ASUPRA COMUTATIVITĂȚII SUPERPOZIȚIEI FUNCȚIILOR BOOLEENE ȘI UNELE PROPRIETĂȚI DE ITERAȚIE ALE ACESTORA

DE

D. SIMOVICI

1. Introducere

Chestiunile tratate mai jos prezintă o importanță teoretică și practică în studiul și proiectarea anumitor tipuri de circuite logice. Se pun în evidență o serie de proprietăți pe care le manifestă funcțiile booleene în procesele de superpoziție precum și corespondentul practic al unora din ele.

2. O condiție necesară și suficientă de superpoziție comutativă a funcțiilor booleene

Fie $B = \{0, 1\}$ o algebră Boole cu două elemente și funcția $f: B^n \to B$. Adoptăm notația uzuală (aditivă și multiplicativă) pentru cele două operații binare ale algebrei.

Fie $a, b \in B$. Vom nota:

$$a \oplus b = \bar{a} b + a \bar{b}.$$

Dacă punem:

$f_1 = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1)$ și $f_0 = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ avem următoarele identități evidente:

$$1 \oplus x = \bar{x}, \tag{1}$$

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_n f_1 \oplus (1 \oplus x_n) f_0. \tag{2}$$

Identitatea (2) rezultă imediat făcînd $x_n = 0$ și apoi $x_n = 1$.

Vom nota:

$$f \circ_n g = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_1, \ldots, x_n)), \text{ unde } g: B^n \to B.$$

Din (2) rezultă:

(3) $$f \circ_n g = g f_1 \oplus (1 \oplus g) f_0 .$$

Dar g se poate pune sub forma:

(4) $$g = x_n g_1 \oplus (1 \oplus x_n) g_0 .$$

Din (3) și (4) găsim:

(5) $$f \circ_n g = [x_n g_1 \oplus (1 \oplus x_n) g_0] f_1 \oplus [1 \oplus x_n g_1 \oplus (1 \oplus x_n) g_0] f_0 .$$

Efectuînd calculele în (5) obținem:

(5') $$f \circ_n g = x (f_1 \oplus f_0)(g_1 \oplus g_0) \oplus f_0 g_0 \oplus f_0 \oplus g_0 f_1 .$$

Avem următoarele proprietăți ale operației de superpoziție:

(6) $$(f \circ_n g) \circ_n h = f \circ_n (g \circ_n h) ,$$

(7) $$(g \oplus h) \circ_n f = g \circ_n f \oplus h \circ_n f .$$

Folosind identitatea $f_0 = f \circ_n 0$, avem și

(8) $$f \circ_n (g \oplus h) = f \circ_n g \oplus f \circ_n h \oplus f \circ_n 0 .$$

Relația (8) indică existența unei legi speciale de distributivitate la dreapta pe care o vom numi, după [3], distributivitate slabă la dreapta.

Să vedem în ce condiții avem:

(9) $$f \circ_n g = g \circ_n f .$$

Utilizînd (5'), relația (9) devine:

$$x_n (f_1 \oplus f_0)(g_1 \oplus g_0) \oplus f_0 g_0 \oplus f_0 \oplus g_0 f_1 =$$
$$= x_n (f_1 \oplus f_0)(g_1 \oplus g_0) \oplus f_0 g_0 \oplus g_0 \oplus f_0 g_1$$

sau:

(10) $$f_0 \oplus g_0 f_1 \oplus g_0 \oplus f_0 g_1 = 0 .$$

Egalitatea (10) se poate pune sub una din formele:

(10') $$f_0 \bar{g}_1 = g_0 \bar{f}_1$$

(10'') $$g_0 \bar{f}_0 \bar{f}_1 + \bar{g}_1 f_0 f_1 + f_0 \bar{g}_0 \bar{g}_1 + \bar{f}_1 g_0 g_1 = 0 .$$

Pe baza egalității (10') se poate formula un algoritm simplu de verificare a comutativității superpoziției cu ajutorul hărții Veitch.

Notînd:

(11) $$\pi_n(f, g) = f_0 \oplus g_0 f_1 \oplus g_0 \oplus f_0 g_1$$

obținem:

Propoziția 1. *Condiția necesară și suficientă ca funcțiile booleene f și g să fie superpozabile comutativ este ca expresia $\pi_n(f, g)$ să fie identic egală cu zero.*

Vom numi funcția $\pi_n(f, g) : B^{n-1} \to B$, permutator al funcțiilor f și g. Dacă punem:

$$A = \{(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \mid \xi_i \in B, \pi_n(f, g)(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = 0\} ,$$

pentru restricțiile funcțiilor f și g la A avem proprietatea:

$$f_{|A} \circ_n g_{|A} = g_{|A} \circ_n f_{|A}$$

importantă din punct de vedere practic.

