Seminarul Matematic
„Al. Myller"

SUR QUELQUES PROBLÈMES DE COMPORTEMENT GLOBAL ET DE PERTURBATION DANS LA THÉORIE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES NON-LINÉAIRES DE VOLTERRA

PAR

N. PAVEL

Introduction. Dans cet article nous allons étudier les équations intégrales vectorielles :

$$\text{(E)} \qquad x(t) = F(t\,;x) + \int_0^t k(t,s)\,f(s\,;x)\,ds,$$

en utilisant la méthode développée par C. Corduneanu dans [1]. Nous allons considérer différents cas particuliers pour l'opérateur $F(t\,;x)$.

Dans le théorème 3 il s'agit des cas où $F(t\,;x)$ est linéaire.

L'espace où nous travaillerons sera l'espace $C_c(R_+, R^n)$ des fonctions vectorielles continues sur le demi-axe $R_+ = \{t\,;t \geq 0\}$, à valeurs dans l'espace euclidien à n-dimensions R^n.

L'espace $C_c(R_+, R^n)$ est un espace vectoriel topologique localement convexe, dont la topologie est définie à l'aide de la famille suffisante de semi-normes :

$$|f|_m = \sup_{t \in [0,m]} \|f(t)\|, \text{ pour } m \in N, \ \|f(t)\| = \sqrt{(f_1(t))^2 + \dots + (f_n(t))^2},$$

$f_1, f_2, \dots, f_n$ étant les composantes de la fonction vectorielle f.

Parce que cette famille de semi-normes est dénombrable, il en résulte que $C_c(R_+, R^n)$ est métrisable.

Considérons l'opérateur :

$$(Tg)(t) = \int_0^t k(t,s)g(s)ds, \quad g \in C_c(R_+, R^n), \tag{1}$$

où $k(t,s)$ est une matrice de type $n \times n$, continue sur R_+.

Cet opérateur est linéaire et continu sur $C_c(R_+, R^n)$, $(T : C_c(R_+, R^n) \to C_c(R_+, R^n))$.

A l'aide du théorème du graphe fermé (voir [6] p. 37 ou [7] p. 114), on démontre que si la paire (B, D) d'espaces de Banach de $C_c(R_+, R^n)$ plus forts que $C_c(R_+, R^n)$, (c'est-à-dire ayant les topologies plus fortes que la topologie de $C_c(R_+, R^n)$) est admissible par rapport à l'opérateur T (c'est-à-dire $TB \subset D$), alors T est continu sur B, donc :

$$\|Tg\|_D \leqslant k\|g\|_B, \quad g \in B, \tag{2}$$

k étant un nombre positif (voir [1]).

§ 1. En utilisant des théorèmes de point fixe, nous allons établir quelques théorèmes d'existence et unicité de la solution de l'équation (E), d'où résultera son comportement global.

Théorème 1. *Si l'équation* (E), *satisfait aux conditions suivantes :*

a_1) *La paire* (B, D) *d'espaces de Banach de* $C_c(R_+, R^n)$ *plus forts que* $C_c(R_+, R^n)$ *est admissible par rapport à l'opérateur* T.

b_1) *L'opérateur* $x \to f(\cdot\,; x)$ *défini sur la fermeture* $\bar{S}$ *de* S *dans* $C_c(R_+, R^n)$, *où* $S = \{x, x \in D, \|x\|_D \leqslant \rho, \rho > 0\}$ *est continu sur* $\bar{S}$, *à valeurs dans* B *et satisfait encore à :*

$$\|f(\cdot, x)\|_B \leqslant r_1, \quad x \in \bar{S}, \tag{1.1}$$

$$\|f(t; x)\| \leqslant \lambda_1(t), \quad x \in \bar{S}, \tag{1.2}$$

où r_1 *est un nombre positif et* λ_1 *une fonction positive, continue sur* R_+.

c_1) *L'opérateur* $x \to F(\cdot\,; x)$ *est continu sur* $\bar{S}$, *à valeurs dans* D, *et satisfait encore à :*

$$\|F(\cdot\,; x)\|_D \leqslant r_2, \quad x \in S, \quad r_2 > 0. \tag{1.3}$$

d_1) $F(S)$ *est relativement compact dans* $C_c(R_+, R^n)$,
alors, dès que $r_1 + kr_2 \leqslant \rho$, *l'équation* (E) *admet au moins une solution* $x \in S \subset D$.

