3. Gray J. W. — *Fibred and Cofibred Categories*. Proc. of the Conf. on Categorical Algebra. La Jolla, 1965.
4. Radu Gh. — *Functorul sursă, generalizat*. Studii și cercetări matematice, nr. 9, tom 21, 1969.

CHAMPS SUR DES SITES

Résumé

Dans cet article on prouve le

Théorème. *Pour un foncteur $u : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ où $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ sont des sites et u un foncteur continu et discret, le descent d'un préchamp (resp. champ) sur $\mathcal{S}'$ est un préchamp (resp. champ) sur $\mathcal{S}$.*

FUNCTORI BIACOPERITORI

DE

GH. RADU

Fixăm un univers $\mathfrak{U} \neq \Phi$ și toate categoriile considerate vor fi presupuse elemente ale lui $\mathfrak{U}$.

Reamintim ([1]) că dacă $(\mathcal{S}, \tau)$ este un $\mathfrak{U}$-sit mic, atunci $\mathcal{S}$-categoria fibrată X se numește $\mathcal{S}$-cîmp ($\mathcal{S}$-precîmp), dacă topologia τ este mai puțin fină ca topologia de X-desant efectiv universal (resp. X-desant universal) a lui $\mathcal{S}$ adică, dacă pentru oricare $S \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S})$ și oricare $\mathcal{R} \in \tau(S)$ functorul restricție

$$\underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/S, X) \to \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{R}, X) \tag{1}$$

este o echivalență de categorii (functor deplin fidel).

Dacă $\mathcal{F}$ și $\mathcal{G}$ sînt două $\mathcal{S}$-categorii fibrate iar $u : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un $\mathcal{S}$-functor cartezian, vom spune că u este un functor biacoperitor dacă pentru oricare $\mathcal{S}$-cîmp X, functorul restricție

$$\underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{G}, X) \to \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{F}, X) \tag{2}$$

este o echivalență de categorii.

Din (1) rezultă imediat că dacă $\mathcal{R} \in \tau(S)$ atunci functorul de incluziune canonică $\mathcal{R} \to \mathcal{S}/S$ este un functor biacoperitor; la fel orice echivalență este un functor biacoperitor.

Dacă P este un obiect din $\mathcal{S}^\wedge$ atunci $\mathcal{S}$-categoria scindată asociată lui P se poate, evident, identifica cu $\mathcal{S}$-categoria $\mathcal{S}/P = \mathcal{S}^\wedge/P \times_{\mathcal{S}^\wedge} \mathcal{S}$, iar dacă $m : P \to Q$ este un morfism din $\mathcal{S}^\wedge$ atunci există un $\mathcal{S}$-functor canonic $\mathcal{S}/m : \mathcal{S}/P \to \mathcal{S}/Q$ de $\mathcal{S}$-categorii scindate ce face comutativă diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}/P \arrow[r, "\mathcal{S}/m"] \arrow[d] & \mathcal{S}/Q \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S} \arrow[d, "h"] \\ \mathcal{S}^\frown/P \arrow[r] & \mathcal{S}^\frown/Q \arrow[r] & \mathcal{S}^\frown \end{tikzcd}$$

Teorema 1. *Dacă $m : P \to Q$ este un morfism biacoperitor în topologia τ, atunci $\mathcal{S}$-functorul $\mathcal{S}/m : \mathcal{S}/P \to \mathcal{S}/Q$ este biacoperitor.*

Demonstrație. Presupunem mai întîi că m este monomorfism biacoperitor, deci pentru oricare $S \in Ob(\mathcal{S})$, $P'_S = P_Q \times h_S \to h_S$ este o rafinare a lui S. Dacă P''_S este subcategoria plină a lui $\mathcal{S}/S$ asociată lui P'_S atunci evident, $P''_S \approx \mathcal{S}/P'_S$ iar $\mathcal{S}/h_S \approx \mathcal{S}/S$, căci h este deplin fidel și deci functorul $\mathcal{S}/P'_S \to \mathcal{S}/h_S$ este biacoperitor, pentru că ciurul $P''_S \to \mathcal{S}/S$ este de X-desant efectiv universal, oricare ar fi $\mathcal{S}$-cîmpul X.

Dacă $Q = \varinjlim h_S$ atunci $\mathcal{S}/Q = \varinjlim \mathcal{S}/h_S$, $\mathcal{S}/P = \varinjlim \mathcal{S}/P'_S$ și totul rezultă din diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/Q, X) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/P, X) \arrow[d, phantom, "\wr"] \\ \varprojlim \mathrm{Cart}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/h_S, X) \arrow[r, "\sim"] & \varprojlim \mathrm{Cart}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/P'_S, X) \end{tikzcd}$$

Dacă m este epimorfism biacoperitor, atunci în $\mathcal{S}^\frown$ există diagrama exactă

$$P \xrightarrow{\Delta} P_Q \times P \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} P \xrightarrow{m} Q,$$

de unde diagrama exactă de categorii scindate,

$$\mathcal{S}/P \xrightarrow{\mathcal{S}/\Delta} \mathcal{S}/P_Q \times P \underset{\mathcal{S}/\beta}{\overset{\mathcal{S}/\alpha}{\rightrightarrows}} \mathcal{S}/P \xrightarrow{\mathcal{S}/m} \mathcal{S}/Q.$$

Cum Δ este monomorfism biacoperitor, $\mathcal{S}/\Delta$ este functor biacoperitor și deci pentru oricare $\mathcal{S}$-cîmp X functorul

$$\underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/\Delta, X) : \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/P_Q \times P, X) \to \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/P, X)$$

este o echivalență de categorii.

