ASUPRA UNEI CLASE DE ALGEBRE NEASOCIATIVE

DE

V. TAMAŞ

Introducere

Problema generalizării noţiunii de algebră Lie a fost atacată de mai multe ori, indicîndu-se de fiecare dată clase care generalizează anumite aspecte. Trecînd peste acelea care se referă la corpul de bază, cîteva atrag în mod deosebit atenţia. Una dintre ele este prezentată de N. Jacobson în [4, cap. II] şi ea constă în următoarele:

Fie $\mathfrak{M}$ o mulţime de elemente din algebra asociativă $\mathfrak{A}$ peste corpul Φ. $\mathfrak{M}$ se numeşte slab închisă dacă fiecărei perechi ordonate (a, b) din $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ îi corespunde un $\gamma(a, b) \in \Phi$ aşa încît:

$$ab + \gamma(a, b)ba \in \mathfrak{M}.$$

Să presupunem că aplicaţia $(a, b) \to \gamma(a, b)$ este fixată şi să notăm cu $a \ast b = ab + \gamma(a, b)ba$.

Sîntem conduşi deci la submulţimi închise faţă de operaţia $\ast$. Este evident că dacă $\gamma(ab) = -1$, mulţimea respectivă este o algebră Lie şi dacă $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}$(ca mulţimi) atunci se obţine însăşi algebra Lie corespunzătoare algebrei asociative $\mathfrak{A}$.

Relativ la aceste structuri s-au demonstrat o serie de proprietăţi interesante care generalizează pe cele corespunzătoare ale algebrelor Lie.

O altă generalizare a fost indicată de A. Block [2]. Iată pe scurt această generalizare.

Definiţia 1. *O algebră distributivă $\mathfrak{D}$ se numeşte $\mathfrak{D}$-algebră stîngă, dacă $\forall a, b, c \in \mathfrak{D}$ este satisfăcută identitatea:*

$$\text{(s)} \qquad a \ast (b \ast c) = (a \ast b) \ast c + b \ast (a \ast c).$$

Algebra distributivă $\mathfrak{D}$ se numeşte $\mathfrak{D}$-algebră dreaptă dacă:

(d) $$(a \ast b) \ast c = a \ast (b \ast c) + (a \ast c) \ast b.$$

Dacă sînt îndeplinite (s) *şi* (d) *algebra* $\mathfrak{D}$ *se va numi* $\mathfrak{D}$*-algebră bilaterală. Se arată că* (s) *şi* (d) *nu sînt echivalente.*

Definiţia 2. *Se numeşte centru stîng al* $\mathfrak{D}$*-algebrei* $\mathfrak{D}$ *mulţimea:*

$$^*\mathfrak{D} = \{x / x \in \mathfrak{D} \text{ şi } x \ast a = 0 \text{ pentru toţi } a \in \mathfrak{D}\} \text{ şi centru drept:}$$

$$\mathfrak{D}^* = \{x / x \in \mathfrak{D} \text{ şi } a \ast x = 0 \text{ pentru toţi } a \in \mathfrak{D}\}.$$

Se arată că $^*\mathfrak{D}$ *este ideal drept şi* $\mathfrak{D}^*$ *este ideal stîng în* $\mathfrak{D}$.

Teoremă 1. *Dacă* $\mathfrak{D}$ *este o* $\mathfrak{D}$*-algebră stîngă, atunci* $^*\mathfrak{D}$ *este ideal bilateral în* $\mathfrak{D}$ *iar* $\mathfrak{D}/^*\mathfrak{D}$ *este o algebră Lie.*

Demonstraţia este dată în [2].

În cazul în care $^*\mathfrak{D} = 0$, rezultă că $\mathfrak{D}/^*\mathfrak{D}$ este izomorfă canonică cu $\mathfrak{D}$ şi deci $\mathfrak{D}$ este o algebră Lie.

Deci algebrele Lie sînt cazuri particulare de $\mathfrak{D}$-algebre.

Existenţa unor asemenea structuri algebrice poate fi arătată folosind ecuaţiile de structură ale unei algebre.