Démonstration. Nous utiliserons le théorème du point fixe de Schauder et Tychonoff pour l'ensemble $\bar{S} \subset C_c(R_+, R^n)$ et l'opérateur U, où

$$(Ux)(t) = F(t; x) + \int_0^t k(t,s) f(s; x)ds, \tag{3}$$

c'est-à-dire :

$$Ux = F(\cdot\,; x) + Tf(\cdot\,; x). \tag{4}$$

Pour $x \in \bar{S}$, $f(\cdot\,; x) \in B$, donc $Tf(\cdot\,; x) \in D$. De même $F(\cdot\,; x) \in D$, donc $Ux \in D$. Les valeurs de U appartiennent, à S.

En effet, selon les conditions (1.1) et (1.3), il résulte :

$$\|Ux\|_D \leqslant r_2 + k\|f(\cdot\,; x)\|_B \leqslant r_2 + kr_1 \leqslant \rho, \quad x \in \bar{S}, \tag{5}$$

d'où

$$US \subset \overline{US} \subset \bar{S}. \tag{6}$$

Il est aisé de voir que U est continu de $C_c(R_+, R^n)$ à $C_c(R_+, R^n)$, donc il reste à montrer seulement que US est un ensemble de fonctions relativement compact dans $C_c(R_+, R^n)$ (c'est-à-dire que les fonctions appartenant à US sont équicontinues et uniformément bornées sur chaque intervalle fini de R_+).

Mais :

$$\|U(x)(t)\| \leqslant \|F(t; x)\| + \int_0^t \|k(t,s)\| \lambda_1(s)ds, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \|(Ux)(t) - (Ux)(\tau)\| \leqslant \|F(t; x) - F(\tau, x)\| + \int_0^t \|f(s; x)[k(t,s) - \\ - k(\tau, s)]ds\| + \int_\tau^t \|k(\tau, s) f(s; x)ds\|, \tau > 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Nous avons utilisé l'égalité évidente :

$$\int_0^\tau k(\tau, s) f(s; x)ds = \int_0^t k(\tau, s) f(s; x)ds - \int_\tau^t k(\tau, s) f(s; x)ds. \tag{9}$$

En tenant compte de (d_1), nous avons ;

$$\|F(t; x)\| < M, \quad x \in \bar{S}, \quad 0 \leqslant t \leqslant a, \quad M > 0. \tag{10}$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$, tel que :

$$\|F(t; x) - F(\tau; x)\| < \varepsilon \text{ pour } |t - \tau| < \delta(\varepsilon), \quad \forall x \in S, \tag{11}$$

où $t, \tau \in [0, a]$.

En tenant compte de (10) et de (7), on obtient :

$$\|(Ux)(t)\| \leq M + \int_0^t \|k(t,s)\| \lambda_1(s)ds, \tag{12}$$

d'où il résulte que $U(\bar{S})$ est uniformément borné sur $[0, a]$.

De même, selon les relations (8) et (11) on peut déduire que $U(\bar{S})$ est équicontinu sur $[0, a]$.

Donc, le théorème de Schauder et Tychonoff étant satisfait, il en résulte l'existence d'une solution x, de l'équation (E), qui appartient à $S \subset D$.

Théorème 2. *Supposons que :*

a₂) *La paire (B, D) d'espaces de Banach de $C_c(R_+, R^n)$ plus forts que $C_c(R_+, R^n)$ est admissible par rapport à l'opérateur T.*

b₂) *L'opérateur $x \to f(.;x)$ défini sur l'ensemble $S = \{x, x \in D, |x|_D \leq \rho\}$ a les valeurs dans B, et de plus :*

$$|f(.;x) - f(.;y)|_B \leq \lambda |x - y|_D, \quad x, y \in S, \quad \lambda > 0, \tag{2.1}$$

c₂) *L'opérateur $x \to F(.;x)$ défini sur S, à valeurs dans D, satisfait encore à :*

