CÎMPURI PESTE UN SIT

DE

GH. RADU

În tot ce urmează se fixează un univers $\mathfrak{U}$ astfel încît toate categoriile care apar pe parcurs sînt $\mathfrak{U}$-categorii mici. Precizăm că notațiile, de care facem uz, sînt cele folosite în [2]; în particular, prin Cat, vom nota categoria $\mathfrak{U}$-categoriilor mici.

Dăm, fără demonstrație, următoarea teoremă:

Teorema 1. *Fie în categoria* Cat, *diagrama comutativă,*

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "b"] \arrow[dr, "c"'] & \bullet \arrow[d, "a"] \\ & \bullet \end{tikzcd}$$

Următoarele afirmații sînt adevărate:

i) *Dacă c este un functor deplin fidel și a este fidel, atunci și b este deplin fidel.*

ii) *Dacă c este o echivalență de categorii, iar a este deplin fidel, atunci b este o echivalență de categorii.*

Fie $(\mathcal{S}, \tau)$ un sit element al lui $\mathfrak{U}$. O $\mathcal{S}$-categorie $(\mathcal{F}, p)$ prefibrată (fibrată) se numește precîmp (cîmp) peste situl $\mathcal{S}$, dacă pentru oricare obiect S din $\mathcal{S}$ și oricare ciur acoperitor $\mathcal{R}$ al lui S, functorul restricție $\underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}\,(\mathcal{S}/S, \mathcal{F}) \to \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}\,(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ este deplin fidel (respectiv, o echivalență de categorii).

Teorema 2. *Fie* $(\mathcal{F}, p)$ *și* $(\mathcal{G}, q)$ *două* $\mathcal{S}$*-cîmpuri peste situl* $(\mathcal{S}, \tau)$. *Atunci și produsul fibrat,* $\mathcal{F} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{G}$ *este* $\mathcal{S}$*-cîmp.*

Demonstrație. Fie în Cat diagrama carteziană,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_{\mathcal{S}} \times \mathcal{G} \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "q'"] & \mathcal{G} \arrow[d, "q"] \\ \mathcal{F} \arrow[r, "p"] & \mathcal{S} \end{tikzcd}$$

Dacă $\mathcal{F}$ și $\mathcal{G}$ sînt $\mathcal{S}$-categorii fibrate, se construiește în mod canonic o $\mathcal{S}$-fibrare pe $\mathcal{F}_{\mathcal{S}} \times \mathcal{G}$, în raport cu functorul $q \circ p' = p \circ q'$.

Fie S un obiect oarecare din $\mathcal{S}$, și $\mathcal{R}$ un ciur acoperitor al lui S în topologia τ. Din ipoteză rezultă că avem echivalențele de categorii,

$$\varphi_1 : \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/S, \mathcal{F}) \xrightarrow{\simeq} \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{R}, \mathcal{F}),$$

$$\varphi_2 : \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/S, \mathcal{F}) \xrightarrow{\simeq} \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{R}, \mathcal{G}).$$

Avem în Cat următoarea diagramă comutativă

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/S, \mathcal{F}_{\mathcal{S}} \times \mathcal{G}) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\rho_1"] & \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{R}, \mathcal{F}_{\mathcal{S}} \times \mathcal{G}) \arrow[d, "\rho_2"] \\ \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/S, \mathcal{F}) \times \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/S, \mathcal{G}) \arrow[r, "(\varphi_1, \varphi_2)"] & \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{R}, \mathcal{F}) \times \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{R}, \mathcal{G}) \end{tikzcd}$$

în care ρ_1 și ρ_2 sînt izomorfisme de categorii, iar (φ_1, φ_2) echivalență de categorii. Rezultă atunci, conform cu teorema 1 că ψ este o echivalență de categorii, adică $\mathcal{F}_{\mathcal{S}} \times \mathcal{G}$ este un cîmp peste situl $\mathcal{S}$.

Observație. Teorema este adevărată și pentru $\mathcal{S}$-precîmpuri.