Fie V un spaţiu vectorial cu n dimensiuni peste cîmpul Φ şi $e_1, e_2, \ldots, e_n$ o bază. Introducem produsul vectorial $x \ast y$ prin tabela:

$$e_i \ast e_j = \gamma_{ij}^k \, e_k \qquad \gamma_{ij}^k \in \Phi, \qquad i, j, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Condiţia (s) conduce la:

$$e_i \ast (e_j \ast e_k) = (e_i \ast e_j) \ast e_k + e_j \ast (e_i \ast e_k),$$

din care rezultă sistemul:

(s') $$\gamma_{jk}^l \, \gamma_{il}^u = \gamma_{ij}^l \, \gamma_{lk}^u + \gamma_{ik}^v \, \gamma_{jv}^u.$$

Sistemul (s') este un sistem de n^4 ecuaţii cu n^3 necunoscute. El este o parte din sistemul corespunzător unei algebre Lie care este compatibil în anumite condiţii şi deci există $\mathfrak{D}$-algebre.

De fapt posibilitatea definirii unor produse vectoriale diferite şi generale a fost indicată şi de A. Climescu [3] într-un caz particular.

Nota de faţă prezintă unele observaţii asupra altei clase de algebre care generalizează atît algebrele Lie cît şi algebrele Jordan. Pornind de la o operaţie introdusă de Albert [1] şi Kantor [6] am introdus o nouă operaţie în felul următor:

Fie algebra $\mathfrak{A}$ asociativă şi $h(a, b)$, $k(a, b)$ două funcţii definite pe $\mathfrak{A}$ cu valori în corpul de bază Φ. Introducem în $\mathfrak{A}$ operaţia:

$$a \ast b = h\, ab + k\, ba.$$

Dacă $h = k \equiv 1$, noua structură este o algebră Jordan. Dacă $h \equiv 1$, $k \equiv -1$, algebra este algebră Lie.

Subspaţiile închise la $(a \ast b) \ast c$ generalizează S.t.L. şi S.t.J. [5] numite respectiv sisteme triple Lie şi sisteme triple Jordan.

Considerînd submulţimile lui $\mathfrak{A}$ închise la $(\ast)$ se obţin nişte structuri algebrice care generalizează mulţimile slab închise considerate de N. Jacobson în [4, cap. II].

Noua algebră a spaţiului $\mathfrak{A}$ am numit-o G-algebră iar mulţimile slab închise, mulţimi slab închise generale.

Observaţiile sînt grupate în două părţi. Partea I, Mulţimi slab închise generale şi Partea a II-a, G-algebre. Cu studiul subspaţiilor închise la operaţia $\ast$ vom reveni în o Notă ulterioară. Generalizările precedente, evident, sînt cazuri particulare de G-algebre. Să observăm că în cazul $k = 1 - h$ G-algebra este cunoscută în literatură sub denumirea de algebra evasi-asociativă [7, cap. III].

1. Mulţimi slab închise generale

Urmînd o idee a lui N. Jacobson [4, cap. II] introducem noţiunea de mulţime slab închisă astfel:

Definiţia 3. *Numim slab închisă generală submulţimea* $\mathfrak{M}$ *a algebrei asociative* $\mathfrak{A}$, *dacă pentru două funcţii fixate* h, k *de două variabile* a, b

$$h\, ab + k\, ba \in \mathfrak{M} \qquad a, b \in \mathfrak{M}$$

Să notăm cu $a \ast b = h\, ab + k\, ba$.

Submulţimea $\mathfrak{N}$ se numeşte subsistem dacă pentru orice $c, d \in \mathfrak{N}$ $c \ast d \in \mathfrak{N}$. Dacă pentru fiecare $a \in \mathfrak{M}$, $c \in \mathfrak{N}$, $a \ast c \in \mathfrak{N}$ sau $c \ast a \in \mathfrak{N}$ atunci $\mathfrak{N}$ se va numi ideal stîng respectiv drept al sistemului $\mathfrak{M}$.

Este evidentă definiţia idealului bilateral. Avînd în vedere că însăşi algebra $\mathfrak{A}$ este un sistem slab închis, în cele ce urmează vom folosi termenul subsistem fără alte precizări, în loc de sistem slab închis general.

Observaţie. Vom presupune că $h(a, b)$ sau $k(ab)$ nu se anulează pe $\mathfrak{M}$.

