QUELQUES PROBLÈMES QUALITATIFS DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DANS L'ESPACE DE BANACH

PAR

P. TALPALARU

1. Des études qualitatives des équations différentielles ont été faites par nombreux auteurs, l'attention étant dirigée spécialement sur les équations linéaires et sur la liaison avec la théorie des semi-groupes d'opérateurs linéaires. Nous mentionnons dans ce sens la monographie de S. G. Krein [4].

En 1967 Y. Kōmura [3] a introduit la théorie générale des semi-groupes d'opérateurs non-linéaires de contraction dans l'espace de Hilbert. Dans le même an T. Kato [2] a étudié la liaison des semi-groupes d'opérateurs non-linéaires et les équations d'évolution dans l'espace de Banach. Les résultats de T. Kato ont été complétés par I. Miyadera [1] qui a fait la théorie générale des semi-groupes d'opérateurs non-linéaires de contraction dans l'espace de Banach.

Dans cette Note nous nous proposons d'étudier quelques problèmes concernant l'existence des solutions bornées et des solutions presque-périodiques pour l'équation

$$\text{(E)} \qquad \dot{u} + A(t)\,u = f(t, u),$$

où $\{A(t)\}$ est une famille d'opérateurs non-linéaires ayant le domaine et le codomaine dans l'espace de Banach X, et $f(t, u)$ est une application de $R \times X$ dans X, $R = (-\infty, +\infty)$.

A ce but nous allons utiliser quelques résultats donnés par T. Kato [2].

Soit X un espace de Banach et X^* son dual.

On définit l'application duale $\mathcal{J}: X \to X^*$, pour chaque $x \in X$ comme l'ensemble $\mathcal{J}x = \{g \in X^*; (x, g) = \|x\|^2 = \|g\|^2\}$.

D'après le théorème de Hahn-Banach il résulte que $\mathcal{J}x \neq \emptyset$. En général l'application $\mathcal{J}: X \to X^*$ est multivoque, mais dans le cas où l'espace X^* est uniformément convexe, $\mathcal{J}: X \to X^*$ est univoque et, comme l'a prouvé T. Kato, elle est uniformément continue sur tout ensemble borné de X.

Dans ce qui suit nous allons utiliser le

Lemme (T. Kato). *Si $x(t)$ est une fonction définie sur un intervalle de l'axe réel (ou du semi-axe réel) avec les valeurs dans l'espace de Banach X, qui admet la dérivée faible $x'(t) \in X$, pour $t = s$ et si $\|x(t)\|$ est aussi dérivable pour $t = s$, alors*

$$\|x(s)\| \frac{d\|x(s)\|}{ds} = \operatorname{Re}(x'(s), g), \tag{1.1}$$

pour toute fonctionnelle $g \in \mathcal{J}x(s)$.

La notion de solution que nous allons employer est donnée par la

Définition 1.1. *Une fonction $u: I \to X$, (I est un intervalle) est une solution de l'équation différentielle* (E) *si*

a) *la fonction $u: I \to X$ est fortement absolument continue sur tout intervalle fini de I;*

b) *la dérivée $\dot{u}(t)$ existe presque partout dans I;*

c) *la fonction $u(t)$ satisfait à l'équation* (E) *presque partout dans I.*

L'existence et l'unicité des solutions de l'équation (E) peuvent être démontrées dans des conditions semblables à celles rencontrées dans le cas de l'espace euclidien à n dimensions.

Remarquons que T. Kato [2] a démontré l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour l'équation (E) avec $f(t,u) = 0$, dans le sens faible.

2. Considérons d'abord l'équation

$$\dot{u} + A(t)u = 0, \qquad t \in R_+, \tag{E$_0$}$$

où $R_+ = \{t;\ t \geq 0\}$, et désignons par $D(A(t))$ le domaine des opérateurs $A(t)$, $t \geq 0$.

Dans ce qui suit nous allons supposer que l'espace X^* est uniformément convexe.

Théorème 2.1. *Supposons que les conditions suivantes soient remplies:*

a) *il y a une constante $\alpha \geq 0$ telle que*

$$\operatorname{Re}(A(t)u - A(t)v, \mathcal{J}(u - v)) \geq \alpha \|u - v\|^2, \tag{2.1}$$

pour tous $u, v \in D(A(t))$;

b) *la fonction $\varphi(t) = \|A(t)0\|$ appartient à l'espace M* (voir [5]).