Teorema 3. *Fie $(\mathcal{S}, \tau)$ un sit element al lui $\mathfrak{A}$, $(\mathcal{G}, q)$ un $\mathcal{S}$-precîmp iar $(\mathcal{F}, p)$ o $\mathcal{S}$-categorie fibrată.*

Dacă $h : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ este un $\mathcal{S}$-functor deplin fidel și cartezian, atunci $(\mathcal{F}, p)$ este un precîmp.

Dacă $h : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ este o $\mathcal{S}$-echivalență, $(\mathcal{G}, q)$ un $\mathcal{S}$-cîmp, atunci $(\mathcal{F}, p)$ este $\mathcal{S}$-cîmp.

Demonstrație. Fie S un obiect orecare din $\mathcal{S}$ și $\mathcal{R}$ un ciur acoperitor al lui S în topologia τ. Pentru demonstrație, să considerăm diagrama comutativă în Cat.

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/S, \mathcal{F}) \arrow[r, "\underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(j, \mathcal{F}) = \sigma_4"] \arrow[d, "\sigma_2 = \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/S, h)"'] & \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{R}, \mathcal{F}) \arrow[d, "\underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{R}, h) = \sigma_1"] \\ \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/S, \mathcal{G}) \arrow[r, "\underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(j, \mathcal{G}) = \sigma_3"] & \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{R}, \mathcal{G}) \end{tikzcd}$$

unde cu j se notează functorul de incluziune, $j : \mathcal{R} \to \mathcal{S}/S$.

Vom demonstra că dacă $h : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ este deplin fidel, atunci și functorii σ_1 și σ_2 sînt deplin fideli.

Fie F un obiect din categoria $\underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/S, \mathcal{F})$. Definim $\sigma_2(F) = h \circ F$, iar dacă $\varphi : F_1 \to F_2$ este un morfism în categoria $\underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/S, F)$ definim $\sigma_2(\varphi)$ ca fiind morfismul functorial de componente $(\sigma_2(\varphi))x = h(\varphi x)$ unde X este un obiect oarecare din $\mathcal{S}/S$. Dacă φ_1 și φ_2 sînt $\mathcal{S}$-morfisme functoriale diferite, de la $\mathcal{S}$-functorul F_1 la $\mathcal{S}$-functorul F_2, atunci există un obiect X_0 în $\mathcal{S}/S$, astfel încît $(\varphi_1)x_0$, $(\varphi_2)x_0$ sînt două morfisme diferite în $\mathcal{F}$. Deoarece h este prin ipoteză un functor deplin fidel, rezultă că $\sigma_2(\varphi_1) \neq \sigma_2(\varphi_2)$, adică σ_2 este un functor fidel. Dat fiind un morfism functorial $\psi : \sigma_2(F_1) \to \sigma_2(F_2)$, există un morfism functorial $\varphi : F_1 \to F_2$ și $\sigma_2(\varphi) = \psi$ conform ipotezei făcute asupra lui h și deci σ_2 este deplin fidel.

În mod analog se demonstrează că σ_1 este deplin fidel în ipoteza că h este deplin fidel.

Dacă $\mathcal{G}$ este precîmp, atunci σ_3 este un functor deplin fidel și conform teoremei 1 rezultă că σ_4 este deplin fidel, adică $\mathcal{F}$ este $\mathcal{S}$-precîmp.

Dacă h este $\mathcal{S}$-echivalență de categorii, atunci pentru oricare obiect $\tilde{F}$ din $\underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/S, \mathcal{G})$ putem defini un obiect F în $\underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/S, \mathcal{F})$ încît $h \circ F$ este izomorf cu $\tilde{F}$.

În adevăr, să alegem pentru oricare obiect x din $\mathcal{S}/S$ un obiect y din $\mathcal{F}$ cu proprietatea că

$$(*) \qquad h(y) \approx \tilde{F}(x)$$

Definim atunci $f(x) = y$. Dacă $f : x_1 \to x_2$ este un morfism din $\mathcal{S}/S$ și dacă $\theta_1 : h(y_1) \to \tilde{F}(x_1)$, $\theta_2 : h(y_2) \to \tilde{F}(x_2)$ sînt izomorfismele din $(*)$, atunci, deoarece h este deplin fidel, există un morfism unic $u : y_1 \to y_2$, astfel încît

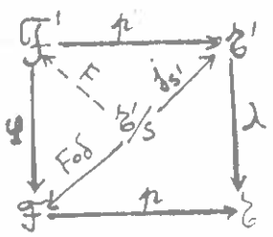
$$h(u) = \theta_2^{-1} \tilde{F}(f) \cdot \theta_1.$$

Definim atunci $F(f) = u$; F astfel definit este un $\mathcal{S}$ functor cartezian, căci $h(u)$ este cartezian și h este deplin fidel. Avem $h \circ F \approx \tilde{F}$ și deci σ_2 este o echivalență.