Din diagrama exactă

$$\underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/Q, X) \xrightarrow{\underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/m, X)} \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/P, X) \underset{\underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/\beta, X)}{\overset{\underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/\alpha, X)}{\rightrightarrows}}$$

$$\underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/P_Q \times P, X) \xrightarrow{\underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/\Delta, X)} \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/P, X)$$

rezultă că, $\underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/\alpha, X) = \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/\beta, X)$ și deci $\underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/m, X)$ este o echivalență de categorii.

Cazul general se reduce la cele două cazuri precedente căci m se poate scrie sub forma unui produs dintre un epimorfism biacoperitor și un monomorfism biacoperitor și evident, compunerea a doi functori biacoperitori este și ea un functor biacoperitor.

Observație. Dacă $m : P \to Q$ este un monomorfism acoperitor (deci biacoperitor) în topologia τ atunci pentru oricare $\mathcal{S}$-precîmp X, functorul restricție,

$$\underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/Q, X) \to \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/P, X)$$

este deplin fidel.

Teorema 2. *Fie $\mathcal{S}$ un sit și $u : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un $\mathcal{S}$-functor cartezian surjectiv pe obiecte între două $\mathcal{S}$-categorii fibrate. Dacă $\mathcal{F}$ este $\mathcal{S}$-cîmp, atunci u este functor biacoperitor dacă și numai dacă admite un quasi-univers la stînga.*

Demonstrație. Necesitatea rezultă imediat din următoarea echivalență de categorii

$$\underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{G}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{F}, \mathcal{F}).$$

Reciproc, fie $v : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ un $\mathcal{S}$-functor cartezian astfel încît $vu \approx 1_{\mathcal{F}}$. Rezultă de aici imediat, că pentru oricare $\mathcal{S}$-cîmp X functorul restricție,

$$\underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{G}, X) \xrightarrow{\theta} \underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{F}, X)$$

este esențial surjectiv, căci dacă f este un obiect din $\underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{F}, X)$ atunci $\theta(fv) = fvu \approx f$.

Dacă

$$\mathcal{G} \underset{g}{\overset{f}{\underset{\downarrow m \downarrow n}{\rightrightarrows}}} X$$

sînt două morfisme din $\underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{G}, X)$ astfel încît $m \ast u = n \ast u$ atunci $m = n$ căci u este surjectiv pe obiecte.

În sfîrșit, dacă

$$\mathcal{F} \underset{gu}{\overset{fu}{\underset{\downarrow m'}{\rightrightarrows}}} X$$

este un morfism din $\underline{\mathrm{Cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{F}, X)$ atunci morfismul

$$\mathcal{G} \underset{g}{\overset{f}{\underset{\downarrow m}{\rightrightarrows}}} X$$

definit prin $m(x) = m(u(x')) = m'(x')$, $x \in Ob(\mathcal{G})$, $x' \in Ob(\mathcal{F})$, are proprietatea că $m \ast u = m'$.

BIBLIOGRAFIE

1. Giraud Jean — *Cohomologie non abélienne de degré 2*. (thèse).
2. Verdier Jean-Louis — *Sites et Faisceaux*. Séminaire de Géometrie Algébrique, Exposé 4. I.H.E.S. 1963—1964.

FONCTEURS BICOUVRANTS

Résumé

Soit $(\mathcal{S}, \tau)$ un site élément d'un univers fixé $\mathfrak{U}$. Si $m : P \to Q$ est un morphisme bicouvrant dans $\mathcal{S}^\frown$, alors le foncteur canonique $\mathcal{S}/m$ des catégories scindées, associées aux préfaisceaux P et Q, $\mathcal{S}/m : \mathcal{S}/P \to \mathcal{S}/Q$ est bicouvrant.

COMPACITÉ DANS LES ESPACES BITOPOLOGIQUES

PAR

T. BÎRSAN

Communication présentée à la session scientifique de l'Université „Al. I. Cuza" de 15 — 27 octobre 1968

La notion d'espace bitopologique a été introduite en 1963 par J. C. Kelly [4]. Des propriétés de séparation de ces espaces se sont occupé J. C. Kelly [4] et E. P. Lane [5, 6]. Les espaces bitopologiques connexes ont été étudiés par W. J. Pervin [7] et par moi-même [1].

Dans cette Note nous définissons les notions d'espace bitopologique compact et d'espace bitopologique localement compact et indiquons quelques propriétés.

I. Espaces bitopologiques compacts

1. Définitions. Exemples

Il est facile de voir qu'on peut substituer l'axiome de définition d'un espace topologique compact par l'axiome suivant:

Pour tout recouvrement ouvert il existe un recouvrement ouvert plus fin et fini.

Cette remarque suggère la

Définition 1. *Un espace bitopologique* $(X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ *est* $\mathfrak{P}$*-compact par rapport à* $\mathfrak{Q}$ *s'il vérifie l'axiome suivant:*

Pour tout recouvrement $\mathfrak{P}$*-ouvert de* X *il existe un recouvrement* $\mathfrak{Q}$*-ouvert plus fin et fini.*

L'espace $(X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ *est réciproquement compact s'il est* $\mathfrak{P}$*-compact par rapport à* $\mathfrak{Q}$ *et* $\mathfrak{Q}$*-compact par rapport à* $\mathfrak{P}$.

Remarques. **1.** De façon analogue, un espace bitopologique $(X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ *est* $\mathfrak{P}$*-Lindelöf par rapport à* $\mathfrak{Q}$ ($\mathfrak{P}$*-paracompact par rapport à* $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{P}$*-métacompact par rapport à* $\mathfrak{Q}$) si pour tout recouvrement $\mathfrak{P}$-ouvert de X il existe un recouvrement $\mathfrak{Q}$-ouvert plus fin et dénombrable (localement fini, ponctuellement fini).