Finally the exterior derivative of (3.2) will be

$$d(d\overset{p}{\omega}{}^{(k)}_{(i)}) = \overset{p+1}{\nabla}_{[s}\overset{p}{\nabla}_{[l]}\, T^{(k)}_{(i).j_1\ldots j_p]}\, dS^{slj_1\ldots j_p} = \overset{p+1}{\nabla}_{[s}\overset{p}{\nabla}_{l]}\, T^{(k)}_{(i).j_1\ldots j_p]}\, dS^{slj_1\ldots j_p},$$

so that by (0.9)

$$d(d\overset{p}{\omega}{}^{(k)}_{(i)}) = 0, \tag{3.5}$$

which is the property No. 5 — Poincaré's theorem.

REFERENCES

1. Bishop R. L., Crittenden R. J. — *Geometry of Manifolds*. Academic Press, New York—London, 1964.
2. Fabian W. — *Tensor Integrals*. Proc. of the Edinburgh Math. Soc., Ser. 2, 10, (1957), p. 147—151.
3. Gottlieb J. — *La tenseur-intégrale et quelques-unes de ses conséquences pour la Physique*. Preprint FT2 (01.1969) Universitatea din Timişoara, p. 1—14.
4. Gottlieb J. — *Sur les lois de conservation de la Physique*. Bul. Inst. politehnic, Iaşi, (s.n.), Tom. XV (XIX), fasc. 1—2, 1969.
5. Kähler E. — *Der inaere Differentialkalkül*. Rend. di Mat., serie V, vol. XXI, fasc. 3—4, Roma, 1962, p. 425—523.
6. Moór A. — *Einführung des invarianten Differentials und Integrals in allgemeinen metrischen Räumen*. Acta Math. 86, (1951), p. 71—83.
7. Moór A. — *Über kovariante Ableitung und particiles Tensor-integral*. Monatshefte für Mathematik, 70, (1966), p. 134—148.
8. Sasayama H. — *On Partial Tensorial Derivation of Fractional Order and Multiple Tensorial Integration*. Journal Spatial Math. Sasayama Rs. Room, 3 (1960), p. 137—154.
9. Schouten J. A. — *Ricci-Calculus* (second edition). Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1954.

TENSOR-INTEGRALA ŞI DIFERENŢIALA EXTERIOARĂ
ÎN SPAŢII PARALELIZABILE

Rezumat

În prezenta Notă autorii definesc tensor-integrala într-un spaţiu paralelizabil cu ajutorul relaţiei (1.5). Tensor-integrala unui tensor are de asemenea caracter tensorial. Se obţine generalizarea formulei lui Stokes pentru tensor-integrală dată de (2.1). Definind formele tensoriale de grad p prin relaţia (3.1) precum şi diferenţiala exterioară a acestora prin (3.2), formulele lui Stokes capătă expresia simplă (3.3). Diferenţiala exterioară astfel definită satisface proprietăţile 1)—5) din § 3.

DEFORMAREA PLANĂ TERMOELASTICĂ A MEDIILOR NEOMOGENE IZOTROPE

DE

D. IEŞAN

Considerăm un mediu elastic izotrop care ocupă o regiune finită, simplu conexă S care constă din reunirea domeniilor S_j $(j = 0, 1, 2, \ldots, m)$, domeniul S_0 fiind multiplu conex, mărginit de curbele închise L_j $(j = 1, 2, \ldots, m+1)$ suficient de netede şi fără puncte comune, dintre care L_{m+1} conţine în interiorul său pe celelalte. Domeniile $S_j (j = 1, 2, \ldots, m)$ sînt simplu conexe, disjuncte, mărginite de curbele $L_j (j = 1, 2, \ldots, m)$. Fie L frontiera lui S_0. Presupunem că mediul elastic ce ocupă domeniul $S_j (j = 0, 1, 2, \ldots, m)$ este omogen dar trecînd de la un domeniu la altul proprietăţile elastice şi termice se schimbă. Notăm cu E_j şi σ_j modulul lui Young şi coeficientul lui Poisson pentru materialul din domeniul $S_j (j = 0, 1, 2, \ldots, m)$. Fie k_j coeficientul de conductivitate termică corespunzător materialului din domeniul S_j, iar α_j coeficientul de dilatare termică liniară. Considerăm cazul în care temperatura este staţionară şi nu avem surse termice. Presupunem corpul liber de tensiuni exterioare.