În consecință, dacă $\mathcal{G}$ este $\mathcal{S}$-cîmp, conform cu teorema 1 din egalitatea $\sigma_1 \circ \sigma_4 = \sigma_3 \circ \sigma_2$ rezultă că σ_4 este echivalență, adică $\mathcal{F}$ este $\mathcal{S}$-cîmp.

Teorema 4. *Fie în* Cat *diagrama carteziană*

(D)



unde $\mathcal{S}$ și $\mathcal{S}'$ sînt siturі, elemente ale lui $\mathfrak{A}$ cu topologiile τ (resp. τ'), iar λ este un functor continuu și discret. Atunci, dacă $\mathcal{F}$ este $\mathcal{S}$-cîmp (resp. $\mathcal{S}$-precîmp) rezultă că $\mathcal{F}'$ este $\mathcal{S}'$-cîmp (resp. $\mathcal{S}'$-precîmp).

Demonstrație. Deja se cunoaște, că dacă în diagrama carteziană (D), $\mathcal{F}$ este o $\mathcal{S}$-categorie fibrată (resp. prefibrată), atunci $\mathcal{F}'$ este o $\mathcal{S}'$-categorie fibrată (resp. prefibrată). Mai avem să demonstrăm că dacă S' este un obiect din $\mathcal{S}'$, iar $\mathcal{R}'$ este o rafinare oarecare a lui S' în topologia τ', atunci avem o echivalență

$$\rho : \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}'}(\mathcal{S}'/S', \mathcal{F}') \xrightarrow{\simeq} \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}'}(\mathcal{R}', \mathcal{F}')$$

indusă de functorul incluziune, $\mathcal{R}' \to \mathcal{S}'/S'$.

Fie $S = \lambda(S')$ și $f' : T' \to S'$ un obiect oarecare al ciurului $\mathcal{R}'$.

Observație. Ciurul $\mathcal{R}$ generat de familia de morfisme, $f = \lambda(f') : T \to S$ unde $f' \in \mathcal{R}'$, este acoperitor în topologia lui $\mathcal{S}$ și singurele obiecte din $\mathcal{R}$ sînt de forma $\lambda(f')$ pentru că λ este discret.

Notăm cu δ, izomorfismul indus de functorul discret λ:

$$\delta : \mathcal{S}'/S' \to \mathcal{S}/S.$$

Definim în continuare izomorfismele de categorii ρ_1 și ρ_2

$$\rho_1 : \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}'}(\mathcal{S}'/S', \mathcal{F}') \xrightarrow{\simeq} \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/S, \mathcal{F}),$$

$$\rho_2 : \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}'}(\mathcal{R}', \mathcal{F}') \xrightarrow{\simeq} \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{R}, \mathcal{F})$$

Fie $F' : \mathcal{S}'/S' \to \mathcal{F}'$ un $\mathcal{S}'$-functor cartezian.

Definim $\rho_1(F') = F$ ca fiind unicul $\mathcal{S}$-functor cartezian $F : \mathcal{S}/S \to \mathcal{F}$ ce face comutativă diagrama carteziană D.

Explicit, dacă (T, f) este un obiect din $\mathcal{S}/S$, atunci există (unic) un obiect (T', f') în $\mathcal{S}'/S'$ cu $\lambda(f') = f$, și definim $F(T, f) = \varphi(F'(T', f')) = \varphi F' \delta^{-1}(T, f)$.