$$|F(.;x) - F(.;y)|_D \leq \lambda_1 |x - y|_D, \quad x, y \in S, \quad \lambda_1 > 0, \tag{2.2}$$

$$|F(.;x)|_D \leq r, \quad x \in S. \tag{2.3}$$

d₂) *Les constantes λ_1 et λ satisfont à :*

$$\lambda_1 + k\lambda < 1. \tag{2.4}$$

Alors, si les constantes r, λ, λ_1, $|f(.;0)|_B$ satisfont à l'inégalité :

$$r + \lambda k\rho + k|f(.;0)|_B \leq \rho, \tag{13}$$

l'équation (E) *admet une solution unique $x \in S \subset D$.*

Démonstration. Considérons l'espace D et utilisons le théorème du point fixe de Banach pour l'ensemble $S \subset D$ et l'opérateur U, défini par :

$$(Ux)(t) = F(t;x) + \int_0^t k(t,s)f(s;x)ds, \tag{14}$$

où

$$Ux = F(.;x) + Tf(.;x). \tag{15}$$

Tout d'abord, selon les conditions a₂), b₂) et c₂) de ce théorème, il résulte que l'opérateur U est continu de S à D.

Montrons l'inclusion

$$US \subset S. \tag{16}$$

En effet :

$$\begin{aligned} |Ux|_D &\leq |F(.;x)|_D + k|f(.;x)|_B \leq r + \lambda k|x|_D + k|f(.;0)|_B \leq \\ &\leq r + \rho\lambda k + k|f(.;0)|_B, \quad x \in D. \end{aligned} \tag{17}$$

Évidemment, nous avons utilisé l'inégalité :

$$|f(.;x)|_B \leq |f(.;x) - f(.;0)|_B + |f(.;0)|_B \leq \lambda|x|_D + |f(.;0)|_B. \tag{18}$$

Donc compte tenu de l'hypothèse (13), l'inclusion (16) est démontrée.

Il reste à montrer que l'opérateur U est un opérateur de contraction.

Soit $x, y \in S$, $x \neq y$. On aura :

$$\begin{aligned} |Ux - Uy|_D &\leq |F(.;x) - F(.;y)|_D + |T[f(.;x) - f(.;y)]|_D \leq \\ &\leq \lambda_1|x - y|_D + k|f(.;x) - f(.;y)|_B \leq (\lambda_1 + k\lambda)|x - y|_D, \end{aligned} \tag{19}$$

d'où, d'après la condition (2.4), il résulte la contraction de l'opérateur U.

§ 2. Nous considérons maintenant les espaces suivants :

1° $C_g = \{f, f \in C_c(R_+, R^n), \|f(t)\| \leq M_f g(t)\}$ où M_f est un nombre positif et g une fonction positive et continue sur R_+.

Avec la norme :

$$|F|_{C_g} = \sup_{t \in R_+} \frac{\|f(t)\|}{g(t)}, \tag{20}$$

C_g est un espace de Banach plus fort que $C_c(R_+, R^n)$.

2° L'espace C, obtenu de C_g, pour $g(t) \equiv 1$, $t \in R_+$. On considère maintenant le cas : $F(t;x) = A(t)x(t)$, où $A(t)$ est une matrice de type $n \times n$, continue sur R_+, $A(t) \not\equiv E$ pour $t \in R_+$, E étant la matrice unité de type $n \times n$. Dans ce cas l'équation (E) devient.

$$x(t) = A(t)x(t) + \int_0^t k(t,s)f(s;x)ds. \tag{E₁}$$

Théorème 3. *Si pour l'équation* (E₁) *on admet les conditions :*

a₃) $\int_0^t \|k(t,s)\| g(s)ds \leq A, t \in R_+, \ A > 0.$

b₃) *L'opérateur $x \to f(.;x)$ est défini sur l'ensemble $S = \{x, x \in C, |x(t)| \leq \rho, t \in R_+, \rho > 0\}$, a les valeurs dans $C_c(R_+, R^n)$ et satisfait de plus à :*

(3.1) $$f(\,.\,;0) \in C_g \quad (\text{donc } \|f(t;0)\| \leqslant M_f g(t)),$$

(3.2) $$\|f(t;x) - f(t;y)\| \leqslant \lambda g(t)\,\|x(t) - y(t)\|, \quad x, y \in S,$$

c₃) $$\|A(t)\| \leqslant a, \quad a > 0,$$

d₃) $$a + \lambda A < 1,$$

alors cette équation admet une solution unique $x \in S$, dès que a, λ et $\|f(\,.\,;0)\|_{C_g}$ sont assez petits.

