30. Ogiue K. — *Theory of conformal connexions.* Kodai Math. Sem. Rep., 19 (1967) p. 498—506.
31. Oproiu V. — *Some remarks on the conformal almost symplectic connexions.* An. şt. Univ. Iaşi, Matematică, 15 (1969) p. 151—157.
32. Oproiu V. — *Almost horsymplectic and conformal almost horsymplectic connexions.* Revue Roum. Math. Pures Appl., 14 (1969) p. 1585—1607.
33. Oproiu V. — *Degenerate almost symplectic and conformal degenerate almost symplectic connexions.* To appear.
34. Oproiu V. — *Some remarks on the almost cocomplex connexions.* To appear.
35. Spencer D. — *Deformation theory of pseudo-group structures.* Ann. Math., 76 (1962) p. 306—445.
36. Sternberg S., Singer I. — *The infinite groups of Lie and Cartan.* J. Anal. Math., 15 (1965