Dacă $u : (T_1, f_1) \to (T_2, f_2)$ este un morfism în $\mathcal{S}/S$ atunci, pentru că λ este discret, există unic un morfism $u' : (T_1', f_1') \to (T_2', f_2')$ în $\mathcal{S}'/S'$ astfel că $\delta(u') = u$.

Definim $F(u) = \varphi F'(u')$; cu precizările făcute, este evident că F este un functor cartezian.

Fie $\eta' : F_1' \to F_2'$ un $\mathcal{S}'$-morfism functorial, iar $F_1 = \rho_1(F_1')$, $F_2 = \rho_1(F_2')$. Definim $\rho_1(\eta') = \eta : F_1 \to F_2$ ca fiind $\mathcal{S}$-morfismul functorial de componente $\eta(T, f) = \varphi(\eta'(T', f'))$.

Avem astfel definit functorul ρ_1. Verificăm în continuare că functorul ρ_1 este deplin fidel. În acest scop, fie $\eta_1', \eta_2' : F_1' \to F_2'$, $\mathcal{S}'$-morfisme functoriale diferite. Există deci un obiect (T', f') în $\mathcal{S}'/S'$ astfel că avem $\eta_1'(T', f') \neq \eta_2'(T', f')$. Folosind din nou faptul că λ este discret, rezultă imediat că

$\mathcal{S}$-morfismele functoriale $\eta_1, \eta_2 : F_1 \to F_2$ corespunzătoare prin ρ_1, $\mathcal{S}'$-morfismelor η_1', η_2', diferă pentru obiectul (T, f) din $\mathcal{S}/S$; $(T, f) = \delta(T', f')$. Am demonstrat astfel că ρ_1 este fidel.

Fie $F_1 = \rho_1(F_1')$, $F_2 = \rho_1(F_2')$ și $\eta : F_1 \to F_2$ un $\mathcal{S}$-morfism functorial. Definim un $\mathcal{S}'$-morfism functorial, $\eta' : F_1' \to F_1'$ după cum urmează. Dacă $\eta : F_1 \to F_2$ este un $\mathcal{S}$-morfism functorial, atunci $p(\eta(T, f)) = 1_{(T, F)}$. Din diagrama carteziană (D) rezultă că dacă (T', f') este un obiect din $\mathcal{S}'/S'$ avem $F_1(T', f') = (F_1(T, f), T')$, $F_2(T', f') = (F_2(T, f), T')$, unde $T = \lambda(T')$, $(T, f) = \delta(T', f')$, adică $f = \lambda(f')$.

Se definește atunci $\mathcal{S}'$-morfismul functorial η', ca avînd componentele $\eta'(T', f') = (\eta(T, f), 1_{T'})$. În plus, este evident că $\rho_1(\eta') = \eta$. Am arătat astfel că ρ_1 este deplin fidel. În sfîrșit, ρ_1 este un izomorfism de categorii, fapt ce rezultă din diagrama carteziană (D). Un raționament complet analog, folosind observația făcută la începutul demonstrației, ne conduce la izomorfismul ρ_2. Am obținut astfel următorul șir de izomorfisme în Cat

$$\underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}'}(\mathcal{S}'/S', \mathcal{F}') \xrightarrow{\rho_1} \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/S, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sigma} \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{R}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\rho_2^{-1}}$$

$$\xrightarrow{\rho_2^{-1}} \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}'}(\mathcal{R}', \mathcal{F}'),$$

unde ρ_2^{-1} este inversul izomorfismului ρ_2, σ este morfismul indus de incluziunea $\mathcal{R} \to \mathcal{S}/S$. Este evident că $\rho_2^{-1}\sigma_1$ coincide cu functorul indus de functorul de incluziune $\mathcal{R}' \to \mathcal{S}'/S'$, adică $\rho = \rho_2^{-1}\sigma\rho_1$. În consecință, dacă $\mathcal{F}$ este $\mathcal{S}$-cîmp (resp. $\mathcal{S}$-precîmp), atunci σ este echivalență (resp. un functor deplin fidel) și deci $\mathcal{F}'$ este $\mathcal{S}'$-cîmp (resp. $\mathcal{S}'$-precîmp).

