La nécessité de la deuxième partie de l'hypothèse résulte immédiatement : soit U et V, V — arbitrairement choisi, tels que les relations (9) et (10) soient satisfaites. Conformément au théorème (9), la famille $f_1, f_2, \ldots, f_n$ est également presque-périodique et par conséquent, au voisinage U correspond le nombre $l = l(U)$; soit τ une U-presque-période commune à toutes les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$, c'est-à-dire

$$f_i(t+\tau) - f_i(t) \in U, \quad t \in R; \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{12}$$

En ajoutant l'identité

$$f(t+\tau) - f(t) = \{f(t+\tau) - f_i(t+\tau)\} + \{f_i(t+\tau) - f_i(t)\} + \{f_i(t) - f(t)\}$$

aux considérations précédentes et les relations (9), (10), (12), l'affirmation devient évidente.

On déduit enfin facilement de la précompacité de $\mathcal{F}$ que III est nécessaire.

BIBLIOGRAPHIE

1. Bohr H. — *Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen*. I. Acta Math., 45 (1925), p. 29—127.
2. Bochner S. — *Abstrakte fastperiodische Funktionen*. Acta Math. 61 (1933), p. 149—184.
3. Wilansky Albert — *Functional Analysis*. Blaisdell Publishing Company, New York—Toronto—London, 1964.
4. Kelley J. L., Namioka I. and co-authors — *Linear topological spaces*. D. Van Nostrand Company, Inc. 1963.
5. Corduneanu C. — Almost periodic functions. John Wiley & Sons. New York, 1968.
6. Levitan B. M. — *Almost periodic functions*. (Russian). Moskow, 1953.

DOUĂ DEFINIŢII ALE FUNCŢIILOR APROAPE-PERIODICE CONTINUE CU VALORI ÎN SPAŢII VECTORIALE TOPOLOGICE

Rezumat

În lucrare se dau două definiţii echivalente pentru funcţii aproape-periodice continue pe mulţimea numerelor reale, cu valori într-un spaţiu vectorial topologic, separat Hausdorff, complet prin şiruri generalizate. Una este definiţia lui Bohr, iar cealaltă, definiţia normalităţii prin şiruri generalizate. Pe lîngă unele proprietăţi generale, se mai demonstrează o condiţie necesară şi suficientă de precompactitate a unei familii de funcţii aproape-periodice.

FONCTIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE

PAR

N. GHEORGHIU

Dans son livre [1], [2], C. Corduneanu consacre le second chapitre aux fonctions presque-périodiques à valeurs complexes dépendant d'un paramètre. Il paraît que ce soit le premier essai de développer une telle théorie, qui est d'ailleurs solicitée par certains problèmes d'équations différentielles où interviennent aussi des fonctions presque-périodiques [1], [2]. Le but de la Note présente est de nous occuper des fonctions presque-périodiques dépendant de paramètres, à valeurs dans des espaces vectoriels topologiques, la définition étant donnée de manière à nous fournir un mécanisme unitaire d'étude de ces fonctions. L'idée est qu'une fonction presque-périodique de la variable t dépendant d'un paramètre z, coïncide avec une autre fonction presque-périodique de la variable t à valeurs dans un espace vectoriel topologique convenablement choisi. Les résultats obtenus sont dans le genre des résultats classiques de la théorie des fonctions presque-périodiques au sens de Bohr et généralisent (en éliminant certaines conditions) les résultats obtenus dans [1], [2]. Cette Note est une continuation directe de notre Note antérieure de ce volume. Nous n'allons pas faire de nouvelles démonstrations, car il suffit de transposer les démonstrations de notre Note citée. Cette transposition est possible grâce à la définition qu'on a donnée.

Notations et conventions. X — espace vectoriel topologique, séparé Hausdorff, complet pour les suites généralisées. Γ — le corps des scalaires, nombres réels ou complexes ; R — l'ensemble des nombres réels Z — un ensemble quelconque non vide ; σ — un système de parties de Z, $(Z_\alpha)_{\alpha \in I}$, dont la réunion est Z, Z_α pouvant etre disjointes.

Soit ensuite $B_\sigma = B_\sigma(Z, X)$ l'ensemble des fonctions définies sur Z à valeurs dans X et bornées sur chaque Z_α. Par rapport aux opérations habi-

tuelles, B_σ est un espace vectoriel ; si V est un voisinage quelconque de l'origine dans X et M une réunion quelconque finie d'éléments de σ, alors les ensembles $\widetilde{V}(M, V) = \{\varphi : \varphi \in B_\sigma,\ \varphi(z) \in V,\ z \in M\}$ constituent un système fondamental de voisinages de l'origine pour une topologie d'espace vectoriel de B_σ. La convergence des éléments de B_σ dans cette topologie, coïncide avec la convergence uniforme sur chaque Z_α des fonctions $\varphi \in B_\sigma$. L'espace vectoriel topologique B_σ organisé de cette manière est separé Hausdorff et complet pour les suites généralisées, (cf. [3], chap. VII ou bien [4], chap. 0).

