ESPACES DE RIEMANN DOUÉS D'UNE CERTAINE STRUCTURE PRESQUE-PRODUIT

Résumé

On peut associer à un champ de vecteurs v sur un espace de Riemann V_n, une structure presque-produit définie par le tenseur $\varphi_j^i = \nabla_j v^i$ si on satisfait aux conditions

$$\nabla_i v^k \nabla_j v^l g_{kl} = g_{ij},$$

$$\nabla_i v_j - \nabla_j v_i = 0,$$

où g_{ij} est le tenseur métrique de l'espace et ∇ l'opérateur de différentiation covariante par rapport à la connexion donnée par les symboles de Christoffel.

Dans cette Note, on étudie certaines propriétés de l'espace V_n doué de cette structure presque-produit en utilisant des systèmes de coordonnées associés au champ v.

CONNEXIONS INDUITES ET STRUCTURES PRESQUE-PRODUIT ASSOCIÉES

PAR

C. APREUTESEI

Nous allons considérer dans cette Note quelques propriétés des structures presque-produit associées aux connexions sur un espace fibré principal différentiable.

1. Questions préliminaires

Toutes les applications qui interviennent sont supposées différentiables de classe C^∞ et régulières, les variétés sont aussi différentiables de classe C^∞. Nous allons adopter la même notation pour les applications et leurs différentielles.

Soient $E(V, G, p, \Phi)$ et $E'(V', G', p', \Phi')$ deux espaces fibrés principaux différentiables, h un homomorphisme de groupes de Lie de G à G', et f une application de la variété V sur V'. L'application $\mathfrak{F} : E \to E'$ s'appelle homomorphisme d'espaces fibrés principaux du type (f, h) si pour $\forall g \in G$ elle satisfait aux conditions :

$$D_g \circ \mathfrak{F} = D_{h(g)} \circ \mathfrak{F} \quad \text{pour } \forall g \in G, \tag{1}$$

$$f \circ p = p' \circ \mathfrak{F} \tag{2}$$

où par D_g nous avons noté la translation à droite correspondant à l'élément g.

Si H est une connexion sur l'espace E, alors pour $\forall z \in E$ et $\forall \tau \in T_z$, où T_z représente l'espace tangent à E dans z, nous avons la décomposition unique $\tau = V\tau + H\tau$, $V\tau$ et $H\tau$ étant la partie verticale, respectivement horizontale du vecteur τ. L'application F définie par $F(\tau) = V\tau - H\tau$ est la tenseur (noté toujours par F) d'une structure presque-produit associée naturellement à la connexion H [2].

Nous rappelons qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une structure presque produit F soit associée à une connexion sur E est qu'elle vérifie les deux conditions suivantes :

$$F(\tau) = \tau \tag{3}$$

si et seulement si le vecteur τ appartient à la distribution verticale de la structure fibrée et

$$D_g \circ F = F \circ D_g \quad \text{pour} \quad \forall g \in G. \tag{4}$$

2. Formes différentielles induites à valeurs vectorielles

Soient M un espace vectoriel réel de dimension finie, $GL(M)$ le groupe linéaire associé, R et R' deux homomorphismes des groupes G et G' respectivement, dans $GL(M)$. Ensuite soit $\mathfrak{F}$ un homomorphisme du type (f, h), où h est un homomorphisme de G sur G' et soient F et F' deux structures presque-produit associées à deux connexions sur E et E', respectivement. Nous définissons l'application $\mathcal{G}$ par l'égalité $\mathfrak{F} = F' \circ \mathfrak{F} \circ F$.

Théorème 1. *Si π est une r-forme tensorielle sur E' à valeurs dans M et du type R', alors $\Pi = \mathcal{G}^*\pi$ est une r-forme tensorielle sur E à valeurs dans M et du type $R = R' \circ h$.*