Definiţia 4. *Fie* $\mathfrak{M}$ *o submulţime a algebrei asociative* $\mathfrak{A}$. *Se numeşte algebră asociativă înfăşurătoare* $\mathfrak{M}^*$ *a submulţimii* $\mathfrak{M}$ *subalgebra lui* $\mathfrak{A}$ *generată de* $\mathfrak{M}$.

Se demonstrează fără dificultate ca şi în [4] următoarele teoreme:

Teorema 2. *Dacă* a *este un element al subsistemului* $\mathfrak{M}$ *atunci* $\mathfrak{Q} = \{a\}^* \cap \mathfrak{M}$ *este subsistem în* $\mathfrak{M}$ *şi* $\mathfrak{Q}^* = \{a\}^*$.

Teorema 3. *Dacă* $\mathfrak{Q}$ *este subsistem în* $\mathfrak{M}$ *şi* $a \in \mathfrak{M}$ *aşa încît* $q \ast a \in \mathfrak{Q}^*$ *pentru orice* $q \in \mathfrak{Q}$, *atunci:*

$$\mathfrak{Q}^* a \leqslant a\mathfrak{Q}^* + \mathfrak{Q}^*.$$

Teorema 4. *Fie* $\mathfrak{Q}$ *un subsistem în sistemul* $\mathfrak{M}$, *care are proprietatea că* $\mathfrak{Q}^*$ *este nilpotentă şi* $\mathfrak{Q}^* \neq \mathfrak{M}^*$. *Atunci există* $a \in \mathfrak{M}$ *aşa ca* $a \notin \mathfrak{Q}^*$ *dar* $q \ast a \in \mathfrak{Q}^*$ *pentru fiecare element* q *din* $\mathfrak{Q}$.

Aceste trei teoreme sînt folosite pentru demonstrarea următoarei teoreme foarte importante:

Teorema 5. *Fie $\mathfrak{M}$ o submulțime slab-închisă în algebra liniară $\mathfrak{A}$ de dimensiune finită și semisimplă. Presupunem că fiecare $a \in \mathfrak{M}$ este nilpotent adică există un număr natural k așa încît $a^k = 0$. Atunci $\mathfrak{M}^*$ este nilpotentă.*

Demonstrație. Presupunem $\mathfrak{A}$ simplă. În acest caz, după una din cunoscutele teoreme ale lui Wedderburn, $\mathfrak{A}$ este izomorfă cu algebra transformărilor liniare ale unui spațiu vectorial de dimensiune finită peste același corp.

Să identificăm $\mathfrak{A}$ cu algebra transformărilor liniare ale spațiului liniar $\mathfrak{S}$ adică să considerăm elementele din $\mathfrak{A}$ drept operatori peste $\mathfrak{S}$. Fie $\mathfrak{Q}$ mulțimea tuturor subsistemelor $\mathfrak{C}$ din $\mathfrak{M}$ care au $\mathfrak{C}^*$ nilpotentă.

Printre acestea există un subsistem pentru care algebra asociativă înfășurătoare are dimensiunea maximă, fie el $\mathfrak{L}$. Evident $\mathfrak{L}^*$ este diferită de zero, pentru că dacă $a \in \mathfrak{M}$, atunci după teorema 2, $\{a\}^*$ este subsistem în $\mathfrak{M}$ și fiind mulțimea polinoamelor cu termenii liberi egali cu zero în nedeterminata a care este nilpotent, însăși $\{a\}^*$ este nilpotentă. Așadar $\mathfrak{L}^*$ este măcar un $\{a\}^*$.

Avem totdeauna $\mathfrak{L}^* \subset \mathfrak{M}^*$. Demonstrația se va termina dacă vom arăta că $\mathfrak{L}^* = \mathfrak{M}^*$.

Presupunem contrariul. Atunci, conform teoremei 4, rezultă că există un $m \in \mathfrak{M}$ și $m \notin \mathfrak{L}^*$ așa ca, $p \times m \in \mathfrak{L}^*$ pentru toți $p \in \mathfrak{L}$. Pe de altă parte, după teorema 3, pentru orice $s \in \mathfrak{S}$ și $p^* \in \mathfrak{L}^*$ avem:

$$s(p^* \cdot m) = s(m . p_1^* + p_2^*), \text{ cu } p_1^* \text{ și } p_2^* \in \mathfrak{L}^*.$$