Démonstration. Pour démontrer ce théorème, nous utiliserons le théorème 2.

En prenant $B = C_g$, $D = C$, la paire (C_g, C) est admissible par rapport à l'opérateur T, d'après la condition a₃).

De l'inégalité:

$$\|f(t;x)\| \leqslant \|f(t;x) - f(t;0)\| + \|f(t;0)\| \leqslant \lambda\rho g(t) + M_f g(t), \quad x \in S,$$

il résulte que $f(\,.\,;x) \in C_g$, $x \in S$.

Compte tenu de (3.2) on a:

$$\sup_{t \in R_+} \|f(t;x) - f(t;y)\|/g(t) \leqslant \lambda \sup_{t \in R_+} \|x(t) - y(t)\|,$$

c'est-à-dire:

$$\|f(\,.\,;x) - f(\,.\,;y)\|_{C_g} \leqslant \lambda\,\|x - y\|_C,$$

et par conséquent la condition b₂) est satisfaite.

On peut prendre:

$$\lambda_1 = a, \quad r = a\rho, \quad \text{car } \|A(t)x(t) - A(t)y(t)\| \leqslant a\,\|x(t) - y(t)\| \text{ et } \|A(t)x(t)\| \leqslant a\rho.$$

On a:

(21) $$k = A.$$

En effet:

$$\|(Tx)(t)\| \leqslant \int_0^t k(t,s)\,\|x(s)\|\,ds \leqslant \int_0^t k(t,s)\,\|x(s)\|/g(s)\,g(s)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \|x\|_{C_g} \int_0^t k(t,s)\,g(s)\,ds \leqslant A\,\|x\|_{C_g}, \text{ donc}$$

$$\|Tx\|_C \leqslant A\,\|x\|_{C_g},$$

d'où la relation (21).

La relation (21) et la condition d₃) ont pour conséquence la condition (2.4).

La théorème 3 résulte donc du théorème 2.

Remarque 1. On peut réduire l'équation (E₁) à une équation de la forme:

$$x(t) = \int_0^t k_1(t,s)\,f(s;x)\,ds,$$

où $k_1(t,s) = k(t,s)[E - A(t)]^{-1}$, en supposant $\det[E - A(t)] \neq 0$ pour $t \in R_+$.

Théorème 4. *En admettant les conditions:*

a₁) $$\int_0^t k(t,s)\,g(s)\,ds \leqslant A, \quad A > 0, \quad t \in R_+.$$

b₁) *L'opérateur $x \to f(\,.\,;x)$ défini sur $S = \{x, x \in C, \|x(t)\| \leqslant \rho, t \in R_+\}$ à valeurs dans $C_c(R_+, R^n)$ satisfait aux conditions:*

(4.1) $$f(\,.\,;0) \in C_g, \text{ donc } \|f(t;0)\| \leqslant M_f g(t), \quad t \in R_+,$$

(4.2) $$\|f(t;x) - f(t;y)\| \leqslant \lambda g(t)\,\|x(t) - y(t)\|, \quad x, y \in S, \quad t \in R_+.$$

c₁) *$x \to F(\,.\,;x)$ est un opérateur défini sur S, à valeurs dans $C_c(R_+, R^n)$ et satisfait à:*

(4.3) $$F(\,.\,;0) \in C,$$

(4.4) $$\|F(t;x) - F(t;y)\| \leqslant \lambda_1 \|x(t) - y(t)\|, \quad x, y \in S, \quad t \in R_+,$$

alors, dès que $\lambda_1, \lambda_2, \|f(t;0)\|/g(t)$, $\|F(t;0)\|$ sont assez petits il existe une solution unique $x \in S$ de l'équation (E). (Donc $\|x(t)\| \leqslant \rho$, $t \in R_+$).

Pour démontrer ce théorème, nous appliquerons le théorème 2, en choisissant $B = C_g$, $D = C$.

