BIBLIOGRAFIE

1. Giraud Jean — *Cohomologie non abélienne de degré* 2. (thèse).
2. Verdier Jean-Louis — *Sites et Faisceaux*. Séminaire de Géométrie Algébrique. Exposé 4. I.H.E.S. 1963—1964.

FONCTEURS BICOUVRANTS

Résumé

Soit $(\mathcal{S}, \tau)$ un site élément d'un univers fixé $\mathcal{U}$. Si $m : P \to Q$ est un morphisme bicouvrant dans $\mathcal{S}^\wedge$, alors le foncteur canonique $\mathcal{S}/m$ des catégories scindées, associées aux préfaisceaux P et Q, $\mathcal{S}/m : \mathcal{S}/P \to \mathcal{S}/Q$ est bicouvrant.

COMPACITÉ DANS LES ESPACES BITOPOLOGIQUES

PAR

T. BÎRSAN

Communication présentée à la session scientifique de l'Université „Al. I. Cuza" de 15 — 27 octobre 1968

La notion d'espace bitopologique a été introduite en 1963 par J. C. Kelly [4]. Des propriétés de séparation de ces espaces se sont occupé J. C. Kelly [4] et E. P. Lane [5, 6]. Les espaces bitopologiques connexes ont été étudiés par W. J. Pervin [7] et par moi-même [1].

Dans cette Note nous définissons les notions d'espace bitopologique compact et d'espace bitopologique localement compact et indiquons quelques propriétés.

I. Espaces bitopologiques compacts

1. Définitions. Exemples

Il est facile de voir qu'on peut substituer l'axiome de définition d'un espace topologique compact par l'axiome suivant:

Pour tout recouvrement ouvert il existe un recouvrement ouvert plus fin et fini.

Cette remarque suggère la

Définition 1. *Un espace bitopologique* $(X, \mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ *est* $\mathfrak{A}$*-compact par rapport à* $\mathfrak{B}$ *s'il vérifie l'axiome suivant:*

Pour tout recouvrement $\mathfrak{A}$*-ouvert de* X *il existe un recouvrement* $\mathfrak{B}$*-ouvert plus fin et fini.*

L'espace $(X, \mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ *est réciproquement compact s'il est* $\mathfrak{A}$*-compact par rapport à* $\mathfrak{B}$ *et* $\mathfrak{B}$*-compact par rapport à* $\mathfrak{A}$.

Remarques. **1.** De façon analogue, un espace bitopologique $(X, \mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ *est* $\mathfrak{A}$*-Lindelöf par rapport à* $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A}$*-paracompact par rapport à* $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$*-métacompact par rapport à* $\mathfrak{B}$) si pour tout recouvrement $\mathfrak{A}$-ouvert de X il existe un recouvrement $\mathfrak{B}$-ouvert plus fin et dénombrable (localement fini, ponctuellement fini).

2. Des définitions précédentes on déduit que, si l'espace bitopologique $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ este $\mathfrak{T}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$ ($\mathfrak{T}$-Lindelöf par rapport à $\mathfrak{Q}$) alors l'espace topologique $(X, \mathfrak{T})$ este compact (Lindelöf).

Proposition 1. *Soit $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ un espace bitopologique. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *$(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ est $\mathfrak{T}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$,*

b) *quelle que soit la famille $\{F_i\}$ d'ensembles $\mathfrak{T}$-fermés qui a l'intersection vide, il existe une famille finie $\{G_j\}_1^n$ d'ensembles $\mathfrak{T}$-fermés, qui satisfait à la condition que pour tout indice j il y a un indice i tel que $G_j \supset F_i$, qui a l'intersection vide,*

c) *quelle que soit la famille $\{F_i\}$ d'ensembles $\mathfrak{T}$-fermés, du fait que toute famille finie $\{G_j\}_1^n$ d'ensembles $\mathfrak{Q}$-fermés, qui satisfait à la condition que pour tout indice j il y a un indice i tel que $G_j \supset F_i$, a l'intersection non vide, il résulte que la famille $\{F_i\}$ a l'intersection non vide.*

La proposition se démontre facilement.

Sur un ensemble fini toute topologie est compacte, mais on peut donner des exemples d'espaces bitopologiques finis qui ne sont pas $\mathfrak{T}$-compacts par rapport à $\mathfrak{Q}$ ou $\mathfrak{Q}$-compacts par rapport à $\mathfrak{T}$. Voici un exemple :

Exemple 1. Soient $X = \{a, b, c\}$, $\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$ et $\mathfrak{Q} = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c\}, X\}$. Les topologies $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{Q}$ sont compactes, mais l'espace $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ n'est pas $\mathfrak{T}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$ ou $\mathfrak{Q}$-compact par rapport à $\mathfrak{T}$.

On peut formuler le lemme 2 de [8] : dans un espace bitopologique $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ réciproquement Hausdorff [4] les ensembles $\mathfrak{T}$-compacts (c'est-à-dire les ensembles de X qui sont compacts dans la topologie $\mathfrak{T}$) sont $\mathfrak{Q}$-fermés. Alors on démontre la

Proposition 2. *Soit $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ un espace bitopologique réciproquement Hausdorff. Si la topologie $\mathfrak{T}$ est compacte, on a l'inclusion $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{Q}$.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que tout ensemble $\mathfrak{T}$-fermé est aussi $\mathfrak{Q}$-fermé. Si A est un ensemble $\mathfrak{T}$-fermé il est $\mathfrak{T}$-compact, parce que la topologie $\mathfrak{T}$ est compacte. Il suit que A est $\mathfrak{Q}$-fermé.

Corollaire 1. *Soit $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ un espace bitopologique réciproquement Hausdorff.*

a) *Si les topologies $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{Q}$ sont compactes, alors $\mathfrak{T} = \mathfrak{Q}$;*

b) *Si $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ est $\mathfrak{T}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$, alors $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{Q}$;*

c) *Si $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ est réciproquement compact, alors $\mathfrak{T} = \mathfrak{Q}$.*

C'est-à-dire les espaces bitopologiques réciproquement Hausdorff et réciproquement compacts ne sont que des espaces topologiques séparés Hausdorff et compacts.

Les exemples suivants clarifient le rôle des diverses hypothèses qu'on pose aux espaces bitopologiques et la relation entre des espaces bitopologiques $\mathfrak{T}$-compacts par rapport à $\mathfrak{Q}$ (réciproquement compacts) et des autres espaces.