Fie $\mathfrak{S}_1$ subspațiul lui $\mathfrak{S}$ format din vectorii de forma sp^* cu $s \in \mathfrak{S}$ și $p^* \in \mathfrak{L}^*$. Atunci $\mathfrak{S}_1 \neq 0$ și încă $\mathfrak{S}_1 m \leqslant \mathfrak{S}_1$. Dacă $\mathfrak{C}$ este mulțimea elementelor T din $\mathfrak{M}$ așa ca $\mathfrak{S}_1 T \leqslant \mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{C}$ este un subsistem care conține sistemul $\mathfrak{L}$ și un raționament direct arată că $\mathfrak{C}^*$ este nilpotentă, adică $\mathfrak{C}^* \in \mathfrak{Q}$. Din observația că $\mathfrak{S}_1 m \leqslant \mathfrak{S}_1$ rezultă $m \in \mathfrak{C}$ și cum $m \notin \mathfrak{L}^*$, rezultă că dim $\mathfrak{C}^* >$ dim $\mathfrak{L}^*$.

Dar aceasta contrazice alegerea lui $\mathfrak{L}$ din $\mathfrak{Q}$ și prin urmare $\mathfrak{L}^* = \mathfrak{M}^*$.

Cazul semisimplu se reduce la precedentul.

Teorema 6. *Dacă $\mathfrak{M}$ este o submulțime slab-închisă generală în algebra transformărilor liniare a spațiului vectorial V de dimensiune finită, există o bază în V încît matricele elementelor $A \in \mathfrak{M}$ să fie niltriunghiulare.*

Demonstrație. Avînd în vedere că elementele lui $\mathfrak{M}$ sînt operatori, urmează că și elementele lui $\mathfrak{M}^*$ sînt tot operatori. Ca și în teorema precedentă, avem

$$V \supset V\mathfrak{M}^*.$$

Să notăm cu $V(\mathfrak{M}^*)^2 = (V\mathfrak{M}^*)\mathfrak{M}^*$: Dacă $V \cdot \mathfrak{M}^* \neq 0$, urmează $V\mathfrak{M}^* \supset \supset V(\mathfrak{M}^*)^2$ ș.a.m.d. Se obține șirul:

$$V \supset V\mathfrak{M}^* \supset V(\mathrm{M}^*)^2 \supset \ldots \supset V(\mathfrak{M}^*)^{N-1} \supset V(\mathfrak{M}^*)^N = 0.$$

Să alegem acum baza $e_1, e_2, \ldots, e_n$ în V așa ca $(e_1, \ldots, e_{n_1})$ să fie baza în $V(\mathfrak{M}^*)^{N-1}$, $(e_1, \ldots, e_{n_1}, \ldots, e_{n_1+n_2})$ în $V(\mathfrak{M}^*)^{N-2}$ ș.a.m.d. Avînd în vedere incluziunile de mai sus rezultă că matricea corespunzătoare elementului A din $\mathfrak{M}$ va fi niltriunghiulară.

Teorema 7. *Fie $\mathfrak{M}$ o submulțime slab-închisă într-o algebră asociativă și fie $\mathfrak{J}$ ideal în $\mathfrak{M}$ iar $\mathfrak{J}^*$ și $\mathfrak{M}^*$ algebrele înfășurătoare respective. Atunci*

$$\mathfrak{M}^*(\mathfrak{J}^*)^k \subseteq (\mathfrak{J}^*)^k \mathfrak{M}^* + (\mathfrak{J}^*)^k,$$

$$(\mathfrak{J}^*)^k \mathfrak{M}^* \subseteq \mathfrak{M}^*(\mathfrak{J}^*)^k + (\mathfrak{J}^*)^k,$$

$$(\mathfrak{M}^* \mathfrak{J}^*)^k \subseteq \mathfrak{M}^* (\mathfrak{J}^*)^k, \quad (\mathfrak{J}^* \mathfrak{M}^*) \subseteq (\mathfrak{J}^*)^k \mathfrak{M}^*.$$

Demonstrație. Conform teoremei 3 din $i \times a \in \mathfrak{J}$ unde $i \in \mathfrak{J}$, $a \in \mathfrak{M}$, rezultă că $\mathfrak{J}^* a \subseteq a\mathfrak{J}^* + \mathfrak{J}^*$.

