3. Kelley J. L. — *General topology*. Van Nostrand, Princeton, N. J., 1955.
4. Kelly J. C. — *Bitopological spaces*. Proc. London Math. Soc., t. XIII, (1963) p. 71—89.
5. Lane E. P. — *Bitopological spaces and quasi-uniform spaces*. Proc. London Math. Soc., t. XVII, (1967), p. 241—256.
6. — *Concerning extensions of semicontinuous functions in bitopological spaces*. Notices Amer. Math. Soc., t. XII, nr. 1, part 1, (1965), p. 128.
7. Pervin W. J. — *Connectedness in bitopological spaces*. Proc. Koninklijke Nederlandse Acad., 1967, p. 369—372.
8. Weston J. D. — *On the comparison of topologies*. Journal London Math. Soc., t. XXXII (1957), p. 342—354.

COMPACTITATE ÎN SPAŢII BITOPOLOGICE

Rezumat

În Notă se introduce noţiunea de compactitate în spaţii bitopologice: un spaţiu $(X, \mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ este $\mathfrak{A}$-compact în raport cu $\mathfrak{B}$ dacă pentru orice acoperire $\mathfrak{A}$-deschisă a lui X există o acoperire $\mathfrak{B}$-deschisă a lui X finită şi mai fină. Se abordează problemele obişnuite: produs de spaţii $\mathfrak{A}$-compacte faţă de $\mathfrak{B}$, imaginea unui spaţiu reciproc compact printr-o aplicaţie continuă şi deschisă, etc.

Se introduc noţiunile de spaţiu bitopologic $\mathfrak{A}$-local $\mathfrak{A}$-compact în raport cu $\mathfrak{B}$, ş.a. şi se dau unele proprietăţi ale lor.

Se consideră spaţiul $(R, \mathcal{J}, \mathcal{S})$ — dreapta reală înzestrată cu topologiile inferioară şi superioară — şi se precizează proprietăţile lui de compactitate.

DEUX DÉFINITIONS DES FONCTIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES CONTINUES A VALEURS DANS UN ESPACE VECTORIEL TOPOLOGIQUE

PAR

N. GHEORGHIU

La définition classique de Bohr [1] des fonctions presque-périodiques continues, définies sur l'ensemble des nombres réels, peut etre formulée aussi pour des fonctions ayant des valeurs dans un espace vectoriel topologique. Mais, en général, dans ce cas, la caractérisation à l'aide de la normalité par des suites [2] cesse d'être valable.

Cet inconvenient nous semble dû au fait que les ensembles précompacts d'un espace vectoriel topologique (EVT) ne se caractérisent pas par la convergence de certaines suites partielles des suites de l'ensemble donné, comme c'est le cas dans les espaces de Banach, mais par la convergence de certaines suites partielles généralisées extraites des suites généralisées de l'ensemble respectif.

C'est ce qu'a suggéré la définition de la notion de normalité par des suites généralisées et qui s'avère équivalente à celle de presque-périodicité.

Dans la Note présente, en plus de l'équivalence mentionnée, nous allons établir encore une caractérisation des ensembles précompacts de fonctions presque-périodiques.

En ce qui concerne la notion de suite généralisée (net), nous indiquons [3] Ch. 9 ou [4] Ch. 2 et pour la théorie générale des fonctions p.-p. [5], [6].

1. Notations. Nous allons noter constamment par X un espace vectoriel topologique complexe, séparé au sens de Hausdorff, complet pour les suites généralisées; Γ — l'ensemble des nombres complexes; R — l'axe réel; $C(R, X)$ — l'ensemble des fonctions continues définies sur R et ayant les valeurs en X, organisé comme un espace vectoriel par rapport aux opérations habituelles; $f(t)$ — les valeurs d'une fonction définie sur

R; si $f \in C(R, X)$ et $h \in R$, on dit que la fonction $f_h \in C(R, X)$ avec $f(t) = f(t+h)$ est une translation de f, h étant le pas; $AP(R, X)$ désigne l'ensemble des fonctions presque-périodiques dont la définition suit immédiatement.

