QUELQUES APPLICATIONS DES OPÉRATEURS MONOTONES

PAR

ADRIAN CORDUNEANU

Dans une Note récente [4], nous avons étudié une équation intégrale en faisant appel à la théorie des opérateurs monotones au sens de Browder-Minty. Dans le travail présent, nous donnons d'autres applications de cette théorie aux divers types d'équations fonctionnelles.

Notations et définitions. Ω étant un ensemble mesurable dans R^m et p un nombre ≥ 1, désignons par $L_{p,n}(\Omega)$ l'espace de Banach des fonctions mesurables $u:\Omega \to R^n$, pour lesquelles la norme :

$$(1) \qquad \|u\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |u_i(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty,$$

l'intégrale étant prise au sens de Lebesgue. Pour $1 < p < +\infty$, $L_{p,n}(\Omega)$ est réflexif, son dual étant $L_{q,n}(\Omega)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$; $L_{2,n}(\Omega)$ est un espace de Hilbert. Pour $L_{p,1}(\Omega)$ on emploie la notation $L_p(\Omega)$.

Un opérateur $T: X \to X^*$, X étant un espace de Banach et X^* son dual est *monotone* si :

$$(2) \qquad (Tu - Tv,\ u - v) \geq 0, \ \forall u, v \in X.$$

Un opérateur $T: X \to X^*$ est *semi-monotone* s'il existe une application $S: X \times X \to X^*$ telle que $Tu = S(u, u)$ et

I. Pour tout $v \in X$, $u \to S(u, v)$ est monotone.

II. Pour tout $u \in X$, $v \to S(u, v)$ est complètement continue.

Rappelons que $T: X \to X^*$ est complètement continu s'il est continu de la topologie faible de X à la topologie forte de X^*.

Un opérateur $T: X \to X^*$ est *complexe-monotone* si:

I. Pour tout $N > 0$ il existe une fonction C_N strictement croissante pour $r \geqslant 0$, avec $C_N(0) = 0$, telle que $|(Tu - Tv, u - v)| \geqslant C_N(\|u - v\|)$, $\forall u, v \in X$, $\|u\| \leqslant N$, $\|v\| \leqslant N$.

II. Il existe une fonction C avec $\lim_{r \to +\infty} C(r) = +\infty$, telle que $|(Tu, u)| \geqslant C(\|u\|) \cdot \|u\|$, $\forall u \in X$.

Les diverses conditions qui interviendront dans ce travail seront utilisées sans mentionner la proposition où elles ont été introduites.

Proposition 1. *Ω étant un ensemble compact dans R^m, considérons le système.*

$$f_i(x, u_1(x), \ldots, u_n(x)) + \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega K_{ij}(x, y) u_j(y) dy = \varphi_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

et admettons les hypothèses suivantes:

α) $f_i(x, u_1, \ldots, u_n)$ est une fonction mesurable par rapport à $x \in \Omega$ pour tout $u \in R^n$ et continue par rapport à u pour tout $x \in \Omega$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

β) $|f_i(x, u_1, \ldots, u_n)| \leqslant a_i(x) + b_i \sum_{j=1}^{n} |u_j|^{p-1}$, $\forall u \in R^n$, p.p. par rapport à $x \in \Omega$, où $a_i \in L_q(\Omega)$ et b_i sont des constantes, $i = 1, 2, \ldots, n$.

γ) $\sum_{i=1}^{n} [f_i(x, u_1, \ldots, u_n) - f_i(x, v_1, \ldots, v_n)](u_i - v_i) \geqslant 0$, $\forall u, v \in R^n$, p.p. par rapport à $x \in \Omega$.