Alors l'équation (E_0) *a toutes les solutions bornées.*

Remarques: 1. La généralité n'est pas restreinte si nous supposons que $0 \in D(A(t))$.

2. La condition (2.1) affirme que l'opérateur $A(t)$ est accretif, c'est-à-dire $\operatorname{Re}(A(t)u - A(t)v, \mathcal{J}(u - v)) \geq 0$, $u, v \in D(A(t))$.

Démonstration. Parce que $\dot{u}(t)$ existe presque partout et par suite $\|u(t)\|$ satisfait à la condition de Lipschitz il résulte que la dérivée de $\|u(t)\|$ existe presque partout et, selon le lemme, nous avons

$$\|u(t)\| \frac{d\|u(t)\|}{dt} = \operatorname{Re}(\dot{u}(t), \mathcal{J}u(t)). \tag{2.2}$$

Mais

$$\operatorname{Re}(\dot{u}(t), \mathcal{J}u(t)) = -\operatorname{Re}(A(t)u, \mathcal{J}u) = -\operatorname{Re}(A(t)u - A(t)0, \mathcal{J}u) - \operatorname{Re} A(t)0, \mathcal{J}u).$$

En utilisant la condition (2.1) et la définition de l'application duale, nous obtenons

$$\operatorname{Re}(\dot{u}(t), \mathcal{J}u(t)) \leq -\alpha \|u\|^2 + \|A(t)0\| \cdot \|u\|.$$

Donc la relation (2.2) devient

$$\|u(t)\| \frac{d}{dt} \|u(t)\| \leq -\alpha \|u(t)\|^2 + \varphi(t) \|u(t)\|, \tag{2.3}$$

presque partout.

Soit N l'ensemble des t pour lesquelles $u(t) = 0$. Si $t \notin N$, nous pouvons simplifier la relation (2.3) et obtenir

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\| \leq -\alpha \|u(t)\| + \varphi(t). \tag{2.4}$$

Si $t \in N$, alors $\frac{d}{dt}\|u(t)\| = 0$ quand la dérivée existe et donc la relation (2.4) est aussi remplie.

En multipliant (2.4) par $e^{\alpha t}$ nous avons

$$\frac{d}{dt}(e^{\alpha t} \|u(t)\|) \leq e^{\alpha t} \varphi(t),$$

d'où

$$e^{\alpha t} \|u(t)\| - \|u_0\| \leq \int_0^t e^{\alpha \tau} \varphi(\tau)\, d\tau$$

ou encore

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\| e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha \tau} \varphi(\tau)\, d\tau. \tag{2.5}$$

Comme d'après la condition b) du théorème, $e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha \tau} \varphi(\tau)\, d\tau \leq K$, pour $t \in R_+$ [5], la conclusion résulte.

Corollaire. *Dans la cas $X = R^n$, parce que l'application duale est $\mathcal{J}x = x$, et (x, g), $g \in X^*$ représente le produit scalaire de x et g, $(x, g \in R^n)$, la condition (2.1) est satisfaite si nous supposons que $\lambda_m(t, u) \geqslant \alpha$, $(t, u) \in R_+ \times \times R^n$, où λ_m est le plus petit nombre caractéristique de la matrice symétrique*

$$\frac{1}{2}[f'_u(t, u) + (f'_u(t, u))^*],$$

et

$$f(t, u) = A(t)u \in R^n.$$

Ce fait résulte si l'on applique le lemme de Demidovič [5].

Remarque. Si nous supposons que l'opérateur $A(t)$ satisfait à la condition

$$\mu(t)\|u\|^2 \leqslant (-A(t)u, \mathcal{J}u) \leqslant \lambda(t)\|u\|^2, \quad u \in D(A(t)), \tag{2.6}$$

où $\lambda(t)$ et $\mu(t)$ sont des fonctions intégrables sur tout intervalle fini $(0, t) \subset [0, \infty)$, alors la solution du problème de Cauchy satisfait à

$$\|u_0\| e^{\int_0^t \mu(\tau)\,d\tau} \leqslant \|u(t)\| \leqslant \|u_0\| e^{\int_0^t \lambda(\tau)\,d\tau} \tag{2.7}$$

pour tout $t \in [0, \infty)$.