La définition des fonctions presque-périodiques. *On dit qu'une fonction $f \in C(R, X)$ est presque-périodique (au sens de Bohr) si pour chaque voisinage V de l'origine, il existe un nombre positif $l = l(V)$ tel que chaque intervalle de R de longueur $l(V)$ contienne au moins un nombre τ, (V — presque-période) pour lequel on a*

$$f(t+\tau) - f(t) \in V, \quad \text{où} \quad t \in R. \tag{1}$$

La définition des fonctions normales. *On dit que la fonction $f \in C(R, X)$ est normale si chaque suite généralisée arbitraire de translations de f possède des suites généralisées partielles uniformément convergentes sur R.*

2. Nous établissons d'abord quelques propriétés élémentaires de cette espèce de fonctions presque-périodiques.

Théorème 1. *Si $f \in AP(R, X)$, l'ensemble des valeurs $H_f = \{f(t) : t \in R\}$ est précompact et par conséquent il est borné.*

Théorème 2. *Chaque fonction $f \in AP(R, X)$ est uniformément continue sur R.*

Théorème 3. *Soient $f \in AP(R, X)$ et h réel arbitraire. Alors on a $f_h \in AP(R, X)$ et $\lambda f \in AP(R, X)$ pour tout $\lambda \in \Gamma$ et $h \in R$.*

Théorème 4. *Si $f \in AP(R, X)$, l'ensemble de ses translations est un ensemble également uniformément continu sur R, également presque-périodique et pour chaque $t \in R$ l'ensemble $\{f_h(t) : h \in R\}$ est précompact en X.*

Théorème 5. *La limite d'une suite généralisée de fonctions presque-périodiques uniformément convergente sur R, est aussi une fonction presque-périodique.*

Théorème 6. *Si un ensemble $\mathcal{F} \subset AP(R, X)$ est également uniformément continu sur R, également presque-périodique et pour chaque $t \in R$ l'ensemble des valeurs de ces fonctions $\mathcal{F}(t) = \{f(t) : f \in \mathcal{F}\}$, est précompact, alors toute suite généralisée de $\mathcal{F}$ possède des suites généralisées partielles uniformément convergentes sur R.*

Démonstrations. Nous allons démontrer seulement les théorèmes 1 et 6, les autres en résultant des idées qu'ils contiennent, conformément au modèle classique.

Soient U et V deux voisinages de l'origine tels que $U - U \subset V$ et $l = l(U) > 0$, le nombre qui correspond à U par la presque-périodicité de f; l'ensemble $\{f(t) : 0 \leqslant t \leqslant l\}$ est précompact parce qu'il est l'image d'un ensemble compact de R en X, par une fonction continue; il en résulte qu'il existe l'ensemble fini $t_1, t_2, \ldots, t_k$ tel que $\{f(t) : 0 \leqslant t \leqslant l\}$ peut être couvert par les ensembles $f(t_i) + U$, $i = 1, 2, \ldots, k$; pour chaque t réel, soit τ une U-presque-période de l'intervalle fermé $[-t, -t+l]$; comme $t + \tau \in [0, l]$, on peut désigner un entier i de sorte que $f(t+\tau) \in f(t_i) + U$;

nous aurons $f(t) = f(t+\tau) - (f(t+\tau) - f(t)) \in f(t_i) + U - U \subset f(t_i) + V$ et par suite $\{f(t) : t \in R\}$ est précompact parce que V étant un voisinage arbitraire de l'origine, l'ensemble en question peut être couvert par un ensemble fini de translations de V.