δ) $\sum_{i=1}^{n} u_i f_i(x, u_1, \ldots, u_n) \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} |u_i|^p - \sum_{i=1}^{n} |\beta_i(x)| \cdot |u_i| - |\gamma(x)|$, $\forall u \in R^n$, p.p. par rapport à $x \in \Omega$, où $\alpha > 0$, $\beta_i \in L_q(\Omega)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ et $\gamma \in L_1(\Omega)$

ε) $K_{ij}(x, y)$ mesurable sur $\Omega \times \Omega$ est le noyau d'un opérateur Fredholm borné: $L_p(\Omega) \to L_q(\Omega)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, et de plus

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega K_{ij}(x, y) u_i(x) u_j(y) dx\, dy \geqslant 0, \quad \forall u \in L_{p,n}(\Omega). \tag{4}$$

Alors, le système (3) admet au moins une solution $u \in L_{p,n}(\Omega)$, $\forall \varphi \in L_{q,n}(\Omega)$ $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $1 < p < +\infty$.

Démonstration. Sous forme vectorielle, le système (3) s'écrit:

$$f(x, u(x)) + \int_\Omega K(x, y) u(y) dy = \varphi(x), \tag{5}$$

où f, u, φ sont des vecteurs à n composantes, $K(x, y) = (K_{ij}(x, y))$ est une matrice-fonction du type $(n \times n)$.

Sous forme abstraite, le système (5) s'écrit $fu + Ku = \varphi$, si nous désignons par f l'opérateur défini par $(fu)(x) = f(x, u(x))$ et par K l'opérateur linéaire ayant le noyau $K(x, y)$. L'opérateur f a des propriétés bien connues ([5], pp. 375–376).

Considérons l'opérateur $T = f + K$; il est défini sur $L_{p,n}(\Omega)$ à valeurs dans son dual $L_{q,n}(\Omega)$ et est continu. T est aussi monotone, car

$$\begin{aligned}(Tu - Tv, u - v) &= \int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^{n} [f_i(x, u(x)) - f_i(x, v(x))](u_i(x) - v_i(x)) \right\} dx + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega K_{ij}(x, y)(u_i(x) - v_i(x))(u_j(y) - v_j(y)) dx\, dy \geqslant 0, \\ &\forall u, v \in L_{p,n}(\Omega).\end{aligned} \tag{6}$$

Enfin, T est coercitif

$$\begin{aligned}(Tu, u) &= \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{n} u_i(x) f_i(x, u(x)) \right] dx + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega K_{ij}(x, y) u_i(x) u_j(y) dx\, dy \geqslant \\ &\geqslant \alpha \|u\|^p - B\|u\| - G, \quad \forall u \in L_{p,n}(\Omega).\end{aligned} \tag{7}$$

En posant $C(r) = \alpha |r|^{p-1} - B - Gr^{-1}$ pour $r \neq 0$ et $C(0) = 0$, on obtient $\lim_{r \to +\infty} C(r) = +\infty$ et $(Tu, u) \geqslant C(\|u\|) \cdot \|u\|$. Il résulte T surjectif [2] et la démonstration est achevée.

Proposition 2. *Ω étant un ensemble compact dans R^m, considérons le système (3) et admettons les hypothèses α), β), ε) et de plus:*

γ') $\sum_{i=1}^{n} [f_i(x, u_1, \ldots, u_n) - f_i(x, v_1, \ldots, v_n)](u_i - v_i) \geqslant H \sum_{i=1}^{n} |u_i - v_i|^p$, $H > 0$, $\forall u, v \in R^n$, p.p. par rapport à $x \in \Omega$.

Alors, le système (3) admet une solution unique $u \in L_{p,n}(\Omega)$ $\forall \varphi \in L_{q,n}(\Omega)$ et l'application $\varphi \to u$ est un homéomorphisme de $L_{q,n}(\Omega)$ sur $L_{p,n}$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $2 \leqslant p < +\infty$.