De aici urmează că dacă $a_1 a_2 \ldots a_r \in \mathfrak{M}$ atunci $\mathfrak{J}^* a_1 a_2 \ldots a_r \subseteq \mathfrak{M}^* \mathfrak{J}^* + + \mathfrak{J}^*$ și deci $\mathfrak{J}^* \mathfrak{M}^* \subseteq \mathfrak{M}^* \mathfrak{J}^* + \mathfrak{J}^*$.

Acum, folosind inducția rezultă:

$$(\mathfrak{J}^*)^k \mathfrak{M}^* \subseteq \mathfrak{M}^* (\mathfrak{J}^*)^k + (\mathfrak{J}^*)^k.$$

Avînd în vedere că $\mathfrak{J}$ este ideal stîng, rezultă incluziunea a doua. Incluziunea a treia este evidentă pentru $k = 1$. Avînd loc pentru un k oarecare, putem scrie

$$(\mathfrak{M}^* \mathfrak{J}^*)^{k+1} = (\mathfrak{M}^* \mathfrak{J}^*)^k \mathfrak{M}^* \mathfrak{J}^* \subseteq \mathfrak{M}^* (\mathfrak{J}^*)^k \mathfrak{M}^* \mathfrak{J}^* \subseteq \mathfrak{M}^* (\mathfrak{M}^* \mathfrak{J}^{*k} + \mathfrak{J}^{*k}) \mathfrak{J}^* \subseteq$$
$$\subseteq \mathfrak{M}^* (\mathfrak{J}^*)^{k+1}.$$

Analog se arată și a doua incluziune.

Teoremele precedente ne permit să demonstrăm:

Teorema 8. *Fie $\mathfrak{M}$ un sistem slab-închis general și fie $\mathfrak{J}$ ideal în $\mathfrak{M}$ așa ca fiecare element din $\mathfrak{J}$ să fie nilpotent. Atunci $\mathfrak{J}^*$ și deci și $\mathfrak{J}$ este conținut în radicalul $\mathfrak{R}$ al algebrei $\mathfrak{M}^*$.*

Demonstrație. Mulțimea $\mathfrak{M}^* \mathfrak{J}^* + \mathfrak{J}^*$ este ideal pentru că $\mathfrak{M}^* (\mathfrak{M}^* \mathfrak{J}^* + + \mathfrak{J}^*) \subseteq \mathfrak{M}^* \mathfrak{J}^*$ și $(\mathfrak{M}^* \mathfrak{J}^* + \mathfrak{J}^*) \mathfrak{M}^* \subseteq \mathfrak{M}^* (\mathfrak{M}^* \mathfrak{J}^* + \mathfrak{J}^*) + \mathfrak{M}^* \mathfrak{J}^* + \mathfrak{J}^* =$
$= \mathfrak{M}^* \mathfrak{J}^* + \mathfrak{J}^*$.

Afară de aceasta $(\mathfrak{M}^* \mathfrak{J}^* + \mathfrak{J}^*) \subseteq \mathfrak{M}^* \mathfrak{J}^* + (\mathfrak{J}^*)^k$. După teorema 5, $\mathfrak{J}^*$ este nilpotentă. Putem deci alege k așa fel încît $(\mathfrak{M}^* \mathfrak{J}^* + \mathfrak{J}^*)^k \subseteq \mathfrak{M}^* \mathfrak{J}^*$. Dar $(\mathfrak{M}^* \mathfrak{J}^*)^k \subseteq \mathfrak{M}^* (\mathfrak{J}^*)^k$ și h poate fi ales așa fel încît $(\mathfrak{M}^* \mathfrak{J}^*)^h = 0$. De aceea idealul $\mathfrak{M}^* \mathfrak{J}^* + \mathfrak{J}^*$ este ideal nilpotent, deci este conținut în $\mathfrak{R}$. De aici urmează că $\mathfrak{J}^*$ și deci și $\mathfrak{J}$ sînt conținuți în $\mathfrak{R}$.

2. G-algebre

Fie algebra asociativă $\mathfrak{A}$ și A o G-algebră atașată pentru h, k funcții fixate. Este clar că unei algebre $\mathfrak{A}$ i se pot atașa nenumărate G-algebre. Urmînd o cale paralelă cu cea de la algebrele Lie sau Jordan să introducem noțiunile de radical și nilradical al unei G-algebre.

