficientă ca distribuția Q să fie integrabilă este ca componentele R^i_{1jk} ale tensorului de curbură a spațiului V_n să verifice condiția*

(45) $$R^i_{1jk} Q^j_l Q^k_m = 0.$$

Din cele două teoreme de mai sus rezultă o caracterizare a structurii aproape-produs integrabile. Structura aproape-produs este integrabilă dacă cele două distribuții P și Q sînt integrabile, deci dacă avem

$$R^i_{1jk} P^j_l P^k_m = 0 \quad \text{și} \quad R^i_{1jk} Q^j_l Q^k_m = 0,$$

de unde rezultă

(46) $$R^i_{1jk} \Phi^{jk}_{lm} = 0$$

($\Phi^{jk}_{lm} = (1/2)(\delta^j_l \delta^k_m + \varphi^j_l \varphi^k_m)$ — tensor cunoscut în spațiile cu structură aproape-produs).

(46) ne dau o condiție necesară și suficientă pentru integrabilitatea structurii aproape-produs.

Într-un sistem de coordonate de tip I și II avem

(47) $$\underset{(u)}{\mathcal{L}} \Gamma^i_{jk} = \partial_1 \Gamma^i_{jk} \quad (\mathcal{L} = \text{operatorul derivatei Lie})$$

și

(48) $$R^i_{j1k} = \nabla_k \varphi^i_j - \partial_1 \Gamma^i_{jk}.$$

Dacă $\partial_1 \Gamma^i_{jk} = 0$, vectorul u determină o coliniație afină, iar dacă $\nabla_k \varphi^i_j = 0$, conexiunea Γ este complet reductibilă [2].

Din (47) și (48) rezultă următoarea

Teoremă. *Dacă două din următoarele condiții sînt adevărate, atunci este adevărată și a treia:*

a) *vectorul u determină o coliniație afină:*

b) *conexiunea Γ^i_{jk} este complet reductibilă;*

c) $R^i_{j1k} = 0$.

Considerăm divergența vectorului u; avem

(49) $$\operatorname{div} u = \nabla_i u^i = \varphi^i_i = \Gamma^i_{i1} = \frac{\partial \ln \sqrt{G}}{\partial y^1}, \quad \textit{unde } G = \det (G_{ij}).$$

Din (49) rezultă că div $u = 0$ atrage $\partial G / \partial y^1 = 0$. Deci putem enunța

Teorema: *Condiția necesară și suficientă ca vectorul u să aibă divergența nulă este ca determinantul matricei G_{ij} să nu depindă de variabila y^1.*

BIBLIOGRAFIE

1. Cattaneo-Gasparini I. — *Connessioni adattate a una struttura quasi prodotto.* Annali di Matematica pura ed applicata, vol. 63, 1963, pp. 133—149.
2. Vamanu E. — *Despre structuri aproape-produs și conexiuni liniare complet reductibile asociate.* An. șt. Univ. Iași, Matematică, t. XIII, 1967, f. 2, p. 393—400.
3. Yano Kentaro — *Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces.* Pergamon Press, 1965, pp. 234—254.

ESPACES DE RIEMANN DOUÉS D'UNE CERTAINE STRUCTURE PRESQUE-PRODUIT

Résumé

On peut associer à un champ de vecteurs v sur un espace de Riemann V_n, une structure presque-produit définie par le tenseur $\tau_j^i = \nabla_j v^i$ si on satisfait aux conditions

$$\nabla_i v^k \nabla_j v^l g_{kl} = g_{ij},$$

$$\nabla_i v_j - \nabla_j v_i = 0,$$

où g_{ij} est le tenseur métrique de l'espace et ∇ l'opérateur de différentiation covariante par rapport à la connexion donnée par les symboles de Christoffel.

Dans cette Note, on étudie certaines propriétés de l'espace V_n doué de cette structure presque-produit en utilisant des systèmes de coordonnées associés au champ v.

CONNEXIONS INDUITES ET STRUCTURES PRESQUE-PRODUIT ASSOCIÉES

PAR

C. APREUTESEI

Nous allons considérer dans cette Note quelques propriétés des structures presque-produit associées aux connexions sur un espace fibré principal différentiable.

1. Questions préliminaires

Toutes les applications qui interviennent sont supposées différentiables de classe C^∞ et régulières, les variétés sont aussi différentiables de classe C^∞. Nous allons adopter la même notation pour les applications et leurs différentielles.

Soient $E(V, G, p, \Phi)$ et $E'(V', G', p', \Phi')$ deux espaces fibrés principaux différentiables, h un homomorphisme de groupes de Lie de G à G', et f une application de la variété V sur V'. L'application $\mathfrak{F} : E \to E'$ s'appelle homomorphisme d'espaces fibrés principaux du type (f, h) si pour $\forall g \in G$ elle satisfait aux conditions :

$$D_g \circ \mathfrak{F} = D_{h(g)} \circ \mathfrak{F} \quad \text{pour } \forall g \in G, \tag{1}$$

$$f \circ p = p' \circ \mathfrak{F} \tag{2}$$

où par D_g nous avons noté la translation à droite correspondant à l'élément g.

Si H est une connexion sur l'espace E, alors pour $\forall z \in E$ et $\forall \tau \in T_z$, où T_z représente l'espace tangent à E dans z, nous avons la décomposition unique $\tau = V\tau + H\tau$, $V\tau$ et $H\tau$ étant la partie verticale, respectivement horizontale du vecteur τ. L'application F définie par $F(\tau) = V\tau - H\tau$ est la tenseur (noté toujours par F) d'une structure presque-produit associée naturellement à la connexion H [2].