Démonstration. Les conditions α), β), ε) assurent que $T = f + K$ est défini sur $L_{p,n}(\Omega)$ à valeurs dans $L_{q,n}(\Omega)$ et est continu: il suffit de montrer que T est complexe-monotone [3]. Compte tenu de γ') et ε), on déduit que:

$$|(Tu - Tv, u - v)| = (Tu - Tv, u - v) \geqslant H \|u - v\|^p, \quad \forall u, v \in L_{p,n}(\Omega). \tag{8}$$

De l'inégalité précédente il résulte encore que

$$|(Tu, u)| \geqslant H \|u\|^p - |(T0, u)| \geqslant H \|u\|^p - H_1 \|u\|, \quad \forall u \in L_{p,n}(\Omega), \tag{9}$$

H_1 étant une constante. En posant $C_1(r) = Hr^p$, $r \geqslant 0$, on obtient $|(Tu - Tv, u - v)| \geqslant C_1(\|u - v\|)$, la fonction C_1 étant strictement crois-

sante pour $r > 0$ et $C_1(0) = 0$; d'autre part, nous avons $|(Tu, u)| \geqslant C(\|u\|) \cdot \|u\|$ et $\lim_{r \to +\infty} C(r) = +\infty$ si nous posons $C(r) = Hr^{p-1} - H_1$. La démonstration est achevée. (Voir aussi [1], p. 147).

Dans les propositions précédentes, Ω était un ensemble compact de R^m. On peut se débarasser de cette restriction, en imposant à l'opérateur f une condition qui garantisse la continuité.

Proposition 3. *Ω étant un ensemble mesurable dans R^m, considérons le système* (3) *et supposons que les conditions* α), β), γ), δ), ε) *soient remplies et de plus:*

$$\beta') \quad |f_i(x, u_1, \ldots, u_n) - f_i(x, v_1, \ldots, v_n)| \leqslant c_i \sum_{j=1}^{n} |u_j - v_j|^{p-1}, \quad c_i \geqslant 0,$$

$\forall u, v \in R^n$, p.p. par rapport à $x \in \Omega$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Alors, il résulte que ce système admet au moins une solution $u \in L_{p,n}(\Omega)$, $\forall \varphi \in L_{q,n}(\Omega)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $1 < p \leqslant 2$.

Proposition 4. *Ω étant un ensemble mesurable dans R^m et les conditions* α), β), β'), γ'), ε) *étant remplies pour le cas $p = 2$ le système* (3) *admet une solution unique $u \in L_{2,n}(\Omega)$, $\forall \varphi \in L_{2,n}(\Omega)$ et l'application $\varphi \to u$ est un isomorphisme de $L_{2,n}(\Omega)$.*

Proposition 5. *Ω étant un ensemble mesurable dans R^m, considérons le système*

$$(10) \qquad f_i(x, u_1(x), \ldots, u_n(x)) + \int_\Omega K_i(x, y, u_1(y), \ldots u_n(y))\, dy = \varphi_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

et supposons que les conditions α), β), β'), γ') *soient satisfaites pour le cas $p = 2$ et de plus:*

ε') *$K_i(x, y, u_1, \ldots, u_n)$ est une fonction mesurable par rapport à $(x, y) \in \Omega \times \Omega$ pour tout $u \in R^n$ et continue par rapport à u pour tout $(x, y) \in \Omega \times \Omega$.*

$$\varepsilon'') \quad |K_i(x, y, u_1, \ldots, u_n)| \leqslant A_i(x, y) + B_i(x, y) \sum_{j=1}^{n} |u_j|, \quad \forall u \in R^n,$$

p.p. par rapport à $(x, y) \in \Omega \times \Omega$ et $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{B}_i \in L_2(\Omega)$, où

$$(11) \qquad \mathcal{A}_i(x) = \int_\Omega A_i(x, y)\, dy, \quad \mathcal{B}_i(x) = \left(\int_\Omega B_i^2(x, y)\, dy \right)^{1/2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

et

$$(12) \qquad \mathcal{B} = \left(\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \mathcal{B}_i^2(x)\, dx \right)^{1/2} < Hn^{-1/2}.$$

$$\varepsilon''') \quad |K_i(x, y, u_1, \ldots, u_n) - K_i(x, y, v_1, \ldots, v_n)| \leqslant L_i(x, y) \sum_{j=1}^{n} |u_j - v_j|,$$