Exemple 2. Soient $X = [0, 1]$, $\mathfrak{T}$ = la topologie induite sur X par la topologie usuelle de R et $\mathfrak{Q}$ = la topologie discrète. Alors $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ est

un espace réciproquement Hausdorff et $\mathfrak{T}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$, mais la topologie $\mathfrak{Q}$ n'est pas compacte et donc $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ n'est pas réciproquement compact.

Exemple 3. Un espace bitopologique peut-être réciproquement Hausdorff et réciproquement normal [4], mais $\mathfrak{T} \neq \mathfrak{Q}$ et par suite il n'est pas réciproquement compact.

L'exemple donné dans [6] peut servir pour justifier cette affirmation : $X = [0, +\infty)$, $\mathfrak{T}$ = la topologie discrète et $\mathfrak{Q}$ = la topologie de toutes les parties de X dont les complémentaires sont dénombrables. On voit aisément que $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ est réciproquement Hausdorff et réciproquement normal. Les topologies $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{Q}$ sont non compactes et donc $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ n'est pas réciproquement compact.

Exemple 4. Soient $X = [0, 1]$, $\mathfrak{T}$ (resp. $\mathfrak{Q}$) = la topologie dont les ensembles ouverts sont les ensembles qui contiennent 0 (resp. 1) et ont leurs complémentaires finis et les ensembles de $(0, 1)$ dont les complémentaires par rapport à $(0, 1)$ sont finis. L'espace $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ est réciproquement compact, mais $\mathfrak{T} \neq \mathfrak{Q}$ et il n'est pas réciproquement normal.

Exemple 5. Soient $X = [0, 1]$, $\mathfrak{T}$ = la topologie induite sur X par la topologie usuelle de R et $\mathfrak{Q}$ = la topologie engendrée par la réunion des familles $\mathfrak{T}$ et la famille des ensembles dont les complémentaires sont finis. L'espace bitopologique $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ est réciproquement Hausdorff et $\mathfrak{T}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$, mais il n'est pas réciproquement normal.

Exemple 6. Soient $X = \{a, b, c\}$, $\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c\}, X\}$ et $\mathfrak{Q} = \{\emptyset, \{b\}, \{b, c\}, \{a, b\}, \{a\}, X\}$. Alors l'espace $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ est réciproquement régulier [4], réciproquement normal et réciproquement compact, mais $\mathfrak{T} \neq \mathfrak{Q}$.

Exemple 7. Soient $X = \{a, b, c\}$, $\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ et $\mathfrak{Q} = \{\emptyset, \{b\}, \{b, c\}, X\}$. L'espace $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ est réciproquement normal, réciproquement compact, mais non réciproquement régulier.

2. Ensembles compacts

Définition 2. *Soient $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ un espace bitopologique et A une partie de X. On dit que l'ensemble A est $\mathfrak{T}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$ (resp. $\mathfrak{Q}$-compact par rapport à $\mathfrak{T}$, réciproquement compact) si le sous-espace bitopologique $(A, \mathfrak{T} \cap A, \mathfrak{Q} \cap A)$ est $\mathfrak{T} \cap A$-compact par rapport à $\mathfrak{Q} \cap A$ (resp. $\mathfrak{Q} \cap A$ compact par rapport à $\mathfrak{T} \cap A$, réciproquement compact).*

On sait que dans un espace topologique pour qu'un ensemble A soit compact il faut et il suffit qu'il existe pour tout recouvrement ouvert de A une partie finie de lui qui recouvre A. On démontre aisément le résultat :

Proposition 3. *Soit A un ensemble d'un espace bitopologique $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$.*

a) *Une condition suffisante pour que l'ensemble A soit $\mathfrak{T}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$ est qu'il existe, pour tout recouvrement $\mathfrak{T}$-ouvert de A, un recouvrement $\mathfrak{Q}$-ouvert de A plus fin et fini.*

b) *Si l'ensemble A est $\mathfrak{Q}$-ouvert, alors une condition nécessaire afin que A soit $\mathfrak{T}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$ est qu'il existe, pour tout recouvrement $\mathfrak{T}$-ouvert de A, un recouvrement $\mathfrak{Q}$-ouvert de A plus fin et fini.*

On ne peut pas renoncer à la condition „A est $\mathfrak{Q}$-ouvert" qui intervient dans le point b) de la proposition précédente, même si on impose des conditions supplémentaires à l'espace bitopologique.

Exemple 8. Dans l'espace de l'exemple 6, considérons $A = \{c\}$ et le recouvrement $\mathfrak{P}$-ouvert de A défini par un seul ensemble : $\{c\}$. Quoique l'espace considéré est réciproquement normal et réciproquement compact, toutefois on ne peut pas indiquer un recouvrement $\mathfrak{Q}$-ouvert de A qui soit plus fin que le recouvrement de ci-dessus.

La condition supplémentaire „A est $\mathfrak{Q}$-ouvert" est à l'origine des différences qui apparaissent entre les espaces topologiques et les espaces bitopologiques. La proposition suivante illustre ce fait :

Proposition 4. *La réunion de deux ensemble A et B $\mathfrak{Q}$-ouverts et $\mathfrak{P}$-compacts par rapport à $\mathfrak{Q}$ est $\mathfrak{P}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{K}$ un recouvrement $\mathfrak{P}$-ouvert de $A \cup B$. $\mathfrak{K}$ est de même un recouvrement de A et de B. Dans nos hypothèses sur A et B et conformément à la proposition 3.1, b) il existe deux recouvrements $\mathfrak{Q}$-ouverts : $\mathfrak{S}_1$ de A et $\mathfrak{S}_2$ de B plus fins que $\mathfrak{K}$ et finis. Alors $\mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2$ est un recouvrement de $A \cup B$ $\mathfrak{Q}$-ouvert, fini et plus fin que $\mathfrak{K}$. Il suit que l'ensemble $A \cup B$ est $\mathfrak{P}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$.

Exemple 9. Soit $X = \{a, b\}$, $\mathfrak{P} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$ et $\mathfrak{Q} = \{\emptyset, X\}$. Les ensembles $\{a\}$ et $\{b\}$ sont $\mathfrak{P}$-compacts par rapport à $\mathfrak{Q}$, mais $\{a\} \cup \{b\} = X$ n'est pas $\mathfrak{P}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$. On remarque que $\{a\}$ et $\{b\}$ ne sont pas $\mathfrak{Q}$-ouverts.