Observația 1. Fie $\mathcal{S}$ o $\mathfrak{A}$-categorie și S un obiect oarecare din $\mathcal{S}$, fie $j_S : \mathcal{S}/S \to \mathcal{S}$ functorul sursă, despre care se știe că este discret. Dacă $\mathcal{S}$ este un sit cu topologia τ iar pe categoria $\mathcal{S}/S$ considerăm topologia indusă de functorul sursă, atunci dacă $(\mathcal{F}, p)$ este un $\mathcal{S}$-cîmp (resp. $\mathcal{S}$-precîmp), rezultă că și $(\mathcal{F}', p')$, unde $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}/S$, este $\mathcal{S}/S$-cîmp (resp. $\mathcal{S}/S$-precîmp).

Observația 2. Dacă $\mathcal{S}$ este un sit cu topologia τ, iar F este un prefascicul de mulțimi definit pe $\mathcal{S}$, se definește [4] functorul sursă generalizat $j_F : \mathcal{S}/F \to \mathcal{S}$ care este de asemenea discret și avem prin urmare un rezultat analog celui din Observația 1.

BIBLIOGRAFIE

1. Verdier Jean-Louis — *Sites et faisceaux*. Séminaire de Géométrie Algébrique. Exposé 6, I.H.E.S., 1963—1964.

2. Giraud Jean — *Cohomologie non abélienne de degré 2*. (Thèse)

3. Gray J. W. — *Fibred and Cofibred Categories*. Proc. of the Conf. on Categorical Algebra. La Jola, 1965.
4. Radu Gh. — *Functorul sursă generalizat*. Studii şi cercetări matematice, nr. 9, tom 21, 1969.

CHAMPS SUR DES SITES

Résumé

Dans cet article on prouve le

Théorème. *Pour un foncteur $u : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ où $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ sont des sites et u un foncteur continu et discret, le descent d'un préchamp (resp. champ) sur $\mathcal{S}'$ est un préchamp (resp. champ) sur $\mathcal{S}$.*

FUNCTORI BIACOPERITORI

DE

GH. RADU

Fixăm un univers $\mathfrak{U} \neq \Phi$ şi toate categoriile considerate vor fi presupuse elemente ale lui $\mathfrak{U}$.

Reamintim ([1]) că dacă $(\mathcal{S}, \tau)$ este un $\mathfrak{U}$-sit mic, atunci $\mathcal{S}$-categoria fibrată X se numeşte $\mathcal{S}$-cîmp ($\mathcal{S}$-precîmp), dacă topologia τ este mai puţin fină ca topologia de X-desant efectiv universal (resp. X-desant universal) a lui $\mathcal{S}$ adică, dacă pentru oricare $S \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S})$ şi oricare $\mathcal{R} \in \tau(S)$ functorul restricţie

$$\underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/S, X) \to \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{R}, X) \tag{1}$$

este o echivalenţă de categorii (functor deplin fidel).

Dacă $\mathcal{F}$ şi $\mathcal{G}$ sînt două $\mathcal{S}$-categorii fibrate iar $u : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un $\mathcal{S}$-functor cartezian, vom spune că u este un functor biacoperitor dacă pentru oricare $\mathcal{S}$-cîmp X, functorul restricţie

$$\underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{G}, X) \to \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{F}, X) \tag{2}$$

este o echivalenţă de categorii.

Din (1) rezultă imediat că dacă $\mathcal{R} \in \tau(S)$ atunci functorul de incluziune canonică $\mathcal{R} \to \mathcal{S}/S$ este un functor biacoperitor; la fel orice echivalenţă este un functor biacoperitor.

Dacă P este un obiect din $\mathcal{S}^\wedge$ atunci $\mathcal{S}$-categoria scindată asociată lui P se poate, evident, identifica cu $\mathcal{S}$-categoria $\mathcal{S}/P = \mathcal{S}^\wedge/P \underset{\mathcal{S}^\wedge}{\times} \mathcal{S}$, iar dacă $m : P \to Q$ este un morfism din $\mathcal{S}^\wedge$ atunci există un $\mathcal{S}$-functor canonic $\mathcal{S}/m : \mathcal{S}/P \to \mathcal{S}/Q$ de $\mathcal{S}$-categorii scindate ce face comutativă diagrama