$\forall u, v \in R^n$, p.p. par rapport à $(x, y) \in \Omega \times \Omega$ et

$$(13) \qquad L = \left(\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \int_\Omega L_i^2(x, y)\, dx\, dy \right)^{1/2} \leqslant Hn^{-1/2}.$$

Alors, le système (10) *admet au moins une solution $u \in L_{2,n}(\Omega)$, $\forall \varphi \in L_{2,n}(\Omega)$.*

Démonstration. En posant $T = f + K$ (cette fois K est non linéaire), on constate grâce aux conditions imposées, que T est défini et continu dans $L_{2,n}(\Omega)$; en outre, T est monotone car $(Tu - Tv, u - v) = (fu - fv, u - v) + (Ku - Kv, u - v) \geqslant (H - Ln^{1/2})\|u - v\|^2 \geqslant 0$. Enfin $(Tu, u) = (fu, u) + (Ku, u) \geqslant (H - \mathcal{B}n^{1/2})\|u\|^2 - (\mathcal{A} + A)\|u\|$, c'est-à-dire T est coercitif. Les deux constantes $\mathcal{A}$ et A sont: $\mathcal{A} = \left(\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \mathcal{A}_i^2(x)\, dx \right)^{1/2}$, $A =$ la norme de l'élément $f0$ dans l'espace $L_{2,n}(\Omega)$.

Remarque 1. Pour le cas $n = 1$, $f(x, u) = u$, on obtient l'équation

$$(14) \qquad u(x) + \int_\Omega K(x, y, u(y))\, dx = \varphi(x).$$

La proposition 5 donne alors un résultat plus général que le principe de point fixe de Banach.

Remarque 1. Si Ω est un compact dans R^m, on peut renoncer à la condition β'), la conclusion de la proposition 5 restant valable.

Proposition 6. *Ω étant un ensemble mesurable dans R^m, considérons l'équation:*

$$(15) \qquad f(x, u(x)) + F\left(x, \int_\Omega K(x, y) u(y)\, dy\right) = \varphi(x)$$

et supposons que:

(i) *les opérateurs f et F donnés par les relations $(fu)(x) = f(x, u(x))$, $(Fu)(x) = F(x, u(x))$ sont définis et continus dans $L_2(\Omega)$ et de plus*

$$(16) \qquad |F(x, u)| \leqslant A(x) + B|u|, \quad \forall u \in R,$$

p.p. par rapport à $x \in \Omega$, $A \in L_2(\Omega)$, $B =$ constante.

(ii) *$(f(x, u) - f(x, v))(u - v) \geqslant 0$, $\forall u, v \in R$, p.p. par rapport à $x \in \Omega$.*

(iii) *$uf(x, u) \geqslant \alpha u^2 - |\beta(x)|\,|u| - \gamma|(x)|$, $\forall u \in R$, p.p. par rapport à $x \in \Omega$, où $\alpha > 0$ $\beta \in L_2(\Omega)$, $\gamma \in L_1(\Omega)$,*

(iv) *l'opérateur* K *donné par* $(Ku)(x) = \int_{\Omega} K(x, y)\, u(y)\, dy$ *est complètement continu dans* $L_2(\Omega)$ *et* $B\|K\| < \alpha$.

Alors, il résulte que l'équation (15) *admet au moins une solution* $u \in L_2(\Omega)$, $\forall \varphi \in L_2(\Omega)$.

Démonstration. Sous forme abstraite, l'équation (15) s'écrit $fu + FKu = \varphi$; considérons l'opérateur $T = f + FK$. Il est défini et continu dans $L_2(\Omega)$; il est aussi semi-monotone.