Les conditions (4.1) et (4.3) ont pour conséquence $f(\,.\,;x) \in C_g$ et $F(\,.\,;x) \in C$, $x \in S$.

On peut considérer $r = \lambda_1\rho + \|F(\,.\,;0)\|_C$, car:

$$\|F(t;x)\| \leqslant \lambda_1\rho + \|F(t;0)\|, \quad x \in S.$$

Il est aisé de voir que les conditions du théorème 4 ont pour conséquence les conditions du théorème 2, ce qui démontre le théorème 4.

Théorème 5. *Si pour l'équation (E) les conditions suivantes sont sa-satisfaites:*

a₅) $\|k(t,s)\| \leqslant h e^{-\beta(t-s)}$, $h > 0$, $0 < \beta < \alpha$, $0 \leqslant s \leqslant t < +\infty$.

b₅) *L'opérateur $x \to f(\,.\,;x)$ défini sur l'ensemble $S = \{x, x \in C, \|x(t)\| \leqslant \rho e^{-\alpha t}, t \in R_+\}$ a les valeurs dans $C_c(R_+, R^n)$, et:*

(5.1) $$\|f(t;x)-f(t;y)\| \leqslant \lambda \|x(t)-y(t)\| \quad x,y \in S,\ t \in R_+,$$

(5.2) $$f(t;0) \equiv 0,\ t \in R_+ .$$

c_5) *L'opérateur* $x \to F(\,.\,;x)$ *est défini sur* S, *à valeurs dans* $C_c(R_+,R^n)$, *et :*

(5.3) $$\|F(t;x)-F(t;y)\| \leqslant \lambda_1 \|x(t)-y(t)\|,\ x,y \in S,\ t \in R_+$$

(5.4) $$F(t;0) \in C_{e^{-\beta t}},\ (\textit{c'est-à-dire}\ \|F(t;0)\| \leqslant M_F e^{-\beta t}),$$

alors, dès que λ_1, λ, M_f *sont assez petits, l'équation* (E) *admet une solution unique* $x \in S \subset C_{e^{-\beta t}}$ (*donc* $\sup\limits_{t \in R_+} \|x(t)\| e^{\beta t} \leqslant \rho$, *d'où* $\|x(t)\| \leqslant \rho e^{-\beta t}$, $t \in R_+$).

La démonstration de ce théorème résulte du théorème 2, en choisissant $B = D = C_{e^{-\beta t}}$.

La condition a_5) implique a_2) [1].

De la relation:

$$\|F(t;x)\| \leqslant \lambda_1 \|x(t)\| + \|F(t;0)\| \leqslant \lambda_1 \rho e^{-\beta t} + M_F e^{-\beta t},\ x \in S,$$

on déduit:

$$\|F(\,.\,;x)\|_{C_{e^{-\beta t}}} \leqslant \lambda_1 \rho + M_F,$$

donc on peut prendre $r = \lambda_1 \rho + M_F$.

On peut vérifier aussi les autres conditions du théorème 2.

Remarque 2. Des théorèmes 1, 2, 4, et 5 on peut déduire des résultats semblables pour le cas $F(\,.\,;x) \equiv h$ [1] et aussi pour le cas $F(\,.\,;x) \equiv 0$, donc pour l'équation

(E$_2$) $$x(t) = \int_0^t k(t,s) f(s;x)\,ds.$$

§ 3. D'une manière analogue à celle utilisée dans [2] et [3], nous étudierons quelques problèmes de perturbation des équations intégrales non-linéaires de Volterra.

Considérons les équations intégrales:

(E$_3$) $$x(t) = \int_0^t [k(t,s) f(s;x) + k(t,s,x(s))]\,ds.$$

(E$_4$) $$x(t) = f(t) + \int_0^t [k(t,s) f(s;x) + k(t,s,x(s))]\,ds.$$

Ces équations sont obtenues par la perturbation des équations (E$_2$) et (E$_3$), où

(E$_5$) $$x(t) = f(t) + \int_0^t k(t,s) f(s;x)\,ds.$$

Pour étudier les équations (E$_3$) et (E$_4$) nous appliquons les théorèmes antérieurs, respectivement pour:

(22) $$F(t;x) = \int_0^t k(t,s,x(s))\,ds,$$

(23) $$F(t;x) = h(t) + \int_0^t k(t,s,x(s))\,ds.$$

Corollaire 1. *Considérons l'équation* (E$_3$). *En admettant les conditions* a_1) *et* b_1) *du théorème* 4, *et pour la matrice de type* $n \times 1$, $k(t,s,x)$, *les conditions :*

a_6) $k(t,s,x)$ *est une matrice de type* $n \times 1$ *continue pour* $0 \leqslant s < t < +\infty$, $x \in R^n$ *et* $k(t,s,0) \equiv 0$ *pour* $0 \leqslant s \leqslant t < +\infty$.

b_6) $\|k(t,s,x) - k(t,s,y)\| \leqslant k_1(t,s)\|x-y\|$, $x,y \in R^n$, $k_1(t,s)$ *étant une fonction positive et continue pour* $0 < s < t < +\infty$ *et de plus*

c_6) $$\int_0^t k_1(t,s)\,ds \leqslant \sigma,$$

σ *étant un nombre positif,*

alors, pour λ, σ *et* $\|f(t;0)\|/g(t)$ *assez petits, il existe une solution unique* $x \in S$ (*donc* $\|x(t)\| \leqslant \rho$, $t \in R_+$) *de l'équation* (E$_3$).

Démonstration. D'abord, il résulte que l'équation (E$_2$) a une solution unique $x \in S$. En effet, en admettant les conditions a_1) et b_1) et $F(t;x) \equiv 0$, les conditions du théorème 4 sont satisfaites.

Pour démontrer ce corollaire, il suffit de vérifier la condition c_1) du théorème 4, pour $F(t;x)$ de la forme (22).

Évidemment, $F(t;0) = 0$, car $k(t,s,0) \equiv 0$. De plus:

$$\|F(t;x) - F(t;y)\| = \left\| \int_0^t [k(t,s,x(s)) - k(t,s,y(s))]\,ds \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t k_1(t,s)\|x(s) - y(s)\|\,ds \leqslant |x-y|_c \int_0^t k_1(t,s)\,ds \leqslant \sigma |x-y|_c,$$

d'où il résulte

$$24)\qquad |F(\cdot\,;x)-F(\cdot\,;y)|_C \leqslant \sigma\,|x-y|_C.$$

Corollaire 2. *Considérons l'équation* (E_3). *En admettant les conditions* $a_5)$ *et* $b_5)$ *du théorème* 5, *les conditions* $a_6)$ *et* $b_6)$ *du corollaire* 1 *pour* $k(t,s,x)$ *et de plus :*

$$c_7)\qquad k_1(t,s) \leqslant \sigma_1 e^{-\alpha(t-s)},\ 0<\beta<\alpha,\ 0\leqslant s\leqslant t<+\infty,$$

σ_1 *étant un nombre positif, alors l'équation* (E_3) *admet une solution unique* $x\in S$ *(donc* $\|x(t)\|\leqslant \rho e^{-\beta t}$, $t\in R_+$*), dès que* λ *et* σ_1 *sont assez petits.*

Démonstration. Il est aisé de voir que dans les conditions de ce corollaire, l'équation (E_2) a une solution unique $x\in S$. Comme dans le cas précédent, il suffit de vérifier les conditions $c_5)$ du théorème 5, pour $F(t\,;x)$ de la forme (22) (plus précisément, les conditions $c_2)$ du théorème 2, pour $(B=D=C_{e^{-\beta t}}$.

La condition (2.3) est satisfaite. En effet:

$$\|F(t\,;x)\| \leqslant \int_0^t \|k(t,s,x(s))\|\,ds \leqslant \int_0^t k_1(t,s)\,\|x(s)\|\,ds \leqslant \int_0^t k_1(t,s)e^{-\beta s}\,ds,$$

$$\text{pour } x\in S=\{x,\ \|x(t)\|\leqslant \rho e^{-\beta t},\ t\in R_+\}.$$

Mais:

$$(25)\qquad \int_0^t k_1(t,s)e^{-\beta s}ds \leqslant \sigma_1\int_0^t e^{-\alpha t+\alpha s-\beta s}ds \leqslant \frac{\sigma_1}{\alpha-\beta}\,e^{-\beta t}.$$