Notons par $C_\sigma = C_\sigma\ (R \times Z, X)$ l'ensemble des fonctions f définies sur $R \times Z$, à valeurs $f(t, z)$ dans X, ayant les propriétés suivantes : la restriction de f à chaque t est de B_σ, c'est-à-dire lorsque t est fixé, f est bornée sur chaque Z_α ; f est σ-continue sur R : c'est-à-dire si nous fixons un t_0, alors pour toute paire (V, α) il existe un nombre $\delta > 0$ tel que

$$(1) \qquad |t - t_0| < \delta \Rightarrow f(t, z) - f(t_0, z) \in V, \text{ pour tout } z \in Z_\alpha.$$

La définition des fonctions presque-périodiques dépendant d'un paramètre. *Une fonction $f \in C_\sigma$ s'appelle σ-presque-périodique, (σ — p.p.), si pour toute paire (V, α) on peut indiquer un nombre positif $l = l(V, \alpha)$ tel que sur tout intervalle de longueur l, il y ait au moins un nombre τ tel que*

$$(2) \qquad f(t + \tau, z) - f(t, z) \in V \text{ lorsque } t \in R \text{ et } z \in Z_\alpha.$$

Remarque. La définition précédente est donnée de manière que la propriété d'une fonction f de C_σ d'etre σ-p.p. coïncide avec la propriété de la fonction $\widetilde{f} : R \to B_\sigma$, définie par la relation $\widetilde{f}(t) = f(t,.)$ d'être presque-périodique (voir la définition de notre Note antérieure). Ce fait nous permet de donner sans démonstration (qui présenterait certaines difficultés) les propriétés suivantes (dans ce qui suit nous allons noter par $AP_\sigma(R, X)$, ou bien AP_σ, l'ensemble des fonctions σ-presque-périodiques) :

I. *Si $f \in AP_\sigma$, alors l'ensemble des valeurs de f est σ-précompact, c'est-à-dire pour tout α l'ensemble $\{f(t, z) : t \in R, z \in Z_\alpha\}$ est précompact, et donc aussi borné.*

II. *Si f est de AP_σ, alors f est σ-uniformément continue, c'est-à-dire pour toute paire (V, α), il existe un nombre $\delta > 0$, tel que $|t' - t''| < \delta$ et $z \in Z_\alpha$ implique $f(t', z) - f(t'', z) \in V$.*

III. *Si f est dans AP_σ, h nombre réel, $\lambda \in \Gamma$ alors $\lambda f \in AP_\sigma$, $f_h \in AP_\sigma$; (f_h est une translation de f définie par $f_h(t, z) = f(t + h, z)$ sur $R \times Z$.*

IV. *La limite d'une suite généralisée de fonctions σ — p.p., σ-uniformément convergente sur R, est une fonction σ-p.p.* (La suite généralisée $(f_i)_{i \in I}$ s'appelle σ-uniformément convergente sur R si pour toute paire (V, α) il existe un i_0 tel que $i > i_0$, $t \in R$, $z \in Z_\alpha$, implique $f_i(t, z) - f(t, z) \in V$, *où f est la limite.*

V. *Si un ensemble $\mathcal{F} \subset AP_\sigma$ est σ-également uniformément continu sur R, également σ-presque-périodique et pour chaque $t \in R$ et $\alpha \in A$ l'ensemble $\mathcal{F}(t, \alpha) = \{f(t, z) : f \in \mathcal{F},\ z \in Z_\alpha\}$ est précompact dans X, alors toute suite généralisée de $\mathcal{F}$ a des sous-suites généralisées σ-uniformément convergentes sur R.*

La définition de la σ-normalité. *Une fonction $f \in C_\sigma$ s'appelle σ-normale, si toute suite généralisée de translations de f a des sous-suites généralisées σ-uniformément convergentes sur R.*

VI. *Une fonction de C_σ est σ-presque-périodique si et seulement si elle est σ-normale.*

VII. *La somme de deux fonctions de AP_σ est une fonction de AP_σ, et donc par rapport aux opérations habituelles AP_σ est un espace vectoriel.*

VIII. *Une famille finie de fonctions σ — p.p. est un ensemble également σ — p.p.*

IX. *Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de fonctions σ — p.p. La condition nécessaire et suffisante pour que toute suite généralisée de $\mathcal{F}$ ait des sous-suites généralisées σ-uniformément convergentes sur R, est que*

1° *$\mathcal{F}$ soit σ-également uniformément continu sur R ;*

2° *$\mathcal{F}$ soit également σ-p.p. ;*

3° *pour chaque paire (t, α), l'ensemble $\mathcal{F}(t, \alpha) = \{f(t, z) : f \in \mathcal{F},\ z \in Z_\alpha\}$ soit précompact dans X.*