En effet, l'application $S(u, v) = fu + FKv$ satisfait à toutes les propriétés réclamées par la définition de la semi-monotonie. T est coercitif: $(Tu, u) = (fu, u) + (FKu, u) \geq (\alpha - B\|K\|)\|u\|^2 - C_1\|u\| - C_2$, C_1 et C_2 étant deux constantes. Il résulte alors que T est surjectif [2].

Remarque. Des conditions pour que f et F soient des opérateurs continus sont connues des propositions précédentes. Une condition suffisante pour que K soit complètement continu est

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x) h_i(y), \quad g_i, h_i \in L_2(\Omega), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{17}$$

BIBLIOGRAPHIE

1. Barbu V. — *Ecuații funcționale neliniare în spații Banach și probleme la limită.* Studii și cercetări matematice, T. 20 (1968), pp. 137–164.
2. Browder F. E. — *Non linear elliptic boundary value problems.* Bull. Amer. Math. Soc. T. 69 (1963), pp. 862–874.
3. Browder F. E. — *Remarks on non-linear functional equations.* Proc. Nat. Acad. Sci. T. 51 (1964) pp. 985–989.
4. Corduneanu A. — *Equations fonctionnelles avec opérateurs monotones.* (Sous presse).
5. Забрейко П. П. и corp. — *Интегральные уравнения.* Изд. „Наука", Москва, 1968.

CÎTEVA APLICAȚII ALE OPERATORILOR MONOTONI

Rezumat

Se obțin unele rezultate cu privire la existența soluției unor sisteme integrale, folosind teoria lui Browder-Minty a operatorilor monotoni și semimonotoni definiți pe un spațiu Banach reflexiv X cu valori în dualul său X^*. Drept X se ia $L_{p,n}(\Omega)$, cu $1 < p < +\infty$.

OPTIMAL CUBATURE FORMULAS FOR CERTAIN CLASSES OF FUNCTIONS

BY

GH. COMAN and GH. MICULA

1. Let $D = \{0 \leq x, y \leq 1\}$. Denote by $W_{0L_2}^{(r,s)}(M_{rs})$ the class of functions $f: D \to R$ having continuous partial derivatives $f^{(i,j)}(x, y)$, $(i = 0, 1, \ldots r = 0, 1, \ldots, s)$ which satisfy the conditions

$$f^{(i,0)}(0, y) \equiv 0, \quad f^{(0,j)}(x, 0) \equiv 0 \quad \begin{pmatrix} i=0,1,\ldots,r-1 \\ j=0,1,\ldots,s-1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\left| \iint_{(D)}^{11} [f^{(r,s)}(x, y)]^2\, dx\, dy \right|^{1/2} \leq M_{rs}.$$

Let us consider the cubature formula

$$\iint_{(D)}^{11} f(x, y)\, dx\, dy = \frac{1}{r!\, s!} \sum_{i,j=0}^{m-1,\, n-1} \sum_{p,q=0}^{r-2,\, s-2} A_{ij}^{(p,q)} (r-p-1)!\, (s-q-1)!\, f^{(p,q)} \times (x_i, y_j) + R_{mn}(f), \tag{2}$$

where $f \in W_{0L_2}^{(r,s)}(M_{rs})$.

The following problems are disscussed:

a) Find

$$E_{mn}(W_{0L_2}^{(r,s)}(M_{rs});\ A_{ij}^{(p,q)},\ x_i, y_j) = \sup_{f \in W_{0L_2}^{(r,s)}(M_{rs})} |R_{mn}(f)|. \tag{3}$$

In the sequel we call $E_{mn}(W_{0L_2}^{(r,s)}(M_{rs});\ A_{ij}^{(p,q)}, x_i, y_j)$, *the exact estimate of the remainder,* of the cubature formula (2) with regard to the considered class of functions.