Fie A_1 şi A_2 subspaţii ale algebrei A. $A_1 \cap A_2$ şi $A_1 + A_2$ sînt subspaţiile cu înţelesul obişnuit.

Să definim $A_1 \ast A_2$ subspaţiul tuturor $a_1 \ast a_2$, $a_i \in A_i$, $i = 1, 2$. (Rezultă deci că elementele subspaţiului $A_1 \ast A_2$ sînt sume finite de forma $\sum_j a_{1j} \ast a_{2j}$, cu $a_{ij} \in A_i$. Se verifică fără dificultate că:

$$(A_1 + A_2) \ast A_3 = A_1 \ast A_3 + A_2 \ast A_3,$$

$$(A_1 \cap A_2) \ast A_3 \subseteq (A_1 \ast A_3) \cap (A_2 \ast A_3).$$

Definiţia 5. *Se numeşte G-ideal al G-algebrei A un subspaţiu $\mathcal{J}$ pentru care $\mathcal{J} \ast A \subseteq \mathcal{J}$.*

$\mathcal{J}_1$ şi $\mathcal{J}_2$ fiind G-ideale, $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$ şi $\mathcal{J}_1 \ast \mathcal{J}_2$ sînt tot G-ideale, în A.

În particular, dacă considerăm şirurile:

a) şirul derivat:

$$A \subseteq (A)' = A \ast A \subseteq A'' = A' \ast A' \subseteq \ldots \subseteq A^{(k)} = A^{(k-1)} \ast A^{(k-1)} \subseteq \ldots$$

b) şirul central:

$$A \subseteq A^2 = A \ast A \subseteq A^3 = A^2 \ast A \subseteq \ldots \subseteq (A)^k = A^{k-1} \ast A \subseteq \ldots$$

elementele lor vor fi G-ideale în A.

Definiţia 6. *O G-algebră se numeşte rezolubilă dacă există un h pentru care $A^{(h)} = 0$ şi nilpotentă dacă există k aşa încît $A^k = 0$ (h şi k numere naturale).*

Orice G-algebră nilpotentă este rezolubilă. În adevăr $A^i \ast A^j \subseteq A^{i+j}$ avînd în vedere definiţia şi folosind inducţia. De aici, şi cum $A^{(h)}$ este din şirul derivat, urmează

$$A^{(h)} \subseteq A^{2^h}$$

şi dacă A este nilpotentă cu $A^{2^h} = 0$, atunci $A^{(h)} = 0$ şi deci A este rezolubilă.

În cazul asociativ aceste două noţiuni se confundă şi de aceea ele sînt proprii cazului neasociativ.

Teorema 9. *Orice subalgebră şi orice imagine omomorfă a unei G-algebre rezolubile (nilpotente) este rezolubilă (nilpotentă).*

Demonstraţia urmează o cale analogă cazului asociativ avînd în vedere că dacă α este omomorfismul considerat, atunci

$$(A^{(i)})\alpha = (A\alpha)^{(i)} \quad \text{şi}$$

$$(A^i)\alpha = (A\alpha)^i.$$

Teorema 10. *Dacă A conţine un G-ideal rezolubil $\mathcal{J}$ aşa ca $A/\mathcal{J}$ să fie rezolubilă, atunci A este rezolubilă.*

Demonstraţie. Fie $\varphi : A \to A/\mathcal{J}$, atunci $(A^{(h)})\varphi = (A\varphi)^{(h)} = (A/\mathcal{J})^{(h)} = 0$, dacă h este suficient de mare. De aceea $A^{(h)} \subseteq \mathcal{J}$.

Dacă G-idealul $\mathcal{J}$ este rezolubil, atunci $\mathcal{J}^{(k)} = 0$ pentru un k oarecare. De aceea, din $A^{(h)} \subset \mathcal{J}$ rezultă că $A^{(h+k)} \subseteq \mathcal{J}^{(k)} = 0$ şi A este rezolubilă.

