GENERALIZAREA UNEI TEOREME A LUI FELLER-SWOKOWSKI

DE

D. SPULBER

E. H. Feller și E. W. Swokowski au demonstrat următoarea teoremă [5]:

„Fie A un domeniu Öre [12] la dreapta și la stînga cu unitate și fie Q inelul cîturilor lui A. Dacă M este A-modul stîng finit generat fără torsiune, atunci inelul Q-endomorfismelor lui $Q \otimes_A M$ este inel de cîturi la dreapta și la stînga pentru inelul A-endomorfismelor lui M".

Acest rezultat a fost generalizat de R. Hart [9], considerînd inelul A semi-prim. I. M. Zelmanowitz [13] a dezvoltat acest din urmă caz independent de Hart; amîndoi folosesc rezultatele lui A. W. Goldie asupra inelelor prime și semi-prime [7], [8].

În această Notă (§ 2), demonstrăm o teoremă de existență a semigrupului de cîturi în raport cu un sistem multiplicativ închis pentru semigrupul dimorfismelor unui modul finit generat fără torsiune. Am considerat semi-grupul cîturilor după definiția dată de Ion D. Ion [10]. Prin teorema 2 oferim un exemplu care dovedește că generalizarea dată de teorema 1 nu este banală.

§ 1. Generalități

Fie D un semi-grup. Elementul $x \in D$ se zice simplificabil la stînga (dreapta) [11], [10], dacă din $xy = xz$ ($yx = zx$) rezultă $x = y$ ($x, y \in D$). Dacă x este simplificabil la stînga și la dreapta, el se numește simplificabil. Dacă S este o parte multiplicativ închisă de elemente simplificabile din D, iar D' este un alt semigrup și există homomorfismul de semigrupuri $\varphi: D \to D'$ încît să fie îndeplinite condițiile: (1°) $\varphi(a_1) = \varphi(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$; (2°) $\forall\, S \in \varphi(S)$, el este inversabil în D'; (3°) $\forall x \in D'$, $\exists a \in D$ și $s \in S \Rightarrow x =$

$= \varphi(a)\varphi(s)^{-1}$; atunci D' se numește semigrupul cîturilor lui D la dreapta cu numitori în S ([10], definiția 2.1).

Fie A un inel cu unitate și R un sistem multiplicativ închis de elemente regulate din A. Spunem că A_R este inel de cîturi la dreapta (stînga) relativ la R, dacă există aplicația $\varphi : A \to A_R$ încît să fie îndeplinite condițiile: (1°) φ este monomorfism; (2°) $\forall r \in \varphi(R)$, el este inversabil în A_R; (3°) $\forall x \in A_R$, $\exists a \in A$ și $r \in R \Rightarrow x = \varphi(a)\varphi(r)^{-1}$. Dacă $\varphi(a)\varphi(r)^{-1} = \varphi(r)^{-1}\varphi(a)$, A_R se zice inelul cîturilor. Dacă R este întreaga mulțime de elemente regulate, A_R este inelul clasic de cîturi la dreapta (stînga) [12], [4].

Inelul A necomutativ se numește subcomutativ la stînga (dreapta) [1], [3], [6], dacă oricare ar fi $a, b \in A$, există $c \in A$ încît $ab = ca$ ($ba = ac$).

Fie A un inel și $\varphi : A \to A$ un endomorfism al său. O aplicație $u : M \to M$ se va numi aplicație semiliniară (relativ la φ) a A-modulului M în el însuși, dacă:

$$u(x + y) = u(x) + u(y). \tag{1°}$$

$$u(ax) = \varphi(a)\, u(x). \tag{2°}$$

Se spune că cuplul (u, φ) este un dimorfism de la M în M; dacă nu dă loc la confuzii, vom spune dimorfism al lui M ([2]; 1.13).