3. Diverse proprietăți ale permutatorului

Demonstrarea egalităților de mai jos se bazează pe expresia (11) a permutatorului și o omitem:

(12) $$\pi_n(f, 1) = f_1 \oplus 1 ,$$

(13) $$\pi_n(f, 0) = f_0 ,$$

(14) $$\pi_n(f, g \oplus h) = \pi_n(f, g) \oplus \pi_n(f, h) \oplus f_0 ,$$

(15) $$\pi_n(f, g + h) \oplus \pi_n(f, gh) \oplus \pi_n(f, g) \oplus \pi_n(f, h) = 0 ,$$

(16) $$\pi_n(f, g) \oplus \pi_n(f, \bar{g}) = f_0 \oplus f_1 \oplus 1 .$$

În continuare vom considera cîteva consecințe ale egalităților (12)—(16).

Avem nevoie pentru aceasta de definirea unei clase mai restrînse decît cea a funcțiilor unate [6]. Astfel, o funcție pentru care $f_0 = 0$ va fi numită total pozitivă, iar o funcție pentru care $f_1 = 0$, total negativă în x_n. O funcție total pozitivă sau total negativă va fi numită total unată în x_n. Vom nota:

$$C_f^n = \{g \mid g : B^n \to B, \ g \circ_n f = f \circ_n g\} .$$

Propoziția 2. *Condiția necesară și suficientă pentru a avea simultan $g \in C_f^n$, $\bar{g} \in C_f^n$ este ca funcțiile f și $\bar{f}$ să fie comutativ superpozabile.*

Într-adevăr, relația (16) se mai scrie:

(16') $$\pi_n(f, g) + \pi_n(f, \bar{g}) = \pi_n(f, \bar{f}) .$$

Acest fapt rezultă din (14) făcînd $g = f$ și $h = 1$. Obținem astfel:

$$\pi_n(\bar{f}, f) = f_0 \oplus f_1 \oplus 1 ,$$

ceea ce justifică (16'). Este clar că $g \in C_f^n$, $\bar{g} \in C_f^n$ implică $\pi_n(f, g) = \pi_n(f, \bar{g}) = 0$, ceea ce, conform cu (16'), revine la $\pi_n(f, \bar{f}) = 0$.

Dacă f e comutativ superpozabilă cu $\bar{f}$, din $g \in C_f^n$ rezultă $\bar{g} \in C_f^n$.

Menţionăm şi o consecinţă imediată a relaţiei (16′):

$$\pi_n(f, g) + \pi_n(f, \bar{g}) + \pi_n(\bar{f}, g) + \pi_n(\bar{f}, \bar{g}) = 0. \tag{16''}$$

Propoziţia 3. *Dacă oricare trei din apartenenţele* $g \in C_f^n$, $h \in C_f^n$, $gh \in C_f^n$, $g + h \in C_f^n$ *sînt valabile, atunci şi a patra e valabilă.*

Afirmaţia e o consecinţă imediată a relaţiei (15).

Propoziţia 4. *Dacă*

$$f = f_1 \oplus f_2 \oplus \ldots \oplus f_{2p-1},$$

atunci: $\pi_n(e, f) = \pi_n(e, f_1) \oplus \ldots \oplus \pi_n(e, f_{2p-1})$.

Faptul se stabileşte prin inducţie asupra lui p observînd că pentru $p = 2$ avem după (14):

$$\pi_n(e, f_1 \oplus f_2 \oplus f_3) = \pi_n(e, f_1 \oplus f_2) \oplus \pi_n(e, f_3) \oplus e_0 =$$
$$= \pi_n(e, f_1) \oplus \pi_n(e, f_2) \oplus e_0 \oplus \pi_n(e, f_3) \oplus e_0 =$$
$$= \pi_n(e, f_1) \oplus \pi_n(e, f_2) \oplus \pi_n(e, f_3) \text{ etc.}$$

Propoziţia 5. *Fie f total pozitivă în x_n şi $g: B^n \to B$ astfel ca $\pi_n(f, g) = 0$. Atunci, oricare ar fi $h: B^n \to B$, avem:*

$$\pi_n(f, gh) = 0.$$

Într-adevăr: $\pi_n(f, g) = g_0(1 \oplus f_1) = 0$, căci $f_0 = 0$.