Alegem un reper cartezian rectangular xOy cu originea în S_0. Vom nota cu u_j, v_j componentele vectorului deplasare în domeniul S_j.

1. Determinarea variaţiei de temperatură

Fie T_j variaţia temperaturii mediului din S_j faţă de temperatura din starea nedeformată. Dacă temperatura este prescrisă pe frontieră, problema revine la determinarea funcţiilor T_j care satisfac [1]:

$$\Delta T_j = 0 \text{ în } S_j, \ (j = 0, 1, \ldots, m), \tag{1.1}$$

$$T_0 = T_j \text{ pe } L_j, \tag{1.2}$$

$$k_0 \frac{\partial T_0}{\partial n} = k_j \frac{\partial T_j}{\partial n} \text{ pe } L_j, \ (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{1.3}$$

$$T_0 = f(s) \text{ pe } L_{m+1}, \tag{1.4}$$

unde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ iar f este o funcţie dată a cărei derivată în raport cu arcul s verifică condiţia Hölder (H).

Să arătăm unicitatea soluţiei acestei probleme. Din (1.1)—(1.4) avem

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{L_j} \left(k_0 T_0 \frac{\partial T_0}{\partial n} - k_j T_j \frac{\partial T_j}{\partial n} \right) ds = \int_{L} k_0 T_0 \frac{\partial T_0}{\partial n} ds - \tag{1.5}$$

$$- \sum_{j=1}^{m} \int_{L_j} k_j T_j \frac{\partial T_j}{\partial n} ds - \int_{L_{m+1}} f k_0 \frac{\partial T_0}{\partial n} ds = \sum_{j=0}^{m} k_j \int_{S_j} \left[\left(\frac{\partial T_j}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T_j}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy -$$

$$- k_0 \int_{L_{m+1}} f \frac{\partial T_0}{\partial n} ds = 0,$$

ţinînd seama că n este normala exterioară la L.

Dacă în (1.5) facem $f = 0$ şi deoarece $k_j > 0$, rezultă $T_j = \text{constant}$. Din (1.4) rezultă $T_j = 0$ şi deci unicitatea soluţiei.

Vom presupune că unghiul format de tangenta la curba $L_j (j = 1, 2, \ldots, m+1)$ cu o direcţie fixă verifică condiţia H.

Căutăm funcţiile necunoscute sub forma

$$T_j(P) = \sum_{k=1}^{m+1} \int_{L_k} \rho_k(t) \ln \frac{1}{r} ds, \ P \in S_j, \tag{1.6}$$

unde r este distanţa de la punctul P pînă la punctul t de pe contur iar $\rho_k(t)$ sînt funcţii reale ce verifică condiţia H.

La traversarea conturului $L_j (j = 1, 2, \ldots, m)$ funcţiile (1.6) sînt continue. Avînd în vedere (1.6), rezultă că pe conturul L_j avem

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial T}{\partial n} \right]_0 = \pi \rho_j(t_0) + \sum_{k=1}^{m+1} \int_{L_k} \rho_k(t) \frac{\cos \psi}{r_0} ds, \\ \left[\frac{\partial T}{\partial n} \right]_j = - \pi \rho_j(t_0) + \sum_{k=1}^{m+1} \int_{L_k} \rho_k(t) \frac{\cos \psi}{r_0} ds, \end{cases} \tag{1.7}$$

unde funcţiile din (1.7) se referă la un punct t_0 al curbei L_j, $r_0 = r(t, t_0)$ este distanţa dintre punctele t şi t_0 iar ψ este unghiul dintre direcţia $\overrightarrow{t_0 t}$ şi normala n în punctul t_0, considerată exterioară domeniului S_0.

Condiţiile (1.3), (1.4) se scriu

$$\begin{aligned} &\pi (k_0 + k_j) \rho_j(t_0) + (k_0 - k_j) \sum_{i=1}^{m+1} \int_{L_i} \rho_i(t) \frac{\cos \psi}{r_0} ds = 0, \ t_0 \in L_j, \\ &\qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \\ &- \sum_{i=1}^{m+1} \int_{L_i} \rho_i(t) \ln r_0 ds = f(t_0), \ t_0 \in L_{m+1}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Derivînd ambii membri ai ultimei ecuaţii din (1.8) în raport cu arcul s_0, obţinem sistemul de ecuaţii integrale singulare