§ 2. Semigrupul cîturilor pentru semigrupul dimorfismelor

Fie A un inel cu unitate și R un sistem multiplicativ închis de elemente regulate din A, iar A_R inelul cîturilor la dreapta în raport cu sistemul multiplicativ R. Fie M un A-modul stîng și M' un A_R-modul stîng. Fie apoi $\mathcal{S}$ mulțimea acelor dimorfisme (u, φ), ale modulului M în care φ este automorfism al inelului A cu păstrarea elementelor regulate din R. Două dimorfisme sînt egale, $(u_1, \varphi_1) = (u_2, \varphi_2) \Longleftrightarrow u_1 = u_2$ și $\varphi_1 = \varphi_2$.

Lema 1. *Mulțimea $\mathcal{S}$ a dimorfismelor lui M este semigrup unitar, cu element nul, în raport cu următoarea regulă de compunere a dimorfismelor:*

$$(u_1, \varphi_1)(u_2, \varphi_2) = (u_1u_2, \varphi_1\varphi_2),$$

u_1u_2 și $\varphi_1\varphi_2$ însemnînd compunerea obișnuită de aplicații.

Demonstrație. Mulțimea $\mathcal{S}$ nu este vidă, deoarece cel puțin aplicațiile liniare îi aparțin. Să arătăm că $(u_1u_2, \varphi_1\varphi_2)$ este dimorfism din $\mathcal{S}$; într-adevăr,

$$u_1u_2(x + y) = u_1u_2(x) + u_1u_2(y)$$

și

$$u_1u_2(\lambda x) = u_1[\varphi_2(\lambda)\, u_2(x)] = \varphi_1\varphi_2(\lambda)\, u_1u_2(x).$$

Asociativitatea rezultă din asociativitatea compunerii obișnuite de aplicații. Dimorfismul $(1_M, 1_A)$ este unitate în semigrup iar $(0_M, 0_A)$ este zero.

Presupunem că M și M' sînt module finit generate fără torsiune, cu același număr n de generatori liberi; fie ei $\{m_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ și $\{m'_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$.

Fie $\varphi : A \to A$ un endomorfism oarecare. Pentru orice $r \in A$ definim aplicația $u_r : M \to M$ astfel:

$$u_r\left(\sum_i a_i m_i\right) = \sum_i \varphi(a_i)\, r m_i.$$

(Cînd φ este identitatea, această aplicație a fost considerată de Feller și Swokowski [5].) Cuplul (u_r, φ) este un dimorfism; într-adevăr, condiția (1°) din definiție este satisfăcută imediat; pentru (2°) avem

$$u_r\left[\lambda\left(\sum_i a_i m_i\right)\right] = u_r\left(\sum_i \lambda a_i m_i\right) = \sum_i \varphi(\lambda a_i)\, r m_i =$$

$$= \varphi(\lambda)\left(\sum_i \varphi(a_i)\, r m_i\right) = \varphi(\lambda) u_r\left(\sum_i a_i m_i\right),$$

deci $u_r(\lambda x) = \varphi(\lambda) u_r(x)$.

Dacă $\{\varphi_r\}_{r \in R}$ este o familie de automorfisme ale inelului A, cu proprietatea ca $\varphi_r(R) = R$ element cu element, atunci definim următoarea mulțime de dimorfisme:

$$\mathcal{R} = \{(u_r, \varphi_r) \mid r \in R\}. \tag{1}$$

Lema 2. *Mulțimea $\mathcal{R}$ de dimorfisme este un sistem multiplicativ închis în $\mathcal{S}$ și elementele sale sînt simplificabile.*

Demonstrație. Este evident că dimorfismul nul nu aparține mulțimii.