Apoi $\pi_n(f, gh) = g_0 h_0(1 \oplus f_1) = h_0 \pi_n(f, g) = 0$.

Consecinţă. Se arată [2] că *mulţimea funcţiilor booleene poate fi organizată ca un inel faţă de operaţiile „⊕" şi „·"*

Conform propoziţiei 5, oricare ar fi $g: B^n \to B$, avem $g C_f^n \subset C_f^n$. În plus, făcînd în (14) $f_0 = 0$, din $g, h \in C_f^n$ avem $g \oplus h \in C_f^n$.

Putem conchide că, *condiţia necesară şi suficientă ca C_f^n să formeze un ideal în acest inel este ca f să fie total pozitivă în x_n.*

Suficienţa a fost arătată mai sus. Necesitatea rezultă din (14), observînd că, pentru $g \in C_f^n$, $h \in C_f^n$, avem şi $g \oplus h \in C_f^n$, cînd C_f^n este ideal, deci:

$$\pi_n(f, g \oplus h) = \pi_n(f, g) = \pi_n(f, h) = 0,$$

ceea ce atrage: $f_0 = 0$.

4. Proprietăţi de iteraţie ale funcţiilor booleene

Să considerăm prima iterată în raport cu variabila x_k a funcţiei $f: B^n \to B$ pe care o notăm:

$$\text{iter}_k f = f \circ_k f.$$

Din relaţia (5) găsim:

$$\text{iter}_n f = x_n(f_1 \oplus f_0)(f_1 \oplus f_0) \oplus f_0 f_0 \oplus f_0 \oplus f_0 f_1 = \tag{17}$$
$$= x_n(f_1 \oplus f_0) \oplus f_1 f_0.$$

Relaţia (17) se mai scrie:

$$\text{iter}_n f = f_1 f_0 \bar{x}_n + (f_1 f_0 + \bar{f}_1 \bar{f}_0) + x_n(f_1 \bar{f}_0 + \bar{f}_1 f_0)(f_1 + \bar{f}_0).$$

După unele transformări simple găsim:

$$\text{iter}_n f = x_n(f_1 + f_0) + \bar{x}_n f_1 f_0. \tag{18}$$

Din implicaţia $f_1 f_0 \to f_1 + f_0$, (18) se mai scrie:

$$\text{iter}_n f = x_n(f_1 + f_0) + f_1 f_0. \tag{19}$$

Obţinem astfel:

Propoziţia 6. *Prima iterată a oricărei funcţii booleene este o funcţie pozitivă în variabila asupra căreia se face iterarea.*

Fie acum $f: B^n \to B$ o funcţie monoton crescătoare în x_n, cu alte cuvinte o funcţie pentru care:

$$f_0 \to f_1. \tag{20}$$

Relaţia (20) e echivalentă cu una din:

$$f_1 + f_0 = f_1, \tag{20'}$$

$$f_1 f_0 = f_0. \tag{20''}$$

Din relaţiile (18), (20′), (20″) rezultă:

$$\text{iter}_n f = x_n f_1 + f_0. \tag{21}$$

Relaţia (2) ne dă:

$$f = x_n f_1 + \bar{x}_n f_0 = x_n(f_1 + f_0) + \bar{x}_n f_0 = x_n f_1 + f_0. \tag{22}$$

Egalităţile (21) şi (22) ne permit să enunţăm:

Propoziţia 7. *Condiţia necesară şi suficientă pentru a avea coincidenţa primei iterate cu însăşi funcţia asupra căreia se face iterarea, este ca aceasta să fie monoton crescătoare în variabila de iterare.*

Suficienţa a fost dovedită mai sus.

Necesitatea rezultă astfel:

Dacă $f = \text{iter}_n f$, avem din (2):

$$x_n(f_1 \oplus f_0) \oplus f_0 = x_n(f_1 \oplus f_0) \oplus f_0 f_1,$$

ceea ce ne duce la $f_0 = f_0 f_1$, adică la implicația $f_0 \to f_1$.

Menționăm aici un rezultat obținut de Lyngholm și Youngfrau [5] care se poate regăsi din considerațiile de mai sus.

Propoziția 8. *Iterarea funcțiilor booleene este involutivă:*

Vom pune $\mathrm{iter}_n^2 f = f \circ_n \mathrm{iter}_n f = \mathrm{iter}_n f \circ_n f$.