Si de plus $\lambda(t)$ est telle que $\limsup_{t\to\infty} \int_0^t \lambda(\tau)\,d\tau < \infty$, alors $\|u(t)\| < \infty$ pour tout $t \in [0, \infty)$.

Dans le cas où $\lambda(t) = -\alpha$ il résulte que

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t)\| = 0,$$

pour toute solution.

3. Considérons maintenant le cas de l'équation perturbée (E) où $A(t)$ et $f(t, u)$ ont été précisés dans le § 1 et supposons encore que les conditions qui assurent l'existence des solutions sont satisfaites.

Théorème 3.1. *Supposons que les conditions suivantes sont remplies:*

a) *il existe une fonction continue $a(t)$ définie sur R_+ telle que*

$$\operatorname{Re}(A(t)u - A(t)v, \mathcal{J}(u - v)) \geqslant a(t)\|u - v\|^2, \tag{3.1}$$

pour tous $u, v \in D(A(t))$;

b) *il existe une fonction continue $\omega(t, r)$ définie sur $R_+ \times R_+$ telle que*

$$\|f(t, u)\| \leqslant \omega(t, \|u\|), \tag{3.2}$$

alors la solution $u(t)$ de l'équation (E) satisfait à

$$\|u(t)\| \leqslant v(t), \tag{3.3}$$

où $v(t)$ est la solution maximale de l'équation

$$\dot{v} = \|A(t)0\| - a(t)v + \omega(t, v), \quad \|u(0)\| \leqslant v(0).$$

Démonstration. En utilisant le même raisonnement que celui de la démonstration du théorème 1, nous avons

$$\|u(t)\| \frac{d\|u(t)\|}{dt} = -\operatorname{Re}(A(t)u, \mathcal{J}u) + \operatorname{Re}(f(t, u)\mathcal{J}u) = \tag{3.4}$$

$$= -\operatorname{Re}(A(t)u - A(t)0, \mathcal{J}u) - \operatorname{Re}(A(t)0, \mathcal{J}u) + \operatorname{Re}(f(t, u), \mathcal{J}u) \leqslant$$

$$\leqslant -a(t)\|u\|^2 + \|A(t)0\| \cdot \|u\| + \|f(t, u)\| \cdot \|u\| \leqslant \|A(t)0\| - a(t)\|u\| + \omega(t, \|u\|).$$

D'ici nous obtenons

$$\frac{d\|u(t)\|}{dt} \leqslant \|A(t)0\| - a(t)\|u\| + \omega(t, \|u\|) \tag{3.5}$$

presque partout, qui d'après la théorie des inégalités différentielles nous donne (3.3).

Remarques. 1. Si l'équation (3.4) a toutes les solutions bornées, alors l'équation (E) a la même propriété. En particulier, si $a(t) = \alpha =$ const. et $f(t, u)$ satisfait à la condition

$$\operatorname{Re}(f(t, u), \mathcal{J}u) \leqslant 0, \tag{3.6}$$

l'équation (3.4) a toutes les solutions bornées si $\varphi(t) = \|A(t)0\| \in M$.

2. Un autre cas particulier où la condition de la limitation des solutions de l'équation (3.4) a lieu est donné par

$$\omega(t, r) = b(t)r, \text{ où } b(t) < a(t), \ t \in R_+, \ \int_0^\infty [a(\tau) - b(\tau)]\,d\tau = \infty$$

et $\|A(t)0\| = O(a(t) - b(t))$, $t \to \infty$.

4. Dans ce paragraphe nous étudions le problème de l'existence des solutions presque-périodiques (périodiques) pour l'équation (E) lié au problème de l'existence des solutions bornées.