Fie (u_{r_1}, φ_{r_1}) și (u_{r_2}, φ_{r_2}) două dimorfisme oarecare din $\mathcal{R}$. Produsul lor este $(u_{r_1} u_{r_2}, \varphi_{r_1}\varphi_{r_2})$; dar $r_2 r_1 \in R$ și $\varphi_{r_1}\varphi_{r_2}$ este automorfism cu proprietatea că $\varphi_{r_1}\varphi_{r_2}(R) = R$. Deci $(u_{r_2r_1}, \varphi_{r_1}\varphi_{r_2}) \in \mathcal{R}$ și sistemul este multiplicativ închis. Din regularitatea elementelor lui $\mathcal{R}$ și din faptul că φ_r sînt automorfisme, rezultă că dimorfismele sistemului $\mathcal{R}$ sînt simplificabile. Într-adevăr, să presupunem că avem

$$(u_r, \varphi_r)(u_1, \varphi_1) = (u_r, \varphi_r)(u_2, \varphi_2);$$

aceasta conduce la egalitatea: $(u_r u_1, \varphi_r\varphi_1) = (u_r u_2, \varphi_r\varphi_2)$, adică $u_r u_1 = u_r u_2$ și $\varphi_r\varphi_1 = \varphi_r\varphi_2$; din a doua egalitate urmează imediat $\varphi_1 = \varphi_2$; pentru prima însă, dacă aplicațiile u_1 și u_2 sînt date prin $u_1(\sum_i a_i m_i) = \sum_i a'_i m_i$ și $u_2(\sum_i a_i m_i) = \sum_i a''_i m_i$, atunci $u_r(\sum_i a'_i m_i) = \sum_i \varphi_r(a'_i) r m_i$ și $u_r(\sum_i a''_i m_i) = \sum_i \varphi_r(a''_i) r m_i$; trebuie să avem $\sum_i \varphi_r(a'_i) m_i = \sum_i \varphi_r(a''_i) m_i$, adică $\varphi_r(a'_i) r = \varphi_r(a''_i) r$, pentru $i = 1, 2, \ldots, n$. Cum r este regulat, rezultă $\varphi_r(a'_i) = \varphi_r(a''_i)$, iar din biunivocitatea lui φ_r, rezultă $a'_i = a''_i$ pentru $i = 1, 2, \ldots$; deci $u_1 = u_2$, egalitate, care reunită cu $\varphi_1 = \varphi_2$, conduce la $(u_1, \varphi_1) = (u_2, \varphi_2)$, ceea ce probează că dimorfismul (u_r, φ_r) este simplificabil la stînga. În mod asemănător se arată că (u_r, φ_r) este simplificabil și la dreapta și deci este simplificabil.

Fie $\rho : A \to A_R$ izomorfismul canonic al lui A în A_R. Dacă în considerațiile de pînă acum schimbăm R cu $\rho(R)$, A cu A_R, M cu M', $\mathcal{S}$ cu $\mathcal{S}'$ și definim $\mathcal{R}' = \{(u'_{\varphi(r)}, \rho'_{\varphi(r)}) | \varphi(r) \in \varphi(R)\}$ unde $\rho'_{\varphi(r)} = \rho\rho_r\rho^{-1}$ (punem uneori $\varphi(r) = \bar{r}$), atunci, după lema 1, $\mathcal{S}$ este un semigrup, iar privitor la $\mathcal{R}'$ vom demonstra următoarea propoziție:

Lema 3. *Elementele mulțimii $\mathcal{R}'$ sînt inversabile în $\mathcal{S}'$.*

Demonstrație. Într-adevăr, dat dimorfismul $(u'_r, \rho'_r) \in \mathcal{R}'$, atunci $(u'^{-1}_r, \rho'^{-1}_r) \in \mathcal{S}'$, unde $\rho'^{-1}_r = \varphi\rho_{\bar{r}}^{-1}\varphi^{-1}$, este inversul său.

Fie $(u, \rho) \in \mathcal{S}$ oarecare; dacă $u : M \to M$ este dat prin $u(\sum_i a_i m_i) = \sum_i a'_i m_i$, să-i punem în corespondență o aplicație $u' : M' \to M'$ definită astfel:

$$u'(\sum_i \varphi(a_i)\, \varphi(r)^{-1} m'_i) = \sum_i \varphi(a'_i)\, \varphi(r)^{-1} m'_i.$$

Se verifică ușor că (u', ρ') cu $\rho' = \varphi\rho\varphi^{-1}$ este un dimorfism din $\mathcal{S}'$. Corespondența $(u, \rho) \to (u', \rho')$ este biunivocă.