Passons maintenant au théorème 6. Pour chaque voisinage V de l'origine on peut attacher un autre, U, tel que

$$-U + U + U - U + U \subset V. \tag{2}$$

Parce que $\mathcal{F}$ est également uniformément continu, pour cet U il existe $\delta > 0$ tel que

$$f(t') - f(t'') \in U \text{ pour chaque } f \in \mathcal{F} \text{ et } |t' - t''| < \delta. \tag{3}$$

Mais $\mathcal{F}$ étant également presque-périodique, il existe un autre nombre $l = l(U)$ tel que tout intervalle de longueur l contienne un nombre τ pour lequel

$$f(t+\tau) - f(t) \in U, \quad t \in R, \quad f \in \mathcal{F}. \tag{4}$$

Soit M un ensemble fini $t_1, t_2, \ldots, t_k$ de l'intervalle fermé $[0, l]$ de sorte que pour chaque $t \in [0, l]$ il existe un t_i tel que (5)

$$|t - t_i| < \delta. \tag{5}$$

Prenons enfin une suite généralisée $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ de $\mathcal{F}$; comme toute suite généralisée d'un ensemble précompact a des suites généralisées partielles convergentes, après k extractions successives on obtient de $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ une suite généralisée partielle, notée de nouveau $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$, ponctuellement convergente sur M, donc uniformément convergente. On détermine par conséquent un élément $\gamma_0 \in A$ tel que

$$\alpha > \gamma_0 \text{ et } \beta > \gamma_0 \Rightarrow f_\alpha(t_i) - f_\beta(t_i) \in U, \; i = 1, 2, \ldots, k. \tag{6}$$

Soit t arbitraire et τ une U-presque-période telle que $0 \leqslant t + \tau \leqslant l$; il existe t_i, un point appartenant à M pour lequel $|(t+\tau) - t_i| < \delta$.

Pour $\alpha > \gamma_0$ et $\beta > \gamma_0$ on a $f_\alpha(t) - f_\beta(t) = \{f_\alpha(t) - f_\alpha(t+\tau)\} + \{f_\alpha(t+\tau) - f_\alpha(t_i)\} + \{f_\alpha(t_i) - f_\beta(t_i)\} + \{f_\beta(t_i) - f_\beta(t_i+\tau)\} + \{f_\beta(t_i+\tau) - f_\beta(t)\}$, d'où, en combinant avec (2)—(6), on obtient $f_\alpha(t) - f_\beta(t) \in V$, $t \in R$.

Cette dernière relation nous montre que la suite généralisée $(f_\beta)_{\alpha \in A}$ satisfait à la condition nécessaire et suffisante de l'uniforme convergence.

3. Nous allons présenter maintenant le théorème qui nous intéresse, à savoir le

Théorème 7. *Une fonction est presque-périodique si et seulement si elle est normale.*

Démosntration. La nécessité résulte immédiatement des théorèmes 4 et 6.

Nous démontrons la suffisance par l'absurde. Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi, donc la fonction est normale mais non presque-périodique.

Par conséquent, il existe un voisinage de l'origine V_0, tel que pour chaque $l > 0$, on peut déterminer un intervalle de longueur l qui ne contient pas une V_0-presque-période. En raisonnant comme dans le cas classique, on peut déterminer la suite réelle (h_n) et les points t_{ij} sur l'axe réel pour lesquels on a

$$f(t_{ij} + h_i - h_j) - f(t_{ij}) \notin V_0, \quad i \neq j. \tag{7}$$

En désignant $u_{ij} = t_{ij} - h_j$, la relation (7) devient

$$f(u_{ij} + h_i) - f(u_{ij} + h_j) \notin V_0, \quad i \neq j. \tag{8}$$

La condition (8) garantit le fait que la suite des translations (f_{h_i}) n'a pas une suite généralisée partielle uniformément convergente sur R, ce qui finit la démonstration.

Théorème 8. *La somme de deux fonctions presque-périodiques est aussi une fonction presque-périodique.*

Démonstration. On voit facilement que la somme de deux fonctions normales est une fonction normale.

4. L'organisation de l'ensemble $AP(R, X)$ comme un espace vectoriel topologique

Conformément aux théorèmes 3 et 8, on peut organiser $AP(R, X)$ comme un espace vectoriel par rapport aux opérations habituelles d'addition et de multiplication par des scalaires. Soit $\mathcal{V}$ le système des voisinages de l'origine dans la topologie de l'espace vectoriel X. Vu que les fonctions presque-périodiques sont bornées sur R, les ensembles

$$\tilde{V} = \{f : f \in AP(R, X),\ f(t) \in V,\ t \in R\}$$

construits pour chaque $V \in \mathcal{V}$ constituent un système fondamental de voisinages de l'origine en $AP(R, X)$ pour une topologie d'espace vectoriel. La convergence dans cette topologie coïncide avec la convergence uniforme sur R, des fonctions presque-périodiques. $AP(R, X)$ muni de cette topologie est un espace séparé Hausdorff complet pour les suites généralisées si X est un telespace.