Lemme 4.1. *Si les conditions suivantes sont remplies:*

a) *il existe une constante $\alpha \geqslant 0$ telle que:*

$$\operatorname{Re}(A(t)u - A(t)v, \mathcal{J}(u - v)) \geqslant \alpha\|u - v\|^2, \tag{4.1}$$

pour tous $u, v \in D(A(t))$;

b) *il existe une fonction* $\lambda(t)$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(t)dt < \infty$, *telle que*

$$\text{(4.2)} \qquad \operatorname{Re}(f(t,u) - f(t,v), \mathcal{J}(u-v)) \leqslant \lambda(t)\|u-v\|^2, \text{ et}$$

$$\text{(4.3)} \qquad f(t,0) = 0;$$

c) *la fonction* $\|A(t)0\|$ *satisfait à la condition*

$$\text{(4.4)} \qquad \|A(t)0\| \leqslant m, \quad t \geqslant t_0 \text{ ou } \int_{-\infty}^{\infty} \|A(t)0\|\, dt < \infty.$$

alors les solutions de l'équation (E), *si elles existent, sont bornées pour* $t \geqslant t_0$.

Démonstration. Soit $u(t)$ une solution de l'équation (E), si elle existe. Selon le lemme de T. Kato nous avons

$$\text{(4.5)} \quad \|u(t)\| \frac{d\|u(t)\|}{dt} = \operatorname{Re}(\dot{u}(t), \mathcal{J}u) = -\operatorname{Re}(A(t)u, \mathcal{J}u) + \operatorname{Re}(f(t,u), \mathcal{J}u) =$$

$$= -\operatorname{Re}(A(t)u - A(t)0, \mathcal{J}u) - \operatorname{Re}(A(t)0, \mathcal{J}u) + \operatorname{Re}(f(t,u) - f(t,0), \mathcal{J}u) \leqslant$$

$$-\alpha\|u(t)\|^2 + \|A(t)0\|\cdot\|u(t)\| + \lambda(t)\|u(t)\|^2 = -(\alpha - \lambda(t))\|u(t)\|^2 + \|A(t)0\|\cdot\|u(t)\|,$$

$$t \geqslant t_0.$$

D'après le raisonnement que nous avons suivi dans la démonstration du théorème 2.1, nous obtenons

$$\text{(4.6)} \qquad \frac{d\|u(t)\|}{dt} \leqslant -(\alpha - \lambda(t))\|u(t)\| + \|A(t)0\|, \text{ presque partout,}$$

d'où

$$\text{(4.7)} \qquad \|u(t)\| \leqslant e^{-\alpha(t-t_0)} e^{\int_{t_0}^{t}\lambda(\tau)d\tau} \left[\|u(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|A(\tau)0\|\, e^{\alpha(\tau-t_0)} e^{\int_{t_0}^{\tau}\lambda(s)ds} d\tau\right].$$

Comme pour $t \to \infty$, $e^{-\alpha(t-t_0)} \to 0$ et $\lambda(t) \in L(-\infty, \infty)$, il suit que le premier terme de l'inégalité (4.7) est borné.

En employant les conditions (4.4) il résulte que le second terme est aussi borné, ce qui prouve le lemme.

Lemme 4.2. *Sous les conditions du lemme 4.1 il existe une seule solution bornée définie sur R.*

Démonstration. Nous supposons qu'il existe deux solutions de l'équation (E) bornées $u(t)$ et $v(t)$ sur R. Alors

$$\|u(t) - v(t)\| \frac{d\|u(t) - v(t)\|}{dt} = \operatorname{Re}(\dot{u}(t) - \dot{v}(t), \mathcal{J}(u-v)) =$$

$$= -\operatorname{Re}(A(t)u - A(t)v, \mathcal{J}(u-v)) + \operatorname{Re}(f(t,u) - f(t,v), \mathcal{J}(u-v)) = T_1 + T_2.$$

Mais

$$T_1 \leqslant -\alpha\|u(t) - v(t)\|^2$$

et

$$T_2 = \operatorname{Re}(f(t,u) - f(t,v), \mathcal{J}(u-v)) \leqslant \lambda(t)\|u(t) - v(t)\|^2.$$

Par conséquent

$$\|u(t) - v(t)\| \frac{d}{dt}\|u(t) - v(t)\| \leqslant -(\alpha - \lambda(t))\|u(t) - v(t)\|^2,$$

ou

$$\text{(4.8)} \qquad \frac{d\|u(t) - v(t)\|}{dt} \leqslant -(\alpha - \lambda(t))\|u(t) - v(t)\|, \text{ presque partout.}$$

De l'inéquation (4.8) il suit

$$\|u(t) - v(t)\| \leqslant e^{-\alpha(t-t_0)} e^{\int_{t_0}^{t}\lambda(\tau)d\tau} \|u(t_0) - v(t_0)\|.$$

Du fait que $\lambda(t) \in L(-\infty, \infty)$ nous avons

$$\text{(4.9)} \quad \|u(t) - v(t)\| \leqslant e^{-\alpha(t-t_0)} e^{-\int_{-\infty}^{\infty}\lambda(\tau)d\tau} \|u(t_0) - v(t_0)\| \leqslant Me^{-\alpha(t-t_0)}\|u(t_0) - v(t_0)\|,$$

où $M = \exp\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\lambda(\tau)d\tau\right\}$.