Donc:

$$\|F(t\,;x)\| \leqslant \frac{\rho\sigma_1}{\alpha-\beta}\,e^{-\beta t},\ \text{d'où } F(\cdot\,;x)\in C_{e^{-\beta t}},\ x\in S,\ \text{et}$$

$$(26)\qquad |F(\cdot\,;x)|_{C_{e^{-\beta t}}} \leqslant \frac{\rho\sigma_1}{\alpha-\beta},\ x\in S.$$

Il est aisé de vérifier la condition (2.2), car:

$$\|F(t\,;x)-F(t;y)\| \leqslant \int_0^t k_1(t\,;s)\,\|x(s)-y(s)\|\,ds =$$

$$= \int_0^t k_1(t,s)\,\|x(s)-y(s)\|e^{\beta s}\,e^{-\beta s}\,ds \leqslant |x-y|_{C_{e^{-\beta t}}}\int_0^t k_1(t,s)e^{-\beta s}\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sigma_1}{\alpha-\beta}\,|x-y|_{C_{e^{-\beta t}}}\,e^{-\beta t}\quad (\text{après } (25)).$$

Donc:

$$\|F(t\,;x)-F(t\,;y)\|e^{\beta t} \leqslant \frac{\sigma_1}{\alpha-\beta}\,|x-y|_{C_{e^{-\beta t}}},\ \text{d'où}$$

$$(27)\qquad |F(\cdot\,;x)-F(\cdot\,;y)|_{C_{e^{-\beta t}}} \leqslant \frac{\sigma_1}{\alpha-\beta}\,|x-y|_{C_{e^{-\beta t}}}.$$

Par conséquent, la conclusion du corollaire 2 résulte en appliquant le théorème 2, avec:

$$\lambda_1=\frac{\sigma_1}{\alpha-\beta},\ r=\frac{\rho\sigma_1}{\alpha-\beta}.$$

Évidemment, λ_1 et r sont assez petits, dès que σ_1 est assez petit.

D'une manière analogue nous pouvons étudier l'équation (E_4).

Remarque 3. Les solutions des différentes équations intégrales étudiées dans cet article sont bornées sur R_+, ou ont un comportement exponentiel sur R_+.

Il y a beaucoup de travaux qui étudient des problèmes analogues, par exemple [1—5].

Chez Petrovanu [8], les équations Hammerstein (E_5) sont étudiées sur l'intervalle $[0,\infty]$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Corduneanu C. — *Problèmes globaux dans la théorie des équations intégrales de Volterra.* Ann. di. Mat. pura ed. appl., t. 67 (1965), p. 339—363.
2. — *Some perturbation problems in the theory of integral equations. Math. Systems theory.* vol. 1, (1967), p. 143—155.
3. — *Nonlinear perturbed integral equations.* Rev. Roum. Math. Pures et Appl., t. XIII, Nr. 9 (1968), p. 1279—1284.
4. Goldenhershel E. I. — *The spectrum of an operator of Volterra type on a half-axis and the exponential growth of the solutions of systems of Volterra integral equations.* Mat. Sb. (n.s.) 64 (1964), p. 115—139.
5. Halanay A. — *Asymptotic behaviour of the solutions of some integral equations.* Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 10 (1965), p. 764—777.
6. Bourbaki N. — *Espaces vectoriels topologiques,* Paris, (1935), p. 37.
7. Иосида К. — *Функциональный анализ.* Москва, (1967), стр. 114.
8. Petrovanu D. — *Equations Hammerstein intégrales et discrètes.* Ann. di mat. p. ed appl. (IV), Vol. LXXIV, pp. 227—254.

ASUPRA UNOR PROBLEME DE COMPORTARE GLOBALĂ ŞI DE PERTURBAŢIE ÎN TEORIA ECUAŢIILOR INTEGRALE VOLTERRA, NELINIARE

Rezumat

Lucrarea conţine generalizarea unora din rezultatele obţinute în [1], asupra comportării globale a soluţiilor ecuaţiilor integrale Volterra neliniare, unele rezultate asupra ecuaţiei integrale (E_1), precum şi probleme de perturbare a unor ecuaţii Volterra.