On démontre aisément la

Proposition 5. *Soient $(X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ un espace bitopologique $\mathfrak{P}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$ (réciproquement compact) et A un ensemble $\mathfrak{P}$-fermé ($\mathfrak{P}$-fermé et $\mathfrak{Q}$-fermé). Alors l'ensemble A est $\mathfrak{P}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$ (réciproquement compact).*

3. Image par une application continue et ouverte

Soient une application $f : (X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) \to (X^*, \mathfrak{P}^*, \mathfrak{Q}^*)$ et $f_1 : (X, \mathfrak{P}) \to (X^*, \mathfrak{P}^*)$, $f_2 : (X, \mathfrak{Q}) \to (X^*, \mathfrak{Q}^*)$ les applications associées. Par définition [7], f est continue si f_1 et f_2 sont continues. De façon analogue on peut introduire la notion d'application ouverte.

Proposition 6. *Si l'espace $(X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ est $\mathfrak{P}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$ et l'application $f : (X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) \to (X^*, \mathfrak{P}^*, \mathfrak{Q}^*)$ a les propriétés : f_1 est continue et f_2 est ouverte, alors l'image $f(X)$ est $\mathfrak{P}^*$-compacte par rapport à $\mathfrak{Q}^*$.*

Démonstration. En effet, soit $\{U^*\}$ un recouvrement $\mathfrak{P}^*$-ouvert de $f(X)$. Parce que f_1 est continue, $\{f^{-1}(U^*)\}$ est un recouvrement $\mathfrak{P}$-ouvert de X et alors il existe un recouvrement $\mathfrak{Q}$-ouvert $\{V_i\}_1^n$ de X, plus fin et fini, c'est-à-dire pour tout indice i il existe un ensemble U^* tel que $V_i \subset f^{-1}(U^*)$. L'application f_2 étant ouverte, il résulte que $\{f(V_i)\}_1^n$ est un recouvrement de $f(X)$ $\mathfrak{Q}^*$-ouvert et fini et qui est plus fin que $\{U^*\}$, car, en effet, pour tout i il y a un ensemble U^* tel que $f(V_i) \subset U^*$. Mais alors, compte tenu de la proposition 3, $f(X)$ est $\mathfrak{P}^*$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}^*$.

Corollaire 2. *Si l'espace $(X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ est réciproquement compact et l'application $f : (X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) \to (X^*, \mathfrak{P}^* \mathfrak{Q}^*)$ est continue et ouverte, alors l'image $f(X)$ est un ensemble réciproquement compact de l'espace $(X^*, \mathfrak{P}^*, \mathfrak{Q}^*)$.*

Corollaire 3. *Si on ajoute aux hypothèses du corollaire 2 l'hypothèse que l'espace $(X^*, \mathfrak{P}^*, \mathfrak{Q}^*)$ est réciproquement Hausdorff, alors l'image $f(X)$ est un espace topologique compact.*

Corollaire 4. *L'image d'un ensemble $\mathfrak{P}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$ (réciproquement compact) et $\mathfrak{Q}$-ouvert (resp. $\mathfrak{P}$-ouvert et $\mathfrak{Q}$-ouvert) par une application $f : (X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) \to (X^*, \mathfrak{P}^*, \mathfrak{Q}^*)$ avec f_1 continue et f_2 ouverte (resp. f continue et ouverte) est $\mathfrak{P}^*$-compacte par rapport à $\mathfrak{Q}^*$ (resp. réciproquement compacte).*

L'exemple qui suit montre qu'il n'est pas suffisant de supposer que f est continue.

Exemple 10. Soient $X = \{a, b, c\}$, $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q} =$ la topologie discrète, $X^* = \{a^*, b^*, c^*\}$, $\mathfrak{P}^* = \{\emptyset, \{a^*\}, \{b^*, c^*\}, X^*\}$ $\mathfrak{Q}^* = \{\emptyset, \{a^*, b^*\}, \{c^*\}, X^*\}$ et l'application f définie ainsi : $f(a) = a^*$, $f(b) = b^*$, $f(c) = c^*$. On observe aisément que $(X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ est réciproquement compact (il est exactement un espace topologique compact), que f est continue, mais $f(X) = X^*$ est non $\mathfrak{P}^*$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}^*$ et non $\mathfrak{Q}^*$-compact par rapport à $\mathfrak{P}^*$.

4. Théorème d'Alexander. Théorème de Tychonoff

Le but de cette section est de démontrer, en suivant la voie indiquée dans [3. ch. 5], deux théorèmes importants qui sont les correspondants des théorèmes d'Alexander et de Tychonoff. Faisons d'abord la

Remarque. Soient $(X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ un espace bitopologique, $\mathfrak{B}_1$ une base de la topologie $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{B}_2$ une base de $\mathfrak{Q}$. L'espace $(X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ est reciproquement compact si et seulement si pour tout recouvrement de X dont les éléments appartiennent à $\mathfrak{B}_1$, il existe un recouvrement de X dont les éléments appartiennent à $\mathfrak{B}_2$ qui est plus fin et fini.

Proposition 7. (Alexander). *Si dans l'espace bitopologique $(X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$, $\mathfrak{S}$ est une sous-base de la topologie $\mathfrak{P}$ telle que pour tout recouvrement de X dont les éléments appartiennent à $\mathfrak{S}$ il existe un recouvrement de X $\mathfrak{Q}$-ouvert, plus fin et fini, alors l'espace est $\mathfrak{P}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$.*

Cette proposition peut se démontrer en suivant, à des adaptations près, la démonstration du théorème d'Alexander [3, ch. 5], et c'est pourquoi nous y renoncerons.

Soit $\{(X_i, \mathfrak{P}_i, \mathfrak{Q}_i)\}_{i \in I}$ une famile d'espaces bitopologiques et $(X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ l'espace bitopologique produit [1], c'est-à-dire X est l'ensemble produit des ensembles X_i, $i \in I$, et $\mathfrak{P}$ (resp. $\mathfrak{Q}$) est la topologie-produit des topologies $\mathfrak{P}_i$ (resp. $\mathfrak{Q}_i$), $i \in I$.

Proposition 8. *Si le produit $(X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ des espaces bitopologiques $(X_i, \mathfrak{P}_i, \mathfrak{Q}_i)$, $i \in I$, est $\mathfrak{P}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$ (réciproquement compact), alors chacun des espaces facteurs $(X_i, \mathfrak{P}_i, \mathfrak{Q}_i)$ est $\mathfrak{P}_i$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}_i$ (resp. réciproquement compact.)*

Démonstration. Les projections sont des fonctions continues et ouvertes et donc on peut appliquer la proposition 6 (resp. le corollaire 2).

Proposition 9. (Tychonoff). *Si pour tout $i \in I$ l'espace bitopologique $(X_i, \mathfrak{T}_i, \mathfrak{Q}_i)$ est $\mathfrak{T}_i$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}_i$ (réciproquement compact), alors l'espace-produit $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ est $\mathfrak{T}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$ (resp. réciproquement compact).*

Démonstration. On note par $\mathfrak{S}$ la sous-base de la topologie $\mathfrak{T}$ formée de tous les ensembles $\mathrm{pr}_i^{-1}(U)$, où $i \in I$ et $U \in \mathfrak{T}_i$. Par suite de la proposition 7, $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ sera $\mathfrak{T}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$ si chaque sous-famille A de $\mathfrak{S}$, pour laquelle il n'y a aucun recouvrement $\mathfrak{Q}$-ouvert de X plus fin que $\mathfrak{Q}$ et fini, ne recouvre pas X.

Soit, pour tout $i \in I$, la famille $\mathfrak{B}_i = \{U : U \in \mathfrak{T}_i,\ \mathrm{pr}_i^{-1}(U) \in A\}$. Alors $\mathfrak{B}_i$ a la propriété qu'il n'existe pas aucun recouvrement $\mathfrak{Q}$-ouvert de X_i plus fin et fini ; en effet, si $\{V_k\}_1^k$ est une famille finie d'ensembles $\mathfrak{Q}_i$-ouverts telle que $\bigcup_{k=1}^{n} V_k = X_i$ et pour tout k il existe U_k de sorte que $V_k \subset U_k$, alors la famille finie $\{\mathrm{pr}_i^{-1}(V_k)\}$ a la propriété que $\mathrm{pr}_i^{-1}(V_k) \subset \subset \mathrm{pr}_i^{-1}(U_k)$ et elle est un recouvrement $\mathfrak{Q}$-ouvert, fini, plus fin que $\mathfrak{Q}$, ce qui est une absurdité.

Compte tenu du fait que $(X_i, \mathfrak{T}_i, \mathfrak{Q}_i)$ est $\mathfrak{T}_i$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$, il existe un point x tel que $x_i \in U$, pour tout $U \in \mathfrak{B}_i$. Alons le point $(x_i) \in X$ n'appartient pas à aucun ensemble de $\mathfrak{A}$ et par suite la famille $\mathfrak{A}$ ne recouvre pas X.

Corollaire 5. *Si les parties $A_i \subset X_i$, $i \in I$, sont des ensembles $\mathfrak{T}_i$-compacts par rapport à $\mathfrak{Q}_i$ (réciproquement compacts) des espaces bitopologiques $(X_i, \mathfrak{T}_i, \mathfrak{Q}_i)$, alors leur produit $\prod_{i \in I} A_i$ est $\mathfrak{T}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$ (réciproquement compact) dans l'espace produit $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$.*

II. Espaces bitopologiques localement compacts

5. Définitions. Propriétés

Définition 3. *Un espace bitopologique $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ est $\mathfrak{T}$-localement $\mathfrak{T}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$, s'il existe pour tout point $x \in X$ un $\mathfrak{T}$-voisinage qui est $\mathfrak{T}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$. De façon analogue on définit les espaces qui sont : $\mathfrak{T}$-localement $\mathfrak{Q}$-compacts par rapport à $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}$-localement réciproquement compacts, réciproquement localement $\mathfrak{T}$-compacts par rapport à $\mathfrak{Q}$, etc.*

Remarques. a) Un espace bitopologique $\mathfrak{T}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$ est réciproquement localement $\mathfrak{T}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$. b) Un espace bitopologique $\mathfrak{T}$-localement $\mathfrak{Q}$-compact par rapport à $\mathfrak{T}$ est $\mathfrak{T}$-localement $\mathfrak{Q}$-compact.

Proposition 10. *Si l'espace bitopologique $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ est réciproquement Hausdorff et $\mathfrak{Q}$-localement $\mathfrak{T}$-compact, alors $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{Q}$.*

Démonstration. On démontre que tout ensemble $\mathfrak{T}$-fermé est aussi $\mathfrak{Q}$-fermé. En effet, soient A un ensemble $\mathfrak{T}$-fermé, $x \in X - A$ et V un $\mathfrak{Q}$-voisinage $\mathfrak{T}$-compact de x ; alors V est un ensemble $\mathfrak{Q}$-fermé. Le sous-espace $(V, \mathfrak{T} \cap V, \mathfrak{Q} \cap V)$ est réciproquement Hausdorff et la topologie $\mathfrak{T} \cap V$ est une topologie compacte ; alors, en vertu de la proposition 2,

on a $\mathfrak{T} \cap V \subset \mathfrak{Q} \cap V$. La partie $A \cap V$ de V est $\mathfrak{T} \cap V$-fermée et donc $\mathfrak{Q} \cap V$-fermée. Comme V est un ensemble $\mathfrak{Q}$-fermé, il suit que $A \cap V$ est un ensemble $\mathfrak{Q}$-fermé de X. Alors $V \cap (X - A) = V - (A \cap V)$ est un $\mathfrak{Q}$-voisinage de x, et par suite $X - A$ est $\mathfrak{Q}$-ouvert, c'est-à-dire A est un ensemble $\mathfrak{Q}$-fermé.

Corollaire 6. *Soit $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ un espace bitopologique réciproquement Hausdorff.*

a) *Si l'espace est $\mathfrak{Q}$-localement $\mathfrak{T}$-compact et $\mathfrak{T}$-localement $\mathfrak{Q}$-compact, alors $\mathfrak{T} = \mathfrak{Q}$.*

b) *Si l'espace est $\mathfrak{Q}$-localement $\mathfrak{T}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$, alors $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{Q}$.*

c) *Si l'espace est réciproquement localement réciproquement compact, alors $\mathfrak{T} = \mathfrak{Q}$.*

Remarques. a) La proposition 10 et le corollaire 6 généralisent, respectivement, la proposition 2 et le corollaire 1.

b) Un espace bitopologique réciproquement Hausdorff, $\mathfrak{Q}$-localement $\mathfrak{T}$-compact et $\mathfrak{T}$-localement $\mathfrak{Q}$-compact n'est pas autre chose qu'un espace topologique séparé Hausdorff et localement compact.

Proposition 11. *Si l'espace $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ est réciproquement Hausdorff et $\mathfrak{T}$-localement réciproquement compact, alors tout point de X possède un $\mathfrak{T}$-système fondamental de $\mathfrak{T}$-voisinages compacts $\mathfrak{T}$-fermés et $\mathfrak{Q}$-fermés.*

Démonstration. Soit $x \in X$ et C un $\mathfrak{T}$-voisinage de x qui est réciproquement compact. Alors C est un ensemble $\mathfrak{T}$-fermé et $\mathfrak{Q}$-fermé et, en vertu du corollaire 1, il est un sous-espace topologique compact. Soit U un $\mathfrak{T}$-voisinage de x ; alors $W = \mathrm{Int}_{\mathfrak{T}}(U \cap C)$ est un ensemble $\mathfrak{T}$-ouvert. Il suit que $\overline{W} = \overline{W}^{\mathfrak{T}} = \overline{W}^{\mathfrak{Q}} = \overline{W}^{\mathfrak{T} \cap \mathfrak{Q}} \subset C$ est un espace topologique Hausdorff compact et donc régulier. Alors W contient un voisinage V de x qui est fermé et compact dans W et donc V est un voisinage de x et dans W et par suite il est un $\mathfrak{T}$-voisinage de x dans X. C'est-à-dire V est un $\mathfrak{T}$-voisinage de x $\mathfrak{T}$-fermé, $\mathfrak{Q}$-fermé, compact et contenu dans U.

Corollaire 7. *Dans les hypothèses de la proposition 11, l'espace $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ est $\mathfrak{T}$-régulier, $\mathfrak{T}$-régulier par rapport à $\mathfrak{Q}$, et la topologie $\mathfrak{T}$ est séparée Hausdorff.*

Les hypothèses de la proposition 11 sont restrictives, mais elles n'impliquent pas que $\mathfrak{T} = \mathfrak{Q}$. Dans ce sens on peut donner l'exemple suivant :

Exemple 11. Soit l'espace $(R, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$, où R est la droite numérique, $\mathfrak{T}$ est la topologie discrète sur R et $\mathfrak{Q}$ est la topologie usuelle. Alors cet espace est réciproquement Hausdorff et $\mathfrak{T}$-localement réciproquement compact, mais $\mathfrak{T} \neq \mathfrak{Q}$.

On peut généraliser le résultat contenu dans le corollaire 7, en utilisant le

Lemme 1. *Soit $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ un espace bitopologique. Si pour tout point $x \in X$ il y a un $\mathfrak{T}$-voisinage $\mathfrak{Q}$-fermé et $\mathfrak{T}$-régulier par rapport à $\mathfrak{Q}$, alors l'espace $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ est $\mathfrak{T}$-régulier par rapport à $\mathfrak{Q}$.*

Proposition 12. *Si l'espace bitopologique* $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ *est réciproquement Hausdorff,* $\mathfrak{T}$*-localement* $\mathfrak{Q}$*-compact par rapport à* $\mathfrak{Q}$ *et la topologie* $\mathfrak{T}$ *est séparée Hausdorff, alors* $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ *est* $\mathfrak{T}$*-régulier par rapport à* $\mathfrak{Q}$.

Démonstration. Si on suppose que l'espace est $\mathfrak{T}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$ on a $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{Q}$ (en vertu de la proposition 2) et, donc, tout ensemble $\mathfrak{T}$-fermé est $\mathfrak{Q}$-fermé. Comme la topologie $\mathfrak{T}$ est Hausdorff et compacte, elle est régulière. Alors pour un point $x \in X$ et tout $\mathfrak{T}$-voisinage U de x il existe un $\mathfrak{T}$-voisinage de X $\mathfrak{T}$-fermé, donc aussi $\mathfrak{Q}$-fermé, contenu dans U. Il suit que $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ est $\mathfrak{T}$-régulier par rapport à $\mathfrak{Q}$.

Si l'espace est $\mathfrak{T}$-localement $\mathfrak{T}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$, soit U un $\mathfrak{T}$-voisinage de x $\mathfrak{T}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$. Alors U est un ensemble $\mathfrak{Q}$-fermé. D'autre part, l'ensemble U étant réciproquement Hausdorff, $\mathfrak{T}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{T} \cap U$ est une topologie Hausdorff, en vertu de la première partie de la démonstration, il résulte qu'il est $\mathfrak{T}$-régulier par rapport à $\mathfrak{Q}$.

On peut appliquer le lemme 1 et il suit que $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ est $\mathfrak{T}$-régulier par rapport à $\mathfrak{Q}$.

Exemple 12. Soient X un ensemble quelconque, $\mathfrak{T}$ la topologie sur X dont les éléments sont les complémentaires de tous les ensembles finis de X et $\mathfrak{Q}$ la topologie discrète. L'espace $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ est réciproquement Hausdorff et $\mathfrak{T}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$, mais la topologie $\mathfrak{T}$ n'est pas séparée Hausdorff.

Donc, la condition „$\mathfrak{T}$ est séparé Hausdorff" n'est pas impliquée par les autres hypothèses de la proposition 12.

Proposition 13. *Si l'espace* $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ *est* $\mathfrak{T}$*-régulier par rapport à* $\mathfrak{Q}$ *et* $\mathfrak{T}$*-localement* $\mathfrak{Q}$*-compact par rapport à* $\mathfrak{T}$*, alors tout point de* X *possède un* $\mathfrak{Q}$*-système fondamental de* $\mathfrak{T}$*-voisinages* $\mathfrak{T}$*-fermés et* $\mathfrak{Q}$*-compacts par rapport à* $\mathfrak{T}$.

Démonstration. Soient C un $\mathfrak{T}$-voisinage d'un point $x \in X$ qui est $\mathfrak{Q}$-compact par rapport à $\mathfrak{T}$ et U un $\mathfrak{T}$-voisinage $\mathfrak{T}$-ouvert arbitraire de x. Alors $U \cap \mathrm{Int}_{\mathfrak{T}} \cap C$. est un ensemble $\mathfrak{T}$-ouvert et il existe un $\mathfrak{T}$-voisinage U_1 de x $\mathfrak{Q}$-fermé et contenu dans $U \cap \mathrm{Int}_{\mathfrak{T}} U$. Évidemment, U_1 est un $\mathfrak{T}$-voisinage de x, $\mathfrak{Q}$-fermé, $\mathfrak{Q}$-compact par rapport à $\mathfrak{T}$ et contenu dans U.

On peut donner une généralisation à la proposition 11. Dans ce but, on démontre d'abord le

Lemme 2. *Soient* $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ *un espace bitopologique,* $\{A_i\}_1^n$ *une famille de parties de* X, A *la réunion de ces parties et* $\mathfrak{T} \cap A_i$, $\mathfrak{Q} \cap A_i$ *les topologies induites de* $\mathfrak{T}$ *et* $\mathfrak{Q}$*, respectivement, sur* A_i. *Si les ensembles* A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, *sont* $\mathfrak{Q}$*-fermés (*$\mathfrak{T}$*-fermés et* $\mathfrak{Q}$*-fermés) et, pour tous les indices* i, $\mathfrak{T} \cap A_i$ *est moins fin que* $\mathfrak{Q} \cap A_i$ *(resp.* $\mathfrak{T} \cap A_i = \mathfrak{Q} \cap A_i$*) alors* $\mathfrak{T} \cap A$ *est moins fin que* $\mathfrak{Q} \cap A$ *(resp.* $\mathfrak{T} \cap A = \mathfrak{Q} \cap A$*)*

Démonstration. Il revient à démontrer que, si A_1 et A_2 sont $\mathfrak{Q}$-fermés et $\mathfrak{T} \cap A_i \subset \mathfrak{Q} \cap A_i$ $(i = 1, 2)$ alors $\mathfrak{T} \cap (A_1 \cup A_2) \subset \mathfrak{Q} \cap (A_1 \cup A_2)$. Dans ce but, soit U_0 un ensemble $\mathfrak{T} \cap (A_1 \cup A_2)$ ouvert. Alors il existe un ensemble U $\mathfrak{T}$-ouvert tel que $U \cap (A_1 \cup A_2) = U_0$. D'autre part, les

ensembles $U \cap A_1$ et $U \cap A_2$ sont, respectivement, $\mathfrak{T} \cap A_1$-ouverts et $\mathfrak{T} \cap A_2$-ouverts et, dans les hypothèses ci-dessus, ils sont de même $\mathfrak{Q} \cap A_1$-ouverts et $\mathfrak{Q} \cap A_2$-ouverts, respectivement. C'est-à-dire il existe les ensembles $\mathfrak{Q}$-ouverts V_1 et V_2 tels que $V_1 \cap A_1 = U \cap A_1$ et $V_2 \cap A_2 = U \cap A_2$. Maintenant, on considère l'ensemble $\mathfrak{Q}$-ouvert $V = (V_1 \cap V_2) \cup [(X - A_2) \cap V_1] \cup [(X - A_1) \cap V_2]$. On peut démontrer facilement que $V \cap (A_1 \cup A_2) = U_0$, c'est-à-dire l'ensemble U_0 est de même $\mathfrak{Q} \cap (A_1 \cup A_2)$-ouvert.

Proposition 14. *Si l'espace* $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ *est réciproquement Hausdorff et* $\mathfrak{T}$*-localement réciproquement compact et* A *est un ensemble réciproquement compact, alors l'ensemble* A *a un système fondamental de* $\mathfrak{T}$*-voisinages compacts* $\mathfrak{T}$*-fermés et* $\mathfrak{Q}$*-fermés.*

Démonstration. En vertu du corollaire 1, l'ensemble A est compact, t $\mathfrak{T}$-fermé et $\mathfrak{Q}$-fermé. Soient U un $\mathfrak{T}$-voisinage de A et x un point arbitraire qui appartient à A. En tenant compte de la proposition 11, il existe un $\mathfrak{T}$-voisinage de x compact, $\mathfrak{T}$-fermé et $\mathfrak{Q}$-fermé contenu dans U. Mais, l'ensemble A étant compact — donc $\mathfrak{T}$-compact et $\mathfrak{Q}$-compact — on peut extraire un nombre fini de $\mathfrak{T}$-voisinages compacts, $\mathfrak{T}$-fermé et $\mathfrak{Q}$-fermés qui recouvre A. La réunion de ceux-ci sera un $\mathfrak{T}$-voisinage de A $\mathfrak{T}$-fermé, $\mathfrak{Q}$-fermé et d'ailleurs $\mathfrak{T}$-compact et $\mathfrak{Q}$-compact. En vertu du lemme précédent, sur cette réunion, les topologies induites de $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{Q}$ coïncident. Il suit que cette réunion est un $\mathfrak{T}$-voisinage de A compact, $\mathfrak{T}$-fermé, $\mathfrak{Q}$-fermé et contenu dans U.

Proposition 15. *Si l'espace bitopologique* $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ *est réciproquement Hausdorff et* $\mathfrak{T}$*-localement* $\mathfrak{Q}$*-compact par rapport à* $\mathfrak{T}$*, alors tout ensemble* A*, dont la trace sur un ensemble quelconque* $\mathfrak{Q}$*-compact par rapport à* $\mathfrak{T}$ *est aussi* $\mathfrak{Q}$*-compact par rapport à* $\mathfrak{T}$*, est un ensemble* $\mathfrak{T}$*-fermé.*

Démonstration. Soient $x \in X - A$ et U un $\mathfrak{T}$-voisinage de x $\mathfrak{Q}$-compact par rapport à $\mathfrak{T}$. L'ensemble $U \cap A$ est $\mathfrak{Q}$-compact par rapport à $\mathfrak{T}$ et par suite il est $\mathfrak{T}$-fermé. Alors $U \cap (X - A)$ est un $\mathfrak{T}$-voisinage de x. C'est-à-dire $X - A$ est $\mathfrak{T}$-ouvert et par suite l'ensemble A est $\mathfrak{T}$-fermé.

Proposition 16. *Si* $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ *est un espace bitopologique* $\mathfrak{T}$*-localement (*$\mathfrak{Q}$*-localement)* $\mathfrak{T}$*-compact par rapport à* $\mathfrak{Q}$ *et* A *et une partie* $\mathfrak{T}$*-fermée de* X*, alors* A *est* $\mathfrak{T}$*-localement (resp.* $\mathfrak{Q}$*-localement)* $\mathfrak{T}$*-compact par rapport à* $\mathfrak{Q}$.

Démonstration. Soit x un point arbitraire de A et U un $\mathfrak{T}$-voisinage ($\mathfrak{Q}$-voisinage) $\mathfrak{T}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$. Alors $U \cap A$ est un $\mathfrak{T} \cap A$-voisinage ($\mathfrak{Q} \cap A$-voisinage) de x concernant la bitopologie induite sur A. D'ailleurs, $U \cap A$ est une partie $\mathfrak{T} \cap U$-fermée du sous-espace bitopologique U et donc, en tenant compte du fait que U est $\mathfrak{T}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$, l'ensemble $U \cap A$ est $\mathfrak{T}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$. Donc $U \cap A$ est un $\mathfrak{T} \cap A$-voisinage ($\mathfrak{Q} \cap A$-voisinage) de x, $\mathfrak{T}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$. L'ensemble A est $\mathfrak{T}$-localement ($\mathfrak{Q}$-localement) $\mathfrak{T}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$.

En procédant comme dans la démonstration de la proposition 16 et en tenant compte de la proposition 11, on démontre facilement la

Proposition 17. *Si* $(X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ *est un espace bitopologique réciproquement Hausdorff et* $\mathfrak{P}$*-localement réciproquement compact et si les ensembles* A *et* B *sont ouverts ou fermés dans l'une des topologies* $\mathfrak{P}$ *et* $\mathfrak{Q}$*, alors l'ensemble* $A \cap B$ *est un sous-espace de même sorte que l'espace entier.*

6. Produit d'espaces bitopologiques localement compacts

Proposition 18. *Soit* $(X_1, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{Q}_1)$, $i \in I$, *une famille d'espaces bitopologiques et* $(X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ *l'espace bitopologique produit. Pour que l'espaces produit soit* $\mathfrak{Q}$*-localement* $\mathfrak{P}$*-compact par rapport à* $\mathfrak{Q}$ *(*$\mathfrak{P}$*-localement* $\mathfrak{Q}$*-compact par rapport à* $\mathfrak{Q}$*,* $\mathfrak{P}$*-localement réciproquement compact, etc.) il suffit que les espaces facteurs* X_i *soient* $\mathfrak{Q}_i$*-localement* $\mathfrak{P}_i$*-compacts par rapport à* $\mathfrak{Q}_i$ *(resp.* $\mathfrak{P}_i$*-localement* $\mathfrak{Q}_i$*-compacts par rapport à* $\mathfrak{Q}_i$*,* $\mathfrak{P}_i$*-localement réciproquement compacts, etc.)* $i \in I$*, et* X_i *soit* $\mathfrak{P}_i$*-compact par rapport à* $\mathfrak{Q}_i$ *(resp.* $\mathfrak{P}_i$*-compact par rapport à* $\mathfrak{Q}_i$*, réciproquement compact, etc.) pour tout* i*, sauf pour un nombre fini.*

Démonstration. Démontrons seulement la première partie de la proposition. Soit $x = (x_i) \in X$ un point. Pour les indices i dont X_i n'est pas $\mathfrak{P}_i$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}_i$, on considère un $\mathfrak{Q}_i$-voisinage V_i de x_i qui est $\mathfrak{P}_i$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}_i$. Pour le reste des indices i, on prend $V_i = X_i$. C'est-à-dire, pour tous let indices i, V_i sont $\mathfrak{P}_i$-compacts par rapport à $\mathfrak{Q}_i$ et alors, en vertu du corollaire 5, l'ensemble $\prod_{i \in I} V_i$ est un $\mathfrak{Q}$-voisinage $\mathfrak{P}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$ du point x.

7. Remarques sur l'image d'un espace bitopologique localement compact

En général, une proposition analogue à la proposition 6 n'est pas valable. Ce fait s'explique parce que dans la proposition 3, b) intervient la condition supplémentaire „A est $\mathfrak{Q}$-ouvert" ou par le fait que la restriction d'une application ouverte à un sous-ensemble n'est pas, en général, une application ouverte. Dans ce sens on peut donner un

Exemple 13. Soit X un ensemble infini arbitraire. Soient sur X les topologies suivantes : $\mathfrak{P}$ — la topologie discrète, $\mathfrak{Q}$ — la topologie faible, $\mathfrak{P}^*$ — la topologie dont les éléments sont les complémentaires de tous les ensembles finis de X et $\mathfrak{Q}^*$ — la topologie faible. Soit $f : (X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) \to (X, \mathfrak{P}^*, \mathfrak{Q}^*)$ l'application identique. Alors on peut prouver aisément que l'espace $(X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ est $\mathfrak{P}$-localement $\mathfrak{P}$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}$, l'application f a la propriété que ses composantes f_1 et f_2 sont, respectivement, continue et ouverte, mais $(X, \mathfrak{P}^*, \mathfrak{Q}^*)$ — l'image de $(X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ par f — n'est pas $\mathfrak{P}^*$-localement $\mathfrak{P}^*$-compact par rapport à $\mathfrak{Q}^*$.

La remarque précédente sur l'image d'un espace bitopologique localement compact fait possible la conclusion que la proposition réciproque de la proposition 18 n'est pas, en général, vraie.

III. Espace $(R, \mathcal{J}, \mathcal{S})$

On munit la droite numérique R de la bitopologie composée par la topologie inférieurement $\mathcal{J}$ sur R (c'est-à-dire la famille des ensembles $\{x, x < \alpha\}$, $\alpha \in R$) et la topologie supérieurement $\mathcal{S}$ sur R (c'est-à-dire la famille des ensembles $\{x ; x < \alpha\}$, $\alpha \in R$).

Dans l'étude des espaces bitopolgiques, l'espace $(R, \mathcal{J}, \mathcal{S})$, ainsi introduit, joue le même rôle [7, 4] que celui joué par l'espace $(R, \mathfrak{U})$ — la doite numérique munie de la topologie usuelle — dans la topologie classique.

Dans cette partie de la Note, on expose quelques propriétés de l'espace $(R, \mathcal{J}, \mathcal{S})$.

La proposition suivante donne une caractérisation des ensembles $\mathcal{S}$-compacts par rapport à $\mathcal{J}$ dans l'espace $(R, \mathcal{J}, \mathcal{S})$.

Proposition 19. *Pour qu'un sous-ensemble* A *de* $(R, \mathcal{J}, \mathcal{S})$ *soit* $\mathcal{S}$*-compact par rapport à* $\mathcal{J}$ *il faut et il suffit qu'il soit borné supérieurement et qu'il contienne sa borne supérieure.*

Démonstration. Nécessité. On suppose que A est un sous-ensemble $\mathcal{S}$-compact par rapport à $\mathcal{J}$. Alors pour tout recouvrement $\mathcal{S}$-ouvert de A il y a un recouvrement $\mathcal{J}$-ouvert de A plus fin et fini. Au dernier recouvrement on peut faire correspondre un sous-recouvrement fini du premier. Il suit que l'ensemble A est borné supérieurement.

Maintenant on suppose, par absurde, que l'ensemble A ne contient pas sa borne supérieure. Soit $\{x_i\}_1^n \subset A$ une suite convergente (dans la topologie usuelle) à la borne supérieure de A. Alors le recouvrement induit sur A par la famille des ensembles $\mathcal{S}$-ouverts $\{(-\infty, x_i)\}_1^n$ est un recouvrement $\mathcal{S} \cap A$-ouvert de A pour lequel on ne peut pas indiquer un recouvrement $\mathcal{J} \cap A$-ouvert de A plus fin et fini. On est parvenu ainsi à une contradiction. Il reste, donc, que A contient sa borne supérieure.

Suffisance. On suppose que A est borné supérieurement et contient sa borne supérieure. Soit $\mathcal{A}$ un recouvrement $\mathcal{S} \cap A$-ouvert de A. On observe que $A \in \mathcal{A}$, parce que la borne supérieure de A appartient seulement à l'ensemble A du recouvrement considéré. Mais alors $\{A\}$ est un recouvrement de A $\mathcal{J} \cap A$-ouvert, fini et plus fin que $\mathcal{A}$. C'est-à-dire A est $\mathcal{S}$-compact par rapport à $\mathcal{J}$.

Corollaire 8. *Pour que l'ensemble* A *de* $(R, \mathcal{J}, \mathcal{S})$ *soit* $\mathcal{J}$*-compact par rapport à* $\mathcal{S}$ *(réciproquement compact) il faut et il suffit qu'il soit borné inférieurement (resp. borné) et qu'il contienne sa borne inférieure (resp. ses bornes).*

Corollaire 9. 1) *L'espace* $(R, \mathcal{J}, \mathcal{S})$ *n'est pas* $\mathcal{J}$*-compact par rapport à* $\mathcal{S}$ *ou* $\mathcal{S}$*-compact par rapport à* $\mathcal{J}$.

b) *L'espace* $(R, \mathcal{J}, \mathcal{S})$ *est* $\mathcal{J}$*-localement* $\mathcal{J}$*-compact par rapport à* $\mathcal{S}$ *et* $\mathcal{S}$*-localement* $\mathcal{S}$*-compact par rapport à* $\mathcal{J}$*, mais il n'est pas* $\mathcal{J}$*-localement* $\mathcal{S}$*-compact par rapport à* $\mathcal{J}$ *ou* $\mathcal{S}$*-localement* $\mathcal{J}$*-compact par rapport à* $\mathcal{S}$.

Remarque. Le théorème analogue au théorème de Weierstrass pour les fonctions continues défini sur un compact ne conduit pas à un résultat nouveau.

BIBLIOGRAPHIE

1. Bîrsan T. — *Sur les espaces bitopologiques connexes.* An. şt. Univ. Iaşi, s. I a, Matematică, t. XIV, fasc. 2 (1968), p. 292 — 296.
2. Bourbaki N. — *Eléments de mathématique*, Livre III, *Topologie générale*, chap. I, II, Troisième edition Hermann, Paris, 1966.

3. Kelley J. L. — *General topology*. Van Nostrand, Princeton, N. J., 1955.
4. Kelly J. C. — *Bitopological spaces*. Proc. London Math. Soc., t. XIII, (1963) p. 71—89.
5. Lane E. P. — *Bitopological spaces and quasi-uniform spaces*. Proc. London Math. Soc., t. XVII, (1967), p. 241—256.
6. — *Concerning extensions of semicontinuous functions in bitopological spaces*. Notices Amer. Math. Soc., t. XII, nr. 1, part 1, (1965), p. 128.
7. Pervin W. J. — *Connectedness in bitopological spaces*. Proc. Koninklijke Nederlandse Acad., 1967, p. 369—372.
8. Weston J. D. — *On the comparison of topologies*. Journal London Math. Soc., t. XXXII (1957), p. 342—354.

COMPACTITATE ÎN SPAŢII BITOPOLOGICE

Rezumat

În Notă se introduce noţiunea de compactitate în spaţii bitopologice: un spaţiu $(X, \mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ este $\mathfrak{A}$-compact în raport cu $\mathfrak{B}$ dacă pentru orice acoperire $\mathfrak{A}$-deschisă a lui X există o acoperire $\mathfrak{B}$-deschisă a lui X finită şi mai fină. Se abordează problemele obişnuite: produs de spaţii $\mathfrak{A}$-compacte faţă de $\mathfrak{B}$, imaginea unui spaţiu reciproc compact printr-o aplicaţie continuă şi deschisă, etc.

Se introduc noţiunile de spaţiu bitopologic $\mathfrak{A}$-local $\mathfrak{A}$-compact în raport cu $\mathfrak{B}$, ş.a. şi se dau unele proprietăţi ale lor.

Se consideră spaţiul $(R, \mathfrak{J}, \mathfrak{S})$ — dreapta reală înzestrată cu topologiile inferioară şi superioară — şi se precizează proprietăţile lui de compactitate.

DEUX DÉFINITIONS DES FONCTIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES CONTINUES A VALEURS DANS UN ESPACE VECTORIEL TOPOLOGIQUE

PAR

N. GHEORGHIU

La définition classique de Bohr [1] des fonctions presque-périodiques continues, définies sur l'ensemble des nombres réels, peut etre formulée aussi pour des fonctions ayant des valeurs dans un espace vectoriel topologique. Mais, en général, dans ce cas, la caractérisation à l'aide de la normalité par des suites [2] cesse d'être valable.

Cet inconvenient nous semble dû au fait que les ensembles précompacts d'un espace vectoriel topologique (EVT) ne se caractérisent pas par la convergence de certaines suites partielles des suites de l'ensemble donné, comme c'est le cas dans les espaces de Banach, mais par la convergence de certaines suites partielles généralisées extraites des suites généralisées de l'ensemble respectif.

C'est ce qu'a suggéré la définition de la notion de normalité par des suites généralisées et qui s'avère équivalente à celle de presque-périodicité.

Dans la Note présente, en plus de l'équivalence mentionnée, nous allons établir encore une caractérisation des ensembles précompacts de fonctions presque-périodiques.

En ce qui concerne la notion de suite généralisée (net), nous indiquons [3] Ch. 9 ou [4] Ch. 2 et pour la théorie générale des fonctions p.-p. [5], [6].

1. Notations. Nous allons noter constamment par X un espace vectoriel topologique complexe, séparé au sens de Hausdorff, complet pour les suites généralisées ; Γ — l'ensemble des nombres complexes ; R — l'axe réel ; $C(R, X)$ — l'ensemble des fonctions continues définies sur R et ayant les valeurs en X, organisé comme un espace vectoriel par rapport aux opérations habituelles ; $f(t)$ — les valeurs d'une fonction définie sur