Si nous faisons $t_0 \to -\infty$, du fait que $\|u(t_0) - v(t_0)\|$ est borné, nous obtenons $u(t) = v(t)$ pour $t \in R$.

Lemme 4.3. *Dans les conditions du lemme 4.1 si nous supposons encore que* $A(t)u$ *et* $f(t,u)$ *sont uniformément presque-périodiques de* t, *avec la même presque-période pour* $\|u\| \leqslant K$, *alors la solution unique bornée sur* R (donnée par le lemme 4.2) *est presque-périodique.*

Démonstration. Soit $u^*(t)$ la solution bornée qui existe selon le lemme 4.2 et posons $u(t) = u^*(t+\tau) - u^*(t)$, où τ est la presque-période de $A(t)u$ et $f(t,u)$.

Nous avons

$$\text{(4.10)} \qquad \|u(t)\| \frac{d\|u(t)\|}{dt} = \operatorname{Re}(\dot{u}(t), \mathcal{J}u) = \operatorname{Re}(\dot{u}^*(t+\tau) - \dot{u}^*(t)),$$

$$\mathcal{J}(u^*(t+\tau) - u^*(t))) = -\operatorname{Re}(A(t+\tau)u^*(t+\tau) - A(t)u^*(t), \mathcal{J}(u^*(t+\tau) -$$

$$- u^*(t)) + \operatorname{Re}(f(t+\tau, u^*(t+\tau)) - f(t, u^*(t)), \mathcal{J}(u^*(t+\tau) - u^*(t))) =$$

$$= -\operatorname{Re}(A(t+\tau)u^*(t+\tau) - A(t+\tau)u^*(t), \mathcal{J}(u^*(t+\tau) - u^*(t))) -$$
$$-\operatorname{Re}(A(t+\tau)u^*(t) - A(t)u^*(t), \mathcal{J}(u^*(t+\tau) - u^*(t))) + \operatorname{Re}(f(t+\tau), u^*(t+\tau)) -$$
$$-f(t+\tau, u^*(t)), \mathcal{J}(u^*(t+\tau) - u^*(t))) + \operatorname{Re}(f(t+\tau, u^*(t)) -$$
$$-f(t, u^*(t)), \mathcal{J}(u^*(t+\tau) - u^*(t))) = T_1 + T_2 + T_3 + T_4.$$

Pour T_i, $i = 1, 2, 3, 4$ nous avons les évaluations suivantes:

$$T_1 = -\operatorname{Re}(A(t+\tau)u^*(t+\tau) - A(t+\tau)u^*(t), \mathcal{J}(u^*(t+\tau) - u^*(t)))$$
$$\leqslant -\alpha \|u^*(t+\tau) - u^*(t)\|^2.$$

$$T_2 = -\operatorname{Re}(A(t+\tau)u^*(t) - A(t)u^*(t), \mathcal{J}(u^*(t+\tau) - u^*(t))) \leqslant$$
$$\leqslant \|A(t+\tau)u^*(t) - A(t)u^*(t)\| \cdot \|u^*(t+\tau) - u^*(t)\|.$$

Parce que $\|u^*(t)\| \leqslant K$, $t \in R$ et $A(t)\, u^*(t)$ est uniformément presque-périodique pour $\|u^*(t)\| \leqslant K$, il résulte que

$$\|A(t+\tau)u^*(t) - A(t)u^*(t)\| \leqslant \varepsilon^2, \quad t \in R$$

et donc

$$T_2 \leqslant 2K\varepsilon^2.$$

De la même manière on a

$$T_4 \leqslant 2K\varepsilon^2.$$

$$T_3 = \operatorname{Re}(f(t+\tau, u^*(t+\tau)) - f(t+\tau, u^*(t)), \mathcal{J}(u^*(t+\tau) - u^*(t))) \leqslant$$
$$\leqslant \lambda(t+\tau)\|u^*(t+\tau) - u^*(t)\|^2.$$