Lema 4. *Dacă $\varphi' : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ este o aplicație definită astfel:*

$$\varphi'[(u, \rho)] = (u', \rho'),$$

atunci φ' este un monomorfism și $\varphi'(\mathcal{R}) = \mathcal{R}'$.

Demonstrație. Într-adevăr, φ' păstrează operația și cum este biunivocă, este monomorfism: ultima parte rezultă din definițiile lui $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$, (u', ρ') și φ'.

Teorema 1. *Fie A un inel cu unitate și A_R inelul cîturilor relativ la R care este o parte multiplicativ închisă de elemente regulate. Fie M un A-modul stîng și M' un A_R-modul stîng; modulele sînt fără torsiune, finit generate cu același număr n de generatori liberi. Fie $\mathcal{S}$ semigrupul dimorfismelor (u, ρ) ale lui M unde ρ este automorfism care păstrează R element cu element și analog, $\mathcal{S}'$ semigrupul dimorfismelor lui M'. Dacă $\mathcal{R}$ este sistemul multiplicativ de elemente simplificabile dat de (1), atunci există homomorfismul, $\varphi' : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ încît $\mathcal{S}'$ să fie semigrupul cîturilor la stînga, relativ la sistemul $\mathcal{R}$, pentru semigrupul $\mathcal{S}$.*

Demonstrație. Dacă arătăm că $(\mathcal{S}', \varphi')$ satisface condițiile ([10], definiția 2.1):

a) ρ' este monomorfism;
b) orice element din $\varphi'(\mathcal{R})$ este inversabil în $\mathcal{S}$;
c) orice $(u', \rho') \in \mathcal{S}'$ se poate pune sub forma

$$(u', \rho') = \{[\varphi'(u_r, \rho_r)]\}^{-1}\, \varphi'[(u, \rho)];$$

demonstrația este terminată.

Considerăm aplicația $\varphi' : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ dată de lema 4; după această lemă condiția a) este îndeplinită. Cea de-a doua condiție este adevărată conform părții a doua a lemei 4 și a lemei 3. Pentru condiția c) folosim ideea demon-

strației din [5]. Fie $(u', \rho') \in \mathcal{S}'$, oarecare; presupunem că $u'(m'_i) = \sum_j \bar{a}_{ij} m'_j$; există $\bar{r} \in \varphi(R)$ încît $\bar{a}_{ij}\bar{r} = \bar{e}_{ij} \in \varphi(A)$ pentru orice i și j; putem scrie $u'(m'_i) = \sum_j \bar{e}_{ij}\bar{r}^{-1} m'_j$.

Deci, pentru $\varphi(a_i)\varphi(r_1)^{-1} m'_i = m' \in M'$ oarecare, avem:

$$u'[\sum_i \varphi(a_i)\, \varphi(r_1)^{-1} m'_i] = \sum_i \rho'\varphi(a_i)\, \varphi(r_1)^{-1} u'(m'_i) =$$

$$= \sum_{i,j} \rho'\varphi(a_i)\, \varphi(r_1)^{-1} \bar{e}_{ij}\bar{r}^{-1} m'_j.$$

Rezultă că

$$u_{\bar{r}}\, u'[\sum_i \rho'\, \varphi(a_i)\, \varphi(r_1)^{-1} m'_i] = \sum_{i,j} \rho_{\bar{r}}\rho'\varphi(a_i)\, \varphi(r_1)^{-1}\, \rho_{\bar{r}}\, (\bar{e}_{ij}\bar{r}^{-1})\, \bar{r} m'_j.$$

Deci $(u_{\bar{r}}\, u', \rho_{\bar{r}}\rho') = \varphi'(u, \rho)$, unde

$$u(m_i) = \sum_j a'_{ij} m_j, \text{ cu } a'_{ij} = \varphi^{-1}[\rho_{\bar{r}}(\bar{e}_{ij}\bar{r}^{-1})\bar{r}], \text{ iar } \rho = \rho^{-1}\rho_{\bar{r}}\rho'\varphi.$$

Pe de altă parte, $(u_{\bar{r}}, \rho_{\bar{r}}) = \varphi'(u_r, \rho_r)$, adică

$$\varphi'(u_r, \rho_r)\, (u', \rho') = \varphi'(u, \rho),$$

care conduce la cerința condiției a).