Démonstration. Soient $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r \in T_z$ et démontrons que la r-forme Π est du type R. Nous avons

$$\begin{aligned}
\Pi(D_g\tau_1, \ldots, D_g\tau_r) &= \pi(\mathcal{G}(D_g\tau_1), \ldots, \mathcal{G}(D_g\tau_r)) = \pi(F' \circ \mathfrak{F} \circ F(D_g\tau_1) \\
&, \ldots, F' \circ \mathfrak{F} \circ F(D_g\tau_r)) = \pi(F' \circ \mathfrak{F} \circ D_g(F\tau_1), \ldots, F' \circ \mathfrak{F} \circ D_g(F\tau_r)) = \\
&= \pi(F' \circ D_{h(g)} \circ \mathfrak{F}(F\tau_1), \ldots, F' \circ D_{h(g)} \circ \mathfrak{F}(F\tau_r)) = \pi(D_{h(g)} \circ F' \circ \\
&\circ \mathfrak{F}(F\tau_1), \ldots, D_{h(g)} \circ F' \circ \mathfrak{F}(F\tau_r)) = \pi(D_{h(g)}(\mathcal{G}\tau_1), \ldots, D_{h(g)}(\mathcal{G}\tau_r)) = \\
&= R' \circ h)(g^{-1})\, \pi(\mathcal{G}\tau_1, \ldots, \mathcal{G}\tau_r) = R(g^{-1})\, \mathcal{G}^*\pi(\tau_1, \ldots, \tau_r) = \\
&= R(g^{-1})\, \Pi(\tau_1, \ldots, \tau_r).
\end{aligned}$$

Maintenant il faut démontrer que Π s'annule dès que l'un des vecteurs $\tau_1, \ldots, \tau_r$ est vertical. Pour fixer les idées nous supposons τ_i vertical. Alors, puisque l'homomorphisme $\mathfrak{F}$ applique les vecteurs verticaux en des vecteurs verticaux, nous avons

$$\begin{aligned}
\Pi(\ldots, \tau_i, \ldots) &= \pi(\ldots, F' \circ \mathfrak{F} \circ F\tau_i, \ldots) = \pi(\ldots, F' \circ \mathfrak{F}\tau_i, \ldots) = \\
&= \pi(\ldots, \mathfrak{F}\tau_i, \ldots) = 0.
\end{aligned}$$

Remarque 1. De ce qui précède il suit que pour $\forall g \in G$, nous avons l'égalité $\mathcal{G} \circ D_g = D_g \circ \mathcal{G}$.

Conséquence 1. Si π est une r-forme tensorielle sur E' et du type R' à valeurs dans M, alors $F^*\mathfrak{F}^*\pi$ est une r-forme tensorielle du type $R = R' \circ h$ et à valeurs dans M.

Conséquence 2. Si Π est une r-forme tensorielle sur E de type R et à valeurs dans M, alors $F^*\Pi$ est une r-forme tensorielle sur E à valeurs dans M et du type R.

Dans la suite nous allons conserver pour M, R et R' les significations du théorème 1. Alors nous pouvons énoncer le

Théorème 2. *Soient $\mathfrak{F}$ un homomorphisme de E sur E', f un difféomorphisme de G sur G', F et F' des structures presque-produit associées à deux connexions sur E et E' respectivement et Π une r-forme tensorielle du type $R = R' \circ h$ sur E et à valeurs dans M. Alors la r-forme π définie par l'égalité $\Pi = \mathcal{G}^*\pi$ est une r-forme tensorielle sur E' de type R et à valeurs dans M.*

Démonstration. Soient $g' = h(g)$ où $g \in G$ et notons par τ_i' l'image du vecteur τ_i par l'application $\mathcal{G}$, où $i = 1, 2, \ldots, r$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\pi_\circ D_{g'}(\tau_1, \ldots, \tau_r) &= \pi(D_{g'}(\mathcal{G}\tau_1), \ldots, D_{g'}(\mathcal{G}\tau_r)) = \pi(\mathcal{G}(D_g\tau_1), \\
\ldots, \mathcal{G}(D_g\tau_r)) &= \mathcal{G}^*\pi(D_g\tau_1, \ldots, D_g\tau_r) = R(g^{-1})\, \Pi(\tau_1, \ldots, \tau_r) = \\
&= R'(g'^{-1})\, \pi(\mathcal{G}(\tau_1), \ldots, \mathcal{G}(\tau_r)) = R'(g'^{-1})\, \pi(\tau_1', \ldots, \tau_r').
\end{aligned}$$

Maintenant, dès que l'un des vecteurs $\tau_1, \ldots, \tau_r$, disons τ_i, est vertical, nous avons

$$\begin{aligned}
\pi(\ldots, \tau_i', \ldots) &= \pi(\ldots, \mathcal{G}(\tau_i), \ldots) = \mathcal{G}^*\pi(\ldots, \tau_i, \ldots) = \\
&= \Pi(\ldots, \tau_i, \ldots) = 0.
\end{aligned}$$

Remarque 2. L'énoncé des théorèmes 1 et 2 est conservé si nous remplaçons $\mathcal{G}$ par $\mathfrak{F}$.