Teorema 11. *Suma oricăror două G-ideale rezolubile (nilpotente) este din nou un G-ideal rezolubil (nilpotent).*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{J}_1$ şi $\mathcal{J}_2$ două G-ideale rezolubile. După teorema de izomorfism $\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2$ este G-ideal în $\mathcal{J}_1$ şi

$$(\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2)/\mathcal{J}_2 \cong \mathcal{J}_1/\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2.$$

$\mathcal{J}_1/\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2$ este o G-algebră rezolubilă fiind imaginea omomorfă a G-algebrei rezolubile $\mathcal{J}_1$. Cum $\mathcal{J}_2$ este G-ideal rezolubil, atunci după teorema 10 este de asemenea rezolubil şi $\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$. Pentru G-ideale nilpotente demonstraţia se poate face la fel arătînd direct că există un m aşa ca $(\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2)^m = 0$.

Teorema 12. *Dacă G-algebra A are dimensiunea finită, atunci există un G-ideal rezolubil (nilpotent) care conţine pe oricare alt G-ideal rezolubil (nilpotent).*

Demonstraţie. Fie $\mathfrak{R}$ G-idealul rezolubil de dimensiune maximală în A (G-idealul nilpotent de dimensiune maximală să-l notăm $\mathfrak{N}$). Din teorema 11 rezultă că dacă $\mathcal{J}$ este un G-ideal rezolubil (nilpotent), atunci $\mathfrak{R} + \mathcal{J}$ ($\mathfrak{N} + \mathcal{J}$) este de asemenea G-ideal rezolubil (nilpotent).

Dar $\mathfrak{R} + \mathcal{J} = \mathfrak{R}$ ($\mathfrak{N} + \mathcal{J} = \mathfrak{N}$) fiindcă $\mathfrak{R}$ respectiv $\mathfrak{N}$ are dimensiunea maximă, deci $\mathcal{J} \subseteq \mathfrak{R}$, ($\mathcal{J} \subseteq \mathfrak{N}$).

Definiţia 7. *G-idealul $\mathfrak{R}$ se numeşte radicalul G-algebrei A, iar G-idealul $\mathfrak{N}$ nil-radicalul G-algebrei A.*

Nil-radicalul G-algebrei A este conţinut în radicalul ei.

Ca de obicei, dacă $\mathfrak{R} = 0$, adică dacă G-algebra A nu are ideale rezolubile diferite de 0, G-algebra A se numeşte semisimplă. Dacă G-algebra A nu are G-ideale diferite de 0 şi A şi dacă $A^2 \neq 0$, atunci G-algebra se numeşte simplă.

Observaţia 1. Dacă G-algebra A este simplă iar $\mathfrak{R}$ radicalul său, atunci sau $\mathfrak{R} = 0$ sau $A = \mathfrak{R}$.

Dar dacă $A = \mathfrak{R}$, atunci $\mathfrak{R}^2 \subset \mathfrak{R}$ şi $\mathfrak{R}^2$ este G-ideal aşa că $\mathfrak{R}^2 = A^2 = 0$, ceea ce contrazice ipoteza şi deci $\mathfrak{R} = 0$, adică din condiţia de simplitate rezultă semisimplitatea.

Observaţia 2. Dacă $\mathfrak{R}$ este radicalul G-algebrei A atunci orice G-ideal din $A/\mathfrak{R}$ are forma $\mathcal{J}/\mathfrak{R}$, unde $\mathcal{J}$ este G-ideal în A. Dar $\mathcal{J}$ este G-ideal rezolubil, conform unei teoreme precedente, de aceea $\mathcal{J} \subseteq \mathfrak{R}$ şi $\mathcal{J}/\mathfrak{R} = 0$.

În felul acesta G-algebra $A/\mathfrak{R}$ este semisimplă.

Teorema 13. (generalizarea teoremei lui Engel). *Dacă A este o G-algebră şi fiecare element $a \in A$ este nilpotent, atunci algebra asociativă înfăşurătoare A^* este nilpotentă* ($\mathfrak{A}$ este semisimplă).

Demonstraţia este imediată, dacă aplicăm teorema 5 în cazul cînd $\mathfrak{M} = A$.

Este interesant că teorema 13 generalizează şi o teoremă analogă celei lui Engel pentru algebra Jordan dată de Albert [1].

Fie acum A o G-algebră şi prin analogie cu cazurile concrete cunoscute să definim aplicaţia ad a prin

$$\text{ad } a : x \to x \ast a$$

şi să o numim aplicaţie asociată a lui A în A.