Cu aceasta, din (2) și (19) avem:

$$\mathrm{iter}_n^2 f = (\mathrm{iter}_n f)(f_1 \oplus f_0) \oplus f_0 =$$

$$= x_n(f_1 \oplus f_0) \oplus f_1 f_0(f_1 + f_0) \oplus f_0 = x_n(f_1 \oplus f_0) \oplus f_0 = f.$$

Mai remarcăm că, în cazul funcțiilor monoton crescătoare:

$$f = \mathrm{iter}_n f = \mathrm{iter}_n^2 f. \tag{24}$$

În general:

$$\mathrm{iter}^{(m)} f = \begin{cases} f, \text{ cînd } m \equiv 0 \pmod 2 \\ \mathrm{iter}_n f \text{ cînd } m \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

5. Corespondentul unora din propozițiile anterioare în teoria automatelor

Fie A un automat avînd B ca mulțime a stărilor, iar ca mulțime de intrare $K = B^{n-1}$. Funcția de tranziție a stărilor va fi $F: B^{n-1} \times B \to B$. Ambele stări ale automatului vor fi presupuse accesibile.

O stare q a automatului va fi numită stabilă [5] dacă, pentru orice $i \in K$ astfel ca $F(i, p) = q$, urmează $F(i, q) = q$. Un automat ce are numai stări stabile va fi numit asincron.

Din punct de vedere fizic, automatul A introdus corespunde unei rețele ce funcționează secvențial avînd $n - 1$ intrări și două stări. Un astfel de automat va fi numit automat boolean: AB.

Fie acum $i \in K = B^{n-1}$ și să presupunem că automatul are starea α la un anume moment. Starea următoare va fi:

$$\beta = F(i, \alpha). \tag{25}$$

În continuare menținînd aceeași intrare i, starea automatului evoluează astfel:

$$\gamma = F(i, \beta) = F \circ_n F(i, \alpha) = \mathrm{iter}_n F(i, \alpha). \tag{26}$$

Dacă F e monoton crescătoare, în virtutea propoziției 7, relația (25) revine la:

$$\gamma = \mathrm{iter}_n F(i, \alpha) = F(i, \alpha) = \beta.$$

Invers, fie un automat boolean asincron, pentru care avem deci:

$$F(i, F(i, p)) = F(i, p), \text{ sau}$$

$$\mathrm{iter}_n F(i, p) = F(i, p).$$

Propoziția 7 ne permite atunci să enunțăm următorul rezultat

Propoziția 9. *Condiția necesară și suficientă ca un AB să fie asincron este ca funcția sa de tranziție să fie monoton crescătoare în variabila stare.*

Pentru tipul de automate introdus aici, propoziția 8 ne oferă o informație asupra evoluției periodice a acestora.

Fie $\alpha \in B$ starea la momentul $n - 1$ a automatului, cu intrarea i. În următoarele momente starea evoluează astfel:

$$\alpha_1 = F(i, \alpha),$$

$$\alpha_2 = F(i, \alpha_1) = F \circ_n F(i, \alpha),$$

$$\alpha_3 = F(i, \alpha_2) = F \circ_n F \circ_n F(i, \alpha).$$

Dar F fiind o funcție booleană, din propoziția 8 găsim:

Propoziția 10. *Fie α starea unui AB la momentul n. Starea automatului la momentul $n + 2$ coincide cu starea la momentul n.*

Facultatea de matematică-mecanică
a Universității „Al. I. Cuza" din Iași

BIBLIOGRAFIE

1. Carvallo M. — *Monographie des treillis et algèbre de Boole*, Gauthier-Villars, 1966.
2. Carvallo M. — *Principes et applications de l'analyse Booléene*, Gauthier-Villars, 1965.
3. Climescu Al. — *Anneaux faibles*. Bul. Inst. polit. Iași, T. VII (X), 1961, p. 1.
4. Harrison A. M. — *Introduction to Switching and Automata Theory*, Mc. Graw Hill, 1965.
5. Lyngholm C., Youngfrau W. — *A double-iteration property of Boolean functions*. Notre Dame J. of Formal Logic, 1 (1960), 111—114.
6. Miller E. R. — *Switching Theory*, John Wiley, 1965.

SUR LA COMMUTATIVITÉ DE LA SUPERPOSITION DES FONCTIONS BOOLÉENNES ET CERTAINES PROPRIÉTÉS D'ITÉRATION

Résumé

Dans cette Note, on donne d'abord une condition nécessaire et suffisante de superposition commutative des fonctions booléennes d'où l'on peut déduire certaines conséquences utiles pour l'étude logique des circuits.

On étudie ensuite les propriétés d'itération des fonctions booléennes et l'on établit leur correspondant dans la théorie des automates finis.