Théorème 3. *Si ω' est une 1-forme de connexion sur E, si F et F' sont des structures presque-produit associées aux deux connexions sur E et E', respectivement, et si h est un isomorphisme, alors la 1-forme $\tilde{\omega} = \mathcal{G}^*\omega'$ sur E, est une 1-forme de connexion et $\tilde{\omega}(\tau) = h \cdot \omega(\tau)$ pour chaque vecteur τ tangent à E, où ω est la 1-forme de la connexion induite par $\mathfrak{F}$ en partant de ω'.*

Démonstration. Il est clair que $\tilde{\omega}$ est une 1-forme de type adjoint. Puis nous avons [4] Ch. II :

$$\tilde{\omega}(\tau) = \omega'(\mathcal{G}(\tau)) = \omega'(F' \circ \mathfrak{F} \circ F(\tau)) = \omega'(\mathfrak{F}(\tau)) = h \cdot \omega(\tau).$$

5. Structures presque-produit associées aux connexions et automorphismes

Soit une courbe C sur la variété V et notons par t le transport parallèle dans la connexion H donnée sur E, le long du chemin c.

Théorème 4. *Si F est la structure presque-produit associée à la connexion H, alors $F \circ t = t \circ F$, où nous avons noté par t l'application et sa différentielle.*

Démonstration. Soit le vecteur $\tau = V\tau + H\tau$. Alors, nous obtenons les relations suivantes :

$$F \circ t(\tau) = F(t(V\tau + H\tau)) = F(t(V\tau) + t(H\tau)) = t(V\tau) - t(H\tau) =$$
$$= t(V\tau - H\tau) = t \circ F(V\tau + H\tau) = t \circ F(\tau)$$

pour un τ arbitraire, ce qui prouve le théorème.

En conservant pour F et H les notations du théorème 4, $\mathfrak{F}$ étant un automorphisme de l'espace E, nous pouvons énoncer le

Théorème 5. *Une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathfrak{F}$ soit un automorphisme de la connexion H est que les actions de $\mathfrak{F}$ et F soient commutatives.*

Démonstration. L'affirmation est une conséquence d'un théorème relatif à la conservation des connexions par des homomorphismes d'espaces fibrés principaux [2], mais on peut la déduire directement.

Nécessité. Si $\tau = V\tau + H\tau$ alors $\mathfrak{F} \circ F(\tau) = \mathfrak{F}(F(V\tau)) + F(H\tau)) =$ $= \mathfrak{F}(V\tau - H\tau) = F(\mathfrak{F}(V\tau)) + F(\mathfrak{F}(H\tau)) = F \circ \mathfrak{F}(V\tau + H\tau) = F \circ \mathfrak{F}(\tau)$.

Suffisance. Si τ est un vecteur horizontal, nous avons

$$F \circ \mathfrak{F}(\tau) = \mathfrak{F} \circ F(\tau) = \mathfrak{F}(-\tau) = -\mathfrak{F}(\tau)$$

et comme $\mathfrak{F}$ est un automorphisme de l'espace E, le vecteur $-\mathfrak{F}(\tau)$ est aussi horizontal.

4. Structures presque-produit intégrables associées aux connexions induites

Remarquons que le mot „induit" a ici un sens plus large que d'habitude, comme on le verra plus loin.

Considérons sur E' une connexion H' ayant la 1-forme correspondante ω' et supposons que l'homomorphisme $\mathfrak{F} : E \to E'$ est du type (f, h), où $h : G \to G'$ est un isomorphisme. Dans ce cas $\mathfrak{F}$ détermine ([4], Ch. II) une connexion H dont la 1-forme est notée par ω. Dans ces conditions nous pouvons énoncer le

Théorème 6. *La structure presque-produit associée à la connexion H déterminée par $\mathfrak{F}$ sur E en partant de H' est intégrable si et seulement si la structure presque-produit associée à la connexion H' est intégrable.*