Teorema 13 poate fi formulată şi sub forma:

Teorema 14. *G-algebra A de dimensiune finită este nilpotentă, atunci şi numai atunci cînd endomorfismul* ad a *este nilpotent pentru fiecare $a \in A$.*

Demonstraţie. După cum rezultă din definiţie, G-algebra A este nilpotentă dacă există N aşa încît

$$(\ldots((a_1 \ast a_2) \ast a_3) \ldots \ast a_N) = 0 \text{ pentru orice } a_i \in A.$$

De aici urmează că

$$(\ldots((x \ast a) \ast a) \ldots \ast a) = 0, \text{ unde } a \text{ intră de } N - 1 \text{ ori.}$$

Dar aceasta este echivalent cu $(\text{ad } a)^{N-1} = 0$.

Reciproc, dacă ad a este nilpotentă pentru fiecare $a \in A$ şi A are dimensiune finită, atunci ad A (mulţimea tuturor ad a cu $a \in A$) este o G-algebră peste algebra asociativă a transformărilor liniare ale spaţiului liniar A.

Fie ad a şi ad $b \in$ ad A. Atunci:

$$(\text{ad } a \ast \text{ad } b)x = (h \text{ ad } a \cdot \text{ad } b + k \text{ ad } b . \text{ad } a)x = (h \text{ ad } a \cdot \text{ad } b)x +$$

$$+ (k \text{ ad } b . \text{ad } a)x = ha(bx) + kb(ax) = (h\,ab + k\,ba)x = c \cdot x.$$

fiindcă $h\,ab + k\,ba = c \in A$ şi deci avem $c \cdot x = \text{ad } c \cdot x$

Cum presupunem ad a_X nilpotentă pentru orice $a_X \in A$, urmează că G-algebra ad A are toate elementele nilpotente şi atunci din teorema 5 rezultă $(\text{ad } A)^*$ nilpotentă şi prin urmare există un N aşa încît produsul a N elemente să fie nul — ad $a_1 \ast$ ad $a_2 \ast \ldots \ast$ ad $a_N = 0$ — pentru orice $a_i \in A$ şi deci

$$(\ldots((a \ast a_1) \ast a_2) \ldots \ast a_N) = 0 \text{ şi deci } A^{N+1} = 0.$$

Ca şi în cazul algebrelor Lie, obţinem următoarea caracterizare a nil-radicalului:

Teorema 15. *Fie A o G-algebră de dimensiune finită. Atunci nilradicalul $\mathfrak{N}$ poate fi caracterizat astfel: pentru orice $a \in \mathfrak{N}$, ad a este nilpotentă şi dacă $\mathfrak{J}$ este un G-ideal din A aşa încît* ad a *este nilpotentă pentru fiecare $a \in \mathfrak{J}$, atunci $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{N}$.*

Demonstraţia este evidentă, dacă se are în vedere teorema 13.

BIBLIOGRAFIE

1. Albert A. A. — *On Jordan Algebras of Linear Transformations.* Trans. of the Amer. Math. Soc., vol. 59, 1946, p. 524—555.
2. Блох А. — *Об одном обобщении понятия алгебры Ли.* ДАН, т. 165, № 3, 1965, стр. 471—473.
3. Climescu A. — *Vectorii cu bipunct.* Bul. Inst. polit. Iaşi, Tom. VII (XI), Fasc. 3—4, 1961, p. 1—5.
4. Jacobson N. — *Lie Algebras.* John Wiley, New York, 1961.
5. Jacobson N. — *Lie and Jordan Triple Systems.* Amer. J. of Math., vol. 71, 1949, p. 149—170.
6. Кантор И. Л. — *Об одном классе разрешимых алгебр и групп Ли.* ДАН, т. 158, 24, 1964, стр 1271—1274.
7. Schafer D. R. — *An Introduction to Nonassociative Algebras.* Academic Press, New York, 1966.

SUR UNE CLASSE D'ALGÈBRES NONASSOCIATIVES

Résumé

En partant d'une opération introduite par Albert [1] et généralisée par l'auteur, on introduit la notion de G-algèbre qui est un espace vectoriel sur un corps Φ fermé au produit vectoriel

$$a \ast b = h\,ab + k\,ba,$$

h, k étant des fonctions d'argument vectoriel à valeurs dans Φ. On démontre certaines affirmations analogues à celles sur l'algèbre de Lie [4] et celle de Jordan [7] et on donne des généralisations de certains théorèmes classiques.