Nous allons donner maintenant quelques cas particuliers de fonctions σ-presque-périodiques.

a) Le cas le plus simple est lorsque les ensembles Z_α coïncident avec les ensembles formés par un seul élément de Z ; alors la définition devient : une fonction $f : R \times Z \to X$, qui, pour chaque $z \in Z$, est continue par rapport à $t \in R$, s'appelle σ-p.p si pour toute paire (V, z) on peut déterminer un nombre positif $l = l(V, z)$ tel que sur tout intervalle de longeuer l on trouve au moins un nombre τ tel que $f(t + \tau, z) - f(t, z) \in V$ pour tout $t \in R$.

b) Si tous les ensembles Z_α coïncident avec Z, la définition se traduit par : soit $f : R \times Z \to X$ une fonction bornée sur Z pour chaque $t \in R$ et continue en chaque $t \in R$, uniformément par rapport à $z \in Z$; f s'appelle presque-périodique en t, uniformément par rapport à $z \in Z$ si pour tout V il existe un nombre positif $l = l(V)$, tel que sur tout intervalle de longueur l il y ait au moins un nombre τ tel que $f(t + \tau, z) - f(t, z) \in V$ pour tout $t \in R$ et $z \in Z$.

Jusqu'à présent Z a été un ensemble amorphe, c'est-à-dire non doté d'une structure algébrique ou topologique. Prenons le cas où Z est un espace topologique et σ une famille d'ensembles compacts dont la réunion est Z ; soit $f : R \times Z \to X$ une fonction σ-continue par rapport à t (cf. à la définition donnée au commencement) et pour chaque t fixé continue sur Z ; alors toutes les conditions pour définir la σ-presque-périodicité de f sont satisfaites.

BIBLIOGRAPHIE

1. Corduneanu C. — *Funcţii aproape-periodice*. Editura Academiei Republicii Socialiste România, 1961.
2. — *Almost Periodic Functions*. John Wiley & Sons, New York, 1968.
3. Garsoux J. — *Espaces vectoriels topologiques et distributions*. Dunod, Paris, 1963.
4. Grothendieck A. — *Espaces vectoriels topologiques*. São Paulo, 1964.

FUNCŢII APROAPE-PERIODICE DEPINZÎND DE PARAMETRI

Rezumat

Se consideră spaţiul vectorial topologic B_σ al funcţiilor $f: R \times Z \to X$, (unde R este mulţimea numerelor reale, Z o mulţime oarecare, X un spaţiu vectorial topologic separat Hausdorff, complet prin şiruri generalizate), mărginite pe mulţimile Z_α a căror reuniune este Z. O funcţie f din B_σ se numeşte σ-aproape-periodică dacă este σ-continuă în t şi pentru orice pereche (V, α) (V — o vecinătate oarecare a originii în X, $Z_\alpha \subset Z$), există un număr pozitiv $l = l(V, \alpha)$, încît orice interval al axei reale conţine măcar un număr τ astfel că $f(t + \tau, z) - f(t, z) \in V$ pentru $t \in R$ şi $z \in Z_\alpha$. Se stabileşte echivalenţa acestei definiţii cu definiţia σ-normalităţii şi se enumeră proprietăţile generale ale funcţiilor definite, ale căror demonstraţii rezultă din Nota precedentă a autorului, din acest volum.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES FRÉCHET

PAR

CORNELIU URSESCU

1. Introduction

Dans cet article, on étudie l'équation aux dérivées Fréchet*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x) = f(x, u(x)). \tag{1.1}$$

Cette équation, qui contient aussi le cas particulier des équations scalaires aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_p) = f_{ij}(x_1, \ldots, x_p, u_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, u_q(x_1, \ldots, x_p)), \tag{1.2}$$

a été considérée dans différents travaux [1], [3], [9], [10], [13], [14], [15], [16] dans des hypothèses qui supposent l'existence des dérivées partielles de Fréchet $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$ et l'existence d'une liaison entre les fonctions f, $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$, liaison qui est nommée „la condition d'intégrabilité complète".

Le problème de l'existence de la solution de l'équation (1.1), sans supposer l'existence de la dérivée partielle Fréchet $\partial f/\partial x$ et en utilisant une „condition d'intégrabilité complète", qui généralise la condition classique et qui exprime une liaison entre les fonctions f et $\partial f/\partial y$ (formule (4.2)), fait l'objet de ce travail.

On étudie ensuite la dépendance de la solution de l'équation (1.1) d'un paramètre et enfin on étudie l'équation linéaire et homogène aux dérivées de Fréchet

* Pour tout ce que concerne la dérivée de Fréchet, voir [4], [5], [6], [11].