Démonstration. Notons par N et N' les tenseurs de la torsion correspondants aux structures presque-produit associées aux connexions H et H' et par Ω, Ω' les formes de la courbure de ces connexions. Pour tout $z \in E$ et tous $\tau_1, \tau_2 \in T_z$ nous avons ([4], Ch. II), $h \cdot \Omega(\tau_1, \tau_2) = \Omega'(\mathfrak{F}(\tau_1), \mathfrak{F}(\tau_2))$. Ensuite $\Omega(\tau_1, \tau_2) = -\frac{1}{2}\,\omega(N(\tau_1, \tau_2))$ et $\Omega'(\mathfrak{F}(\tau_1), \mathfrak{F}(\tau_2)) = -\frac{1}{2}\,\omega'(N'(\mathfrak{F}(\tau_1), \mathfrak{F}(\tau_2)))$ [2]. D'ici on déduit que $h \cdot \omega(N(\tau_1, \tau_2)) = \omega'(N'(\mathfrak{F}(\tau_1), \mathfrak{F}(\tau_2)))$.

Du fait que la dernière relation a lieu pour toute paire de vecteurs tangents, il résulte que $N = 0$ si et seulement si $N' = 0$, ce qui prouve le théorème.

Soient sur E une connexion H ayant la 1-forme correspondante ω et $\mathfrak{F} : E \to E'$ un homomorphisme du type (f, h), où l'application $f : V \to V'$ est un difféomorphisme. Dans cette situation l'application $\mathfrak{F}$ détermine sur E' une connexion H', dont la 1-forme sera notée par ω' [4] Ch. II.

Théorème 7. *La structure presque-produit associée à la connexion H' est intégrable si et seulement si la structure presque-produit associée à la connexion H est intégrable.*

La démonstration de ce théorème est analogue à la démonstration du théorème 6. (On emploie bien entendu la relation entre les 1-formes des connexions H et H') [4], Ch. II.

Soient maintenant deux espaces fibrés principaux différentiables ayant la variété base V, $E(V, G)$ et $E'(V, G')$ et considérons le produit fibré $E \boxtimes E'$. Nous notons par $\mathfrak{F}_1(z, z') = z$, $\mathfrak{F}_2(z, z') = z'$ les homomorphismes canoniques de l'espace $E \boxtimes E'$ sur E et E', respectivement. En partant des connexions H et H' données sur les espaces E et E' respectivement, et ayant les 1-formes ω et ω', on démontre qu'il existe une connexion $H \boxtimes H'$ sur $E \boxtimes E'$ uniquement déterminée, dont la 1-forme sera notée par $\omega \boxtimes \omega'$ [4], Ch. II. Dans ces conditions nous pouvons énoncer le

Théorème 8. *Si les structures presque-produit associées aux connexions H et H' sont intégrables, la structure presque-produit associée à la connexion $H \boxtimes H'$ est aussi intégrable.*

Démonstration. Soit $T_{(z,z')}$ l'espace tangent à $E \boxtimes E'$ au point (z, z'). Alors, si nous employons la relation entre la 1-forme de connexion, la forme de courbure de celle-ci et le tenseur de torsion de la structure presque-produit associées à une connexion sur un espace fibré principal [2], on obtient pour tous $\tau_1, \tau_2 \in T_{(z,z')}$:

$$\omega \boxtimes \omega'(N \boxtimes N'(\tau_1, \tau_2)) = \omega(N(\mathfrak{F}_1(\tau_1), \mathfrak{F}_1(\tau_2))) + \omega'(N'(\mathfrak{F}_2(\tau_1), \mathfrak{F}_2(\tau_2))),$$

où N, N' et $N \boxtimes N'$ sont les tenseurs de torsion des structures presque-produit associées aux connexions H, H' et $H \boxtimes H'$ respectivement. Cette relation indique que si $N = N' = 0$, alors $N \boxtimes N' = 0$.