$$\begin{aligned} &\rho(t_0) + \frac{k_0 - k_j}{\pi (k_0 + k_j)} \sum_{i=1}^{m+1} \int_{L_i} \rho_i(t) \frac{\cos \psi}{r_0} ds = 0, \ t_0 \in L_j, \ (j = 1, 2, \ldots, m), \\ &\sum_{i=1}^{m+1} \int_{L_i} \rho_i(t) \frac{\cos \alpha(t, t_0)}{r_0} ds = - \frac{df}{ds_0}, \ t_0 \in L_{m+1}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

unde $\alpha(t, t_0)$ reprezintă unghiul format de tangenta în t_0 la L_{m+1} cu direcţia $\overrightarrow{t t_0}$. Să considerăm sistemul omogen asociat

$$\varepsilon \nu_j(t_0) + \sum_{i=1}^{m} \int_{L_i} \frac{k_0 - k_i}{\pi (k_0 + k_i)} \nu_i(t) \frac{\cos \varphi}{r_0} ds + \int_{L_{m+1}} \nu_{m+1}(t) \frac{\cos \alpha(t_0, t)}{r_0} ds = 0, \tag{1.10}$$

$$t_0 \in L_j, \ (j = 1, 2, \ldots, m),$$

unde φ este unghiul dintre direcţia $\overrightarrow{t t_0}$ şi normala în punctul t, $\alpha(t_0, t)$ reprezintă unghiul format de tangenta la L_{m+1} în t cu direcţia $\overrightarrow{t_0 t}$ şi socotit de la aceasta din urmă, în sens pozitiv iar $\varepsilon = 1$ pentru $j = 1, 2, \ldots, m$ şi $\varepsilon = 0$ cînd $j = m + 1$.

În (1.10) integralele luate pe curbele $L_j (j = 1, 2, \ldots, m)$ au nuclee cu singularitate slabă ([3], p. 55). Avînd în vedere că ([3], loc. cit.).

$$\frac{dr_0}{ds} = \cos \alpha(t_0, t), \ r_0 e^{i\theta} = t - t_0, \ \frac{dr_0}{r_0} = \frac{dt}{t - t_0} - i d\theta, \ \frac{d\theta}{ds} = \frac{h(t_0, t)}{r_0^{\alpha}}, \ 0 \leq \alpha < 1,$$

unde $h(t_0, t)$ este o funcţie ce verifică condiţia H, rezultă

$$\int_{L_{m+1}} \nu_{m+1}(t) \frac{\cos \alpha(t_0, t)}{r_0} ds = \int_{L_{m+1}} \nu_{m+1}(t) \frac{dt}{t - t_0} - i \int_{L_{m+1}} \nu_{m+1}(t) \frac{d\theta}{ds} ds.$$

Deci partea caracteristică a sistemului (1.10) este

$$A\,\nu(t_0) + \frac{B}{\pi i}\int\limits_{L_{m+1}} \frac{\nu(t)\,dt}{t - t_0},$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & & & 0 & \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & & & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \pi i \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \nu(t) = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \vdots \\ \nu_{m+1} \end{pmatrix}$$

Evident, sistemul (1.10) este de tip normal iar indicele sistemului

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{\det(A - B)}{\det(A - B)}\right]_L$$

este nul. Avînd în vedere faptul că indicele operatorilor asociaţi sînt egali în mărime şi de semne contrare, rezultă că şi indicele sistemului (1.9) este nul şi deci putem aplica acestui sistem teoremele lui Fredholm. Sistemul omogen, care se obţine punînd $\frac{df}{ds_0} = 0$, conduce la soluţiile $T_j = C$ unde C este o constantă. Din (1.7) obţinem

$$2\pi\,\rho_j(t) = \left[\frac{dT}{dn}\right]_0 - \left[\frac{dT}{dn}\right]_j = 0,\ t_0 \in L_j,\ (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Pentru determinarea funcţiei $\rho_{m+1}(t)$ să observăm faptul că ea este o densitate care dă un potenţial constant în domeniul S. După cum se ştie ([3], p. 262), funcţia $\rho_{m+1}(t)$ este determinată pînă la un factor constant.

În baza teoremei lui Fredholm, sistemul asociat omogen va avea de asemenea o singură soluţie liniar independentă. Se verifică faptul că soluţia sistemului (1.10) este

$$\nu_j = 0,\ (j = 1, 2, \ldots, m),\ \nu_{m+1} = c, \tag{1.11}$$

unde c este o constantă arbitrară.

Evident, condiţia necesară şi suficientă pentru ca sistemul de ecuaţii integrale singulare (1.9) să aibă soluţie este satisfăcută. Rezultă deci existenţa soluţiei sistemului (1.8).