§ 3. Consecințe

1. Cînd pentru orice dimorfism $(u, \rho) \in \mathcal{S}$ se ia $\rho = 1_A$, atunci dimorfismele se identifică cu endomorfismele modulului M. Cu operația de adunare dată obișnuit, se obține inelul endomorfismelor $E(M)$. Dacă în plus R reprezintă mulțimea tuturor elementelor regulate, A_R fiind inel de cîturi la stînga, din teorema 1 se obține teorema 1 din [9], iar cînd A este inel prim se obține partea a doua a teoremei 2 din [9].

2. Dacă, mai mult, A este domeniu de integritate și inelele de cîturi bilaterale sînt egale, se obține teorema 1 din [5], amintită în introducere.

3. Dacă A este inel subcomutativ la stînga, putem pune efectiv în evidență o familie de automorfisme care să păstreze elementele regulate. Într-adevăr, subcomutativitatea la stînga înseamnă că oricare ar fi elementele r, $x \in Q$, există $y \in A$ așa fel încît $rx = yr$.

Să notăm ρ_r corespondența $\rho_r : x \to y$ pentru un r fixat.

Teorema 2. *Dacă r este un element regulat în inelul subcomutativ la stînga A, corespondența $\rho_r : x \to y$ este un automorfism. Fie r_1, r_2 regulate; atunci $\rho_{r_1}\rho_{r_2} = \rho_{r_1 r_2}$. Dacă produsul a două elemente regulate este comutativ, automorfismul ρ_r are proprietatea $\rho_r(r') = r'$ pentru orice r' regulat.*

Demonstrație. Corespondența ρ_r este univocă. Într-adevăr, să presupunem că $r, x \in A \Rightarrow \exists\, y_1 \in A$ încît $rx = y_1 r$; mai presupunem că ar exista și y_2 așa ca $rx = y_2 r$; prin scădere avem $y_1 r - y_2 r = 0$ și cum r este

regulat, conduce la $y_1 = y_2$, deci ρ_r este univocă. Arătăm mai departe că aplicația ρ_r păstrează operațiile: fie $y_1 = \rho_r(x_1)$ și $y_2 = \rho_r(x_2)$, adică

$$rx_1 = y_1 r, \qquad rx_2 = y_2 r; \tag{2}$$

fie apoi

$$r(x_1 x_2) = yr, \tag{3}$$

adică $\rho_r(x_1 x_2) = y$. Dacă folosim (2), din (3) avem:

$$r(x_1 x_2) = (rx_1)x_2 = (y_1 r)x_2 = y_1(rx_2) = y_1(y_2 r) = (y_1 y_2)r = yr;$$

cum r este regulat, rezultă $y_1 y_2 = y$, adică $\rho_r(x_1 x_2) = \rho_r(x_1) \cdot \rho_r(x_2)$.

Dacă $r(x_1 + x_2) = zr$, avem:

$$r(x_1 + x_2) = rx_1 + rx_2 = y_1 r + y_2 r = (y_1 + y_2)r = zr \Rightarrow y_1 + y_2 = z,$$

adică $\rho_r(x_1 + x_2) = \rho_r(x_1) + \rho_r(x_2)$.

Homomorfismul ρ_r este chiar izomorfism, adică $\rho_r(x_1) = \rho_r(x_2) \to x_1 = x_2$. Într-adevăr, dacă am presupune că ar exista două elemente x_1, x_2 încît

$$rx_1 = yr$$

$$rx_2 = yr,$$ atunci $x_1 = x_2$ și deci ρ_r este automorfism.