Notons par L et L' les algèbres de Lie des groupes G et G' respectivement. Une application $\pi_1 : L' \to L$ s'appelle projection d'algèbres de Lie [3] si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

$$\pi_1(h(\lambda)) = \lambda, \quad \forall \lambda \in L \text{ et} \tag{5}$$

$$\pi_1(\mathrm{adj}\,(h(g))\lambda') = \mathrm{adj}\,g \cdot \pi_1(\lambda'), \quad \forall g \in G \text{ et } \forall \lambda' \in L'. \tag{6}$$

Si $\mathfrak{F} : E \to E'$ est un homomorphisme et $\pi_1 : L' \to L$ une projection d'algèbres de Lie, alors en partant d'une connexion H' ayant la 1-forme ω' sur E', nous pouvons déterminer une connexion H sur l'espace fibré E ayant la 1-forme ω [3]. La relation entre les formes de courbure Ω, Ω' des connexions H et H' est

$$\Omega = \pi_1 \mathfrak{F}^* \Omega' - \Omega''$$

où

$$\Omega'' = -\frac{1}{2}\left([\omega, \omega] - \pi_1[\mathfrak{F}^*\omega', \mathfrak{F}^*\omega']\right)$$

s'appelle la courbure relative (la courbure relative considérée dans [3] diffère de la notre par le signe). Si N et N' sont les tenseurs de torsion des structures presque-produit associées aux connexions H et H' et τ_1, τ_2 des vecteurs tangents à l'espace E, nous pouvons écrire

$$\Omega(\tau_1, \tau_2) = -\frac{1}{2}\pi_1 \omega'(N'(\mathfrak{F}(\tau_1), \mathfrak{F}(\tau_2))) - \Omega''(\tau_1, \tau_2).$$

Cette relation montre que si $N' = 0$, alors $\Omega = -\Omega''$ et l'inverse. Donc nous pouvons énoncer le

Théorème 9. *Une condition nécessaire et suffisante pour que la courbure de la connexion induite H coïncide avec sa courbure relative, est que la structure presque-produit associée à la connexion H' soit intégrable.*

Théorème 10. *S'il y a un sousfibré principal $E'(V, G')$ de l'espace fibré principal $E(V, G)$ tel que dans ses points les distributions H_z, et H'_z, de deux connexions H et H' sur E coïncident, alors ces connexions coïncident sur $E(V, G)$.*

Démonstration. Soit z un point arbitraire de l'espace E qui fait partie de la même fibre que $z' \in E'$; il existe un élément $g \in G$, tel que ayons $z = z'g$. Alors $D_g H_{z'} = H_{z'g} = H_z$ et $D_g H'_{z'} = H'_{z'g} = H'_z$. D'ici on obtient $H_z = H'_z$ parce que $H_{z'} = H'_{z'}$. Maintenant il faut démontrer que la relation $H_z = H'_z$ ne dépend pas de la représentation du point z. Soit [4], Ch. II $z = z'g = z_1 g_1$ où $z', z_1 \in E'$ et $g, g_1 \in G$. Alors il existe un élément $g_2 \in G$, tel que $z_1 = z'g_2$ et donc nous avons $g_2 g_1 = g$. Il résulte que $D_{g_1} H_{z_1} = D_{g_1} H_{z'g_1} = D_{g_1}(D_{g_2} H_{z'}) = D_{g_2 g_1} H_{z'} = D_g H_{z'}$. Cela démontre notre affirmation.

Conséquence. Soient F et F' deux structures presque-produit associées aux connexions H et H' respectivement, données sur l'espace fibré principal $E(V, G)$. S'il y a un sousfibré principal $E'(V, G')$ de E de manière que dans ses points les connexions H et H' coïncident, alors les tenseurs F et F' coïncident sur E.

BIBLIOGRAPHIE

1. Bernard D. — *Sur la géométrie différentielle des G-structures.* Annales Inst. Fourier, Grenoble, 10 (1960), pp. 151—270.

2. Cruceanu V. — *Structures presque-produit associées aux connexions sur un espace fibré* (à paraître).

3. Goetz A. — *On induced connection.* Fundamenta Mathematicae, vol. 55 (1964), pp. 149—174.

4. Kobayashi S. and Nomizu K. — *Foundations of Differential Geometry*, vol. I. New York 1963.

CONEXIUNI INDUSE ŞI STRUCTURI APROAPE-PRODUS ASOCIATE

Rezumat

Se pun în evidenţă cîteva proprietăţi geometrice ale structurilor aproape-produs asociate conexiunilor pe un spaţiu fibrat principal. Dintre aceste proprietăţi cele mai importante se referă la : 1) automorfismele unei conexiuni şi tensorul de definiţie al structurii şi 2) clasa structurilor aproape-drodus integrabile asociate conexiunilor induse.