De la relation (4.10) on obtient alors

$$\|u^*(t+\tau) - u^*(t)\| \frac{d\|u^*(t+\tau) - u^*(t)\|}{dt} \leqslant$$
$$\leqslant -(\alpha - \lambda(t+\tau))\|u^*(t+\tau) - u^*(t)\|^2 + 4K\varepsilon^2$$

ou

$$\frac{d\|u^*(t+\tau) - u^*(t)\|^2}{dt} \leqslant -2(\alpha - \lambda(t+\tau))\|u^*(t+\tau) - u^*(t)\|^2 + 8K\varepsilon^2$$

qui a comme conséquence

$$\|u^*(t+\tau) - u^*(t)\|^2 \leqslant \|u^*(t_0+\tau) - u^*(t_0)\|^2 e^{-2\alpha(t-t_0)} \cdot e^{\int_{t_0}^{t} \lambda(s+\tau)\,ds} +$$
$$+ 8K\varepsilon^2, \quad t \geqslant t_0.$$

Si nous notons $M = \exp\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(s+\tau)\,ds\right\}$, alors

$$\|u^*(t+\tau) - u^*(t)\|^2 \leqslant \|u^*(t_0+\tau) - u^*(t_0)\|^2 M^2 e^{-2\alpha(t-t_0)} + 8K\varepsilon^2, \quad t \geqslant t_0.$$

D'après un raisonnement que nous avons fait dans [6], il résulte

$$\|u^*(t+\tau) - u^*(t)\| \leqslant 2\sqrt{\nu K}\,\varepsilon,$$

ce qui prouve la presque-périodicité de la solution $u^*(t)$.

En synthétisant les lemmes de plus haut nous pouvons formuler le

Théorème 4.1. *Si les conditions du lemme 4.1 sont remplies et $A(t)u$, $f(t, u)$ sont uniformément presque-périodiques de t, avec la même presque-période pour $\|u\| \leqslant K$, alors l'équation (E) a une seule solution bornée sur R et cette solution est presque-périodique.*

Remarques. 1. Un résultat similaire peut être formulé dans le cas où $A(t)u$ et $f(t, u)$ sont périodiques par rapport à t.

2. Le cas où $\lambda(t) = L =$ const. ne peut pas être abordé de la même manière. Dans ce cas nous pouvons utiliser le théorème de Banach comme cela a été fait dans notre travail [6].

5. Si nous revenons aux conditions satisfaites par $A(t)$ et $f(t, u)$, nous remarquons que $f(t, u)$ satisfait à la condition (4.2) si nous supposons, par exemple, que cette application est lipschitzienne par rapport à u, c'est-à-dire

$$\|f(t, u) - f(t, v)\| \leqslant \lambda(t)\|u - v\|. \tag{5.1}$$

Relativement à $A(t)$ la condition (2.1) (ou (4.1)) d'accretivité, peut être simplifiée dans certains cas particuliers.

Mentionnons d'abord que la condition d'accretivité (2.1) pour $A(t)$ revient à la condition de dissipativité pour l'opérateur $-A(t)$, c'est-à-dire

$$(-A(t)u + A(t)v, \mathcal{J}(u - v)) \leqslant -\alpha\|u - v\|^2. \tag{5.2}$$

Si nous supposons que $X = L_{2p}(\Omega)$, où Ω est un ensemble ouvert borné et connexe de R^n, alors, suivant P. K. C. Wang [7], si $u = u(x_1, \ldots, x_n)$, un opérateur A (linéaire où non-linéaire) avec le domaine $D(A) \subset L_{2p}(\Omega)$ et codomaine $R(A) \subset L_{2p}(\Omega)$, est fortement dissipatif quand il existe une constante $k > 0$ telle que

$$\int_\Omega [u(x_1, \ldots, x_n)]^{2p-1} (Au)(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1, \ldots, dx_n \leqslant -k\|u\|^{2p}, \text{ pour } p \geqslant 1. \tag{5.3}$$

Sous la forme (5.3) les conditions de dissipativité se trouvent plus facilement.