2. Studiul deformării termoelastice.

Introducem variabila complexă $z = x + iy$ şi avînd în vedere (1.1) notăm

$$F_j(z) = T_j(x, y) + i\,P_j(x, y),\ (i = \sqrt{-1};\ j = 0, 1, 2, \ldots, m). \tag{2.1}$$

Considerăm funcţiile u_j^*, v_j^* definite în domeniul S_j prin

$$u_j^* + iv_j^* = \int F_j(z)\,dz,\ (j = 0, 1, 2, \ldots, m). \tag{2.2}$$

Introducînd în domeniul S_j funcţiile u_j', v_j' prin relaţiile

$$\begin{aligned} u_j &= u_j' + (1 + \sigma_j)\,\alpha_j u_j^*, \\ v_j &= v_j' + (1 + \sigma_j)\,\alpha_j v_j^*, \end{aligned} \tag{2.3}$$

problema de termoelasticitate se reduce [2] la o problemă de elasticitate ($T_j = 0$) pentru acelaşi domeniu şi cu aceleaşi încărcări pe contur. În această din urmă problemă tensiunile sînt aceleaşi cu tensiunile din problema de termoelasticitate iar deplasările sînt u_j', v_j'.

În domeniul $S_j (j = 1, 2, \ldots, m)$ funcţia $F_j(z)$ este olomorfă. Deoarece S_0 este un domeniu multiplu conex, funcţia $F_0(z)$ a cărei parte reală este funcţia uniformă $T_0(x, y)$, poate fi multiformă

$$F_0(z) = \sum_1^m B_k \ln(z - z_k) + G(z),$$

unde $B_k (k = 1, 2, \ldots, m)$ sînt constante reale, z_k sînt puncte arbitrare fixe din interiorul contururilor L_k iar $G(z)$ este o funcţie olomorfă în S_0. Avînd în vedere însă (1.3) rezultă $B_k = 0$. Avem deci

$$u_0^* + iv_0^* = \sum_{k=1}^m (\alpha_k^* + i\beta_k^*) \ln(z - z_k) + H(z), \tag{2.4}$$

unde α_k^*, β_k^* sînt constante reale iar $H(z)$ este o funcţie olomorfă în S_0. Presupunînd că deplasările din problema iniţială sînt uniforme, rezultă că deplasările u_0', v_0' sînt identice cu deplasările dintr-o problemă de dislocaţie de caracteristici

$$\varepsilon_k = 0,\ \alpha_k^0 = 2\pi\,\alpha_0(1 + \sigma_0)\,\beta_k^*,\ \beta_k^0 = -2\pi\,\alpha_0(1 + \sigma_0)\,\alpha_k^*. \tag{2.5}$$

Deoarece deplasările u_j, v_j trebuie să fie continue la traversarea conturului L_j, rezultă că deplasările u_j', v_j' au salturile

$$\begin{cases} u_0' - u_j' = (1 + \sigma_j)\,\alpha_j\,u_j^* - (1 + \sigma_0)\,\alpha_0\,u_0^*, \\ v_0' - v_j' = (1 + \sigma_j)\,\alpha_j\,v_j^* - (1 + \sigma_0)\,\alpha_0\,v_0^*. \end{cases} \tag{2.6}$$

În domeniul S vectorul tensiune trebuie să fie continuu iar pe L_{m+1} trebuie să se anuleze, încît avem condiţiile

$$\begin{cases} (X_n)_0 = (X_n)_j,\ (Y_n)_0 = (Y_n)_j,\ \text{pe } L_j\ (j = 1, 2, \ldots, m), \\ (X_n)_0 = (Y_n)_0 = 0,\ \text{pe } L_{m+1}. \end{cases} \tag{2.7}$$

Problema de termoelasticitate s-a redus la o problemă de elasticitate cu condiţiile (2.5), (2.6), (2.7). Să demonstrăm acum faptul că deplasările din problema de deformare plană (2.6), (2.7), sînt echivalente în domeniul S_0 cu deplasările dintr-o problemă de dislocaţie de caracteristici (2.5). Folosind reprezentarea prin potenţiali complecşi, avem

$$(2.8)\qquad u_j' + i v_j' = A_j \varphi_j(z) - B_j[z\overline{\varphi_j'(z)} + \overline{\psi_j(z)}], \text{ în } S_j \ (j = 0, 1, 2, \ldots, m),$$

unde $\varphi_j(z)$, $\psi_j(z)$ sînt funcţii analitice de variabila z în domeniul S_j iar

$$(2.9)\qquad A_j = \frac{(3 - 4\sigma_j)(1 + \sigma_j)}{E_j}, \quad B_j = \frac{1 + \sigma_j}{E_j}, \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, m).$$