Dans la suite, on va considérer $AP(R, X)$ muni de cette topologie.

Théorème 9. *Une famille finie de fonctions presque-périodiques est également presque-périodique.*

Démonstration. Soit X^n l'espace vectoriel topologique qu'on obtient en multipliant X n fois par lui-même, c'est-à-dire $X \times X \times \ldots \times X$, muni de la topologie-produit de X.

Il résulte que X^n est séparé au sens de Hausdorff et complet pour les suites généralisées. Une fonction $\tilde{f} : R \to X^n$ continue sur R, coïncide avec un n-uple $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ de fonctions continues qui appartient à $\mathcal{C}(R, X)$.

Soit encore l'espace des fonctions presque-périodiques $AP(R, X^n)$. Puisque l'uniforme convergence en $AP(R, X^n)$ coïncide avec la convergence uniforme par rapport aux coordonnées, on en déduit qu'un n-uple de $AP(R, X)$ fournit une fonction $\tilde{f}$ presque-périodique de $AP(R, X^n)$.

En écrivant que $\tilde{f}$ est presque-périodique au sens de Bohr avec un voisinage de la forme $V \times V \times \ldots \times V$, où $V \in \mathcal{V}$, nous concluons que la famille $f_1, f_2, \ldots, f_n$ est également presque-périodique.

Nous avons enfin tous les éléments nécessaires pour caractériser les familles précompactes de fonctions presque-périodiques.

Théorème 10. *Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions presque-périodiques définies sur R avec les valeurs dans X.*

La condition nécessaire et suffisante pour que toute suite généralisée de $\mathcal{F}$ ait des suites partielles généralisées uniformément convergentes sur R, est que :

I. *$\mathcal{F}$ soit également uniformément continue sur R ;*

II. *$\mathcal{F}$ soit également presque-périodique ;*

III. *pour chaque $t \in R$, l'ensemble $\mathcal{F}(t) = \{f(t) : f \in \mathcal{F}\}$ soit précompact en X.*

Démonstration. Remarquons d'abord que la première affirmation du théorème caractérise les ensembles précompacts de $AP(R, X)$.

La suffisance résulte facilement du théorème 6.

La nécessité. Soient $\mathcal{F}$ précompacte en $AP(R, X)$ et $U \in \mathcal{V}$, $V \in \mathcal{V}$, tels que

$$U + U - U \subset V. \tag{9}$$

Comme $\mathcal{F}$ est précompacte, il existe l'ensemble fini $f_1, f_2, \ldots, f_n$ de $\mathcal{F}$ de sorte que $\mathcal{F} \subset \bigcup_{i=1}^{n} (f_i + \tilde{U})$; autrement dit, pour chaque $f \in \mathcal{F}$, on peut indiquer une fonction f_i telle que

$$f(t) \in f_i(t) + U, \quad t \in R. \tag{10}$$

Vu que l'ensemble $f_1, f_2, \ldots, f_n$ est également uniformément continu, il existe le nombre $\delta > 0$ tel que

$$f_i(t') - f_i(t'') \in U, \text{ si } |t' - t''| < \delta \text{ et } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

Quand $|t' - t''| < \delta$ et $f \in \mathcal{F}$ l'identité

$$f(t') - f(t'') = \{f(t') - f_i(t')\} + \{f_i(t') - f(t'')\} + \{f_i(t'') - f(t'')\}$$

fournit le résultat que $\mathcal{F}$ est également uniformément continue, en considérant bien entendu les relations (9)—(11).

La nécessité de la deuxième partie de l'hypothèse résulte immédiatement : soit U et V, V — arbitrairement choisi, tels que les relations (9) et (10) soient satisfaites. Conformément au théorème (9), la famille $f_1, f_2, \ldots, f_n$ est également presque-périodique et par conséquent, au voisinage U correspond le nombre $l = l(U)$; soit τ une U-presque-période commune à toutes les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$, c'est-à-dire

$$f_i(t+\tau) - f_i(t) \in U, \quad t \in R; \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{12}$$

En ajoutant l'identité

$$f(t+\tau) - f(t) = \{f(t+\tau) - f_i(t+\tau)\} + \{f_i(t+\tau) - f_i(t)\} + \{f_i(t) - f(t)\}$$

aux considérations précédentes et les relations (9), (10), (12), l'affirmation devient évidente.

On déduit enfin facilement de la précompacité de $\mathcal{F}$ que III est nécessaire.

BIBLIOGRAPHIE

1. Bohr H. — *Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen*. I. Acta Math., 45 (1925), p. 29—127.
2. Bochner S. — *Abstrakte fastperiodische Funktionen*. Acta Math. 61 (1933), p. 149—184.
3. Wilansky Albert — *Functional Analysis*. Blaisdell Publishing Company. New York—Toronto—London, 1964.
4. Kelley J. L., Namioka I. and co-authors — *Linear topological spaces*. D. Van Nostrand Company, Inc. 1963.
5. Corduneanu C. — Almost periodic functions. John Wiley & Sons. New York, 1968.
6. Levitan B. M. — *Almost periodic functions*. (Russian). Moskow, 1953.

DOUĂ DEFINIŢII ALE FUNCŢIILOR APROAPE-PERIODICE CONTINUE CU VALORI ÎN SPAŢII VECTORIALE TOPOLOGICE

Rezumat

În lucrare se dau două definiţii echivalente pentru funcţii aproape-periodice continue pe mulţimea numerelor reale, cu valori într-un spaţiu vectorial topologic, separat Hausdorff, complet prin şiruri generalizate. Una este definiţia lui Bohr, iar cealaltă, definiţia normalităţii prin şiruri generalizate. Pe lîngă unele proprietăţi generale, se mai demonstrează o condiţie necesară şi suficientă de precompactitate a unei familii de funcţii aproape-periodice.

FONCTIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE

PAR

N. GHEORGHIU

Dans son livre [1], [2], C. Corduneanu consacre le second chapitre aux fonctions presque-périodiques à valeurs complexes dépendant d'un paramètre. Il paraît que ce soit le premier essai de développer une telle théorie, qui est d'ailleurs solicitée par certains problèmes d'équations différentielles où interviennent aussi des fonctions presque-périodiques [1], [2]. Le but de la Note présente est de nous occuper des fonctions presque-périodiques dépendant de paramètres, à valeurs dans des espaces vectoriels topologiques, la définition étant donnée de manière à nous fournir un mécanisme unitaire d'étude de ces fonctions. L'idée est qu'une fonction presque-périodique de la variable t dépendant d'un paramètre z, coïncide avec une autre fonction presque-périodique de la variable t à valeurs dans un espace vectoriel topologique convenablement choisi. Les résultats obtenus sont dans le genre des résultats classiques de la théorie des fonctions presque-périodiques au sens de Bohr et généralisent (en éliminant certaines conditions) les résultats obtenus dans [1], [2]. Cette Note est une continuation directe de notre Note antérieure de ce volume. Nous n'allons pas faire de nouvelles démonstrations, car il suffit de transposer les démonstrations de notre Note citée. Cette transposition est possible grâce à la définition qu'on a donnée.

Notations et conventions. X — espace vectoriel topologique, séparé Hausdorff, complet pour les suites généralisées. Γ — le corps des scalaires, nombres réels ou complexes ; R — l'ensemble des nombres réels Z — un ensemble quelconque non vide ; σ — un système de parties de Z, $(Z_\alpha)_{\alpha \in I}$, dont la réunion est Z, Z_α pouvant etre disjointes.

Soit ensuite $B_\sigma = B_\sigma(Z, X)$ l'ensemble des fonctions définies sur Z à valeurs dans X et bornées sur chaque Z_α. Par rapport aux opérations habi-