Soit l'opérateur

$$(5.4)\qquad A(t) = \sum_{i,j=1}^{n} D_i (a_{ij}(t, x) D_j \cdot) + \sum_{l=1}^{n} b_l(t, x) D_l(\cdot) + c(t, x)(\cdot),$$

où $D_i = \partial/\partial x_i$.

Désignons par $C^m(\Omega)$ l'ensemble des fonctions scalaires définies sur Ω et continûment dérivables jusqu'à l'ordre m, et par $C_0^m(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de $C^m(\Omega)$ à support compact dans Ω.

Supposons maintenant que :

a) $A(t)$ est uniformément elliptique dans $\Omega_0 = [0, \infty) \times \Omega$ (la frontière de Ω étant régulière dans un sens précisé par Wang), c'est-à-dire il existe les constantes positives ρ_0 et ρ_1 telles que

$$(5.5)\qquad \rho_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x)\, \xi_i \xi_j \leq \rho_1 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2,$$

pour tous les vecteurs $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ et tous $(t, x) \in \Omega_0$;

b) les coefficients a_{ij} et b_l sont dérivables relativement aux x_i dans Ω_0, les dérivées étant continues, et c continue dans Ω_0. De plus, il existe une constante positive γ telle que

$$\max \{\max_{(i,j)} \{ \sup_{(t,x)\in\Omega_0} |a_{ij}(t, x)|, \sup_{(t,x)\in\Omega_0} |D_i a_{ij}(t, x)|\},$$

$$\max_l \{ \sup_{(t,x)\in\Omega_0} |b_l(t, x)|, \sup_{(t,x)\in\Omega_0} |D_l b_l(t, x)|\}, \sup_{(t,x)\in\Omega_0} |c(t, x)|\} = \gamma < +\infty.$$

P. K. C. Wang [7] a prouvé que dans les conditions a), b) et $D(A(t)) \subseteq C_0^2(\Omega)$ pour tout $t \in [0, \infty)$ il existe une constante $k > 0$ telle que

$$(5.6)\qquad \sup_{(t,x)\in\Omega_0} c(t, x) - \min \left\{0, \frac{1}{2} \inf_{(t,x)\in\Omega_0} \sum_{l=1}^{n} D_l b_l(t, x)\right\} \leq -k < 0,$$

l'opérateur $A(t)$ est fortement dissipatif sur $[0, \infty)$.

Remarque. Dans ce cas, comme $A(t)$ est linéaire, la condition (5.2) se réduit à (5.3) parce que $Ju = u$ et (u, g), $g \in X^*$ représente le produit scalaire.

Des conditions similaires de dissipativité peuvent être données aussi pour d'autres opérateurs [7].

BIBLIOGRAPHIE

1. Miyadera I. — *Note on nonlinear contraction semigroups.* Proc. Am. Math. Soc., vol. 21 (1969), no. 1, pp. 219–225.
2. Kato T. — *Nonlinear semigroups and evolution equations.* J. Math. Soc. Jap., vol 19 (1967), no. 4, pp. 508—520.
3. Komura Y. — *Nonlinear semigroups in Hilbert space.* J. Math. Soc. Jap., vol. 19 (1967), no. 4, pp. 493–507.
4. Крейн С. Г. — *Линейные дифференциальные уравнения в Банаховом пространстве.* Изд. «Наука», Москва 1967.

5. Talpalaru P. — *Sur les systèmes dissipatifs.* An. şt. Univ. Iaşi, Matematică t. XIII (1977), pp. 43—47.
6. Talpalaru P. — *Solutions périodiques et presque-périodiques des systèmes différentiels.* An. şt. Univ. Iaşi, Matematică, t. XV. (1969), pp. 375–385.
7. Wang P. K. C. — *On certain maximum properties of Cauchy problems.* J. Math. Anal. Appl., vol. 24 (1968), no. 1, pp. 136–145.

UNELE PROBLEME CALITATIVE ALE TEORIEI ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE ÎN SPAŢIUL BANACH

Rezumat

Se studiază existenţa soluţiilor mărginite şi aproape periodice pentru ecuaţiile (E_0) şi (E) în spaţiul Banach folosind noţiunile de acretivitate şi de disipativitate a operatorului neliniar $A(t)$.