Notăm

$$(2.10)\qquad f_j(t) = (1 + \sigma_j)\alpha_j(u_j^* + i v_j^*) - (1 + \sigma_0)\alpha_0(u_0^* + i v_0^*) = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \ln(t - z_k) + g_j(t),$$

unde

$$(2.11)\qquad \gamma_k = -(\alpha_k^* + i\beta_k^*)(1 + \sigma_0)\alpha_0,$$

iar $g_j(t)$ sînt funcţii uniforme pe L_j, t_j fiind afixul unui punct de pe L_j. Din (2.8) şi (2.6), avem

$$(2.12)\qquad A_0\varphi_0(t) - B_0[t\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)}] = A_j\varphi_j(t) - B_j[\overline{t\varphi_j'(t)} + \overline{\psi_j(t)}] + f_j(t),$$

pe L_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

Avînd în vedere (2.10), (2.11), rezultă că, $f_j(t)$ după o ocolire a conturului $L_j (j = 1, 2, \ldots, m)$ capătă creşterea

$$(2.13)\qquad -2\pi i(1 + \sigma_0)\alpha_0(\alpha_j^* + i\beta_j^*).$$

Deoarece deplasările din domeniul $S_j (j = 1, 2, \ldots, m)$ sînt uniforme, din (2.12) şi (2.13) rezultă faptul că deplasările u_0', v_0' corespund problemei de dislocaţie de caracteristici (2.5). Cu acestea, problema de termoelasticitate s-a redus la determinarea funcţiilor analitice $\varphi_j(z)$, $\psi_j(z)$, $(j = 0, 1, \ldots, m)$, care satisfac

$$(2.14)\qquad \begin{cases} \varphi_0(t) + t\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = 0, \text{ pe } L_{m+1}, \\ \varphi_0(t) + t\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = \varphi_j(t) + t\overline{\varphi_j'(t)} + \overline{\psi_j(t)}, \text{ pe } L_j, \\ A_0\varphi_0(t) - B_0[t\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)}] = A_j\varphi_j(t) - B_j[t\overline{\varphi_j'(t)} + \overline{\psi_j(t)}] + f_j(t), \\ \text{pe } L_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m). \end{cases}$$

Punînd

$$(2.15)\qquad \varphi_0(z) = \sum_{k=1}^{m} a_k \ln(z - z_k) + \varphi(z), \quad \psi_0(z) = \sum_{k=1}^{m} b_k \ln(z - z_k) + \psi_*(z),$$

unde $\varphi(z)$, $\psi_*(z)$ sînt funcţii olomorfe în S_0, din (2.14) rezultă că

$$(2.16)\qquad \begin{cases} a_k - \overline{b_k} = 0, \\ A_0 a_k + B_0 \overline{b_k} = \gamma_k, \end{cases}$$

şi deci

$$(2.17)\qquad a_k = \overline{b_k} = \frac{\gamma_k}{A_0 + B_0}.$$

Notăm

$$(2.18)\qquad \psi(z) = \psi_*(z) + \sum_{k=1}^{m} \overline{a_k} \ln(\bar{z} - \bar{z}_k) + \sum_{k=1}^{m} b_k \ln(z - z_k) + \bar{z}\sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{z - z_k}.$$

Avînd în vedere (2.16), se observă că funcţia $\psi(z)$ este olomorfă în S_0. Ţinînd seama de (2.10), (2.15), (2.16), (2.18), problema revine la determinarea funcţiilor olomorfe $\varphi(z)$, $\psi(z)$ şi $\varphi_j(z)$, $\psi_j(z)$ respectiv în S_0 şi $S_j (j = 1, 2, \ldots, m)$ care satisfac condiţiile

$$(2.19)\qquad \begin{cases} \varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = 0, \text{ pe } L_{m+1}, \\ \varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = \varphi_j(t) + t\overline{\varphi_j'(t)} + \overline{\psi_j(t)}, \text{ pe } L_j, \\ A_0\varphi(t) - B_0[t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}] = A_j\varphi_j(t) - B_j[t\overline{\varphi_j'(t)} + \overline{\psi_j(t)}] + g_j(t), \\ \qquad \text{pe } L_j, \ (j = 1, 2, \ldots, m). \end{cases}$$

Problema aceasta a fost studiată de D. I. Sherman în [4].

BIBLIOGRAFIE

1. Boley, B. A. and Weiner, J. H. — *Theory of thermal stresses*, New York, 1960, p. 148.
2. Мусхелишвили, Н. И. — *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, Москва, 1966, стр. 159.
3. Мусхелишвили, Н. И. — *Сингулярные интегральные уравнения*, Москва, 1962.
4. Sherman, D. I. — *On the problem of plane strain in non-homogeneous media. Non-homogeneity in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press, London, 1959, p. 3.

LA DÉFORMATION THERMOÉLASTIQUE PLANE DES MILIEUX NON-HOMOGÈNES ISOTROPES

Résumé

On considère le cas de la déformation thermoélastique plane d'un corps composé de différents matériaux homogènes et isotropes.

On détermine la variation de température et on réduit le problème de thermoélasticite à un problème résolu en [4].

RECENZII

Redaction P. S. ALEXANDROV, A. I. MARCUŞEVICI, A. I. HINCIN, Hochschulbücher für Mathematik, Enzyklopädie der Elementarmathematik, Volumul IV, *Geometrie*, Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1969.

Lucrarea de faţă este traducerea din limba rusă a volumului IV al Enciclopediei matematicilor elementare şi se compune din zece părţi, tratate de reputaţi matematicieni sovietici. B. A. Rosenfeld se ocupă de metoda axiomatică în geometrie; după ce face o privire istorică asupra formării noţiunilor geometrice, arată cum prin abstractizări succesive, s-a ajuns la metoda axiomatică în matematică. Pentru geometria euclidiană ne dă un sistem de axiome derivat din sistemul lui Hilbert, dînd grupa axiomelor de mişcare în locul grupei axiomelor de congruenţă, acestea din urmă fiind deduse pe baza axiomelor de mişcare. I. M. Iaglom şi L. S. Atanasian tratează transformările geometrice, indicînd aplicaţii ale acestora la rezolvarea problemelor de geometrie. Defineşte produsul a două transformări şi ajunge la conceptul de geometrie cu grup fundamental. N. M. Beskin, V. G. Boltianski, G. G. Maslova, N. F. Cetveruhin şi I. M. Iaglom expun principiile generale ale construcţiilor geometrice, indicînd diferite instrumente pentru executarea practică a construcţiilor geometrice, cercetînd şi precizia unei astfel de construcţii în funcţie de instrumentul sau instrumentele folosite. J. I. Manin se ocupă de rezolvabilitatea problemelor de construcţii cu linialul şi compasul, folosind în mod consecvent algebra. N. M. Beskin tratează problema reprezentării în geometrie, analizînd procedeul ciclografic, procedeul lui Fedorov, diversele proiecţii, metoda axonometrică şi, în fine, problema reprezentării unei figuri spaţiale într-un plan. V. G. Boltianski şi I. M. Iaglom se ocupă de noţiunea de vector şi de aplicaţiile vectorilor în geometrie. După ce defineşte operaţia de adunare a vectorilor şi a înmulţirii vectorilor cu scalari se ocupă de aşa-numita „aritmetică a figurilor", apoi defineşte cunoscutele produse cu vectori şi dă diferite aplicaţii în geometrie. W. G. Askinuze se ocupă de problema poligoanelor şi a poliedrelor. Aş remarca clasificarea poliedrelor regulate pe baza teoremei lui Euler, precum şi problema proprietăţilor combinatorice ale unui poliedru cu folosirea teoremei lui Steinitz. I. M. Iaglom expune cîteva rezultate din geometria cercului, analizînd diferite definiţii ale cercului, apoi probleme de cerc. B. A. Rosenfeld expune noţiunile fundamentale din geometria şi trigonometria sferică. S. A. Skopez studiază secţiunile conice, dînd definiţiile şi deducînd ecuaţiile lor şi studiază proprietăţile acestor curbe, concepute ca secţiuni plane într-o suprafaţă conică. La sfîrşitul fiecărui capitol este dată o bibliografie destul de bogată care să poată satisface nevoile de documentare ale oricărui cititor. Lucrarea a reuşit în mod strălucit să ne dea o imagine clară asupra rezultatelor principale la care s-a ajuns în diversele capitole de geometrie, mai ales în ceea ce priveşte fundamentele. Ea este foarte interesantă şi valoroasă, fiind rodul muncii unui colectiv de geometri cu reputaţie mondială.

Gheorghe C. Opaiţ