Fie r_1, r_2 elemente regulate și ρ_{r_1}, ρ_{r_2} automorfismele corespunzătoare. Dacă $x \in A$ este oarecare, avem $r_1 x = \rho_{r_1}(x) r_1$, $r_2 x = \rho_{r_2}(x) r_2$ și $(r_1 r_2)x = \rho_{r_1 r_2}(x)(r_1 r_2)$. Din ultima egalitate conchidem:

$$(r_1 r_2)x = r_1(r_2 x) = r_1(\rho_{r_2}(x) r_2) = [r_1 \rho_{r_2}(x)] r_2 =$$

$$= [\rho_{r_1}\rho_{r_2}(x)]\, r_1 r_2 = \rho_{r_1 r_2}(x) r_1 r_2, \text{ de unde } \rho_{r_1}\rho_{r_2} = \rho_{r_1 r_2}.$$

Dacă, în plus, pentru orice element regulat r' avem: $rr' = r'r$, înseamnă că $\rho_r(r') = r'$.

Un rezultat asemănător are loc dacă inelul A este subcomutativ la dreapta sau subcomutativ.

4. Presupunem că sînt îndeplinite ipotezele teoremei 2.

Fie r un element regulat. Îi asociem omotetia $h_r(x) = rx$. Se știe [2] că această aplicație nu este în general liniară; cu ipotezele noastre, ea este în schimb semiliniară. Într-adevăr,

$$h_r(x + y) = h_r(x) + h_r(y)$$

și

$$h_r(\lambda x) = \rho_r(\lambda)\, h_r(x),$$

unde ρ_r este automorfismul din teorema precedentă.

5. Dacă inelul A este subcomutativ la stînga și elementele regulate au produsul comutativ și dacă în definiția aplicației u_r, pentru r regulat din § 2, considerăm ρ_r dat de teorema 2, atunci $u_r = h_r$, unde h_r este omotetia de mai sus.

BIBLIOGRAFIE

1. Barbilian D. — *Teoria aritmetică a idealelor (în inele necomutative)*. Ed. Acad., București, 1956.
2. Bourbaki N. — *Algèbre*, chap. 2. Hermann, Paris, 1962.
3. Bucur I. — *Sur le théorème de décomposition de Lasker-Noether dans les anneaux subcommutatifs*. Rev. Math. pures et appliquées, t. VIII, (1963), p. 565—568.
4. Faith C. and Utumi Y. — *On noetherian rings*. Trans. Amer. Math. Soc., t. 114, 1 (1965), p. 53—60.
5. Feller E. H. and Swokowski E. W. — *The ring of endomorphisms of torsion-free modules*. J. London Math. Soc., 39 (1964), p. 41—42.
6. Galbură Gh. și Ion D. I. — *Asupra localizării descompunerilor primare în subcomutativ*. An. Univ. București, seria matematică-mecanică, nr. 1, 1966.
7. Goldie A. W. — *Semiprime rings with maximum condition*. Proc. London Math. Soc., 10 (1960), p. 201—220.
8. — *The structure of prime rings under ascending chain conditions*. Proc. London Math. Soc., 8 (1958), p. 589—608.
9. Hart R. — *Endomorphisms of modules over semi-prime rings*. J. Algebra, 4 (1966), p. 46—51.
10. Ion D. I. — *Sur les demi-groupes des fractions dans le cas subcommutatif*. Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R.S. de Roumanie, Tome 9 (57), (1965), p. 3—12.
11. Янин Е. С. — *Полугруппы*. Москва, 1962.
12. Öre O. — *Linear equations in non-commutative fields*. Ann. of Math. t. 32(1931), p. 463—477.
13. Zelmanowitz J. M. — *Endomorphism rings of torsionless modules*. J. Algebra, 5 (1967), p. 325—341.

A GENERALIZATION OF A THEOREM OF FELLER-SWOKOWSKI

Summary

In this Note (theorem 1) the author extends a theorem of Feller-Swokowski ([5], theorem 1) for the semigroup of the dimorphisms ([2], 1.13) of a module and gives a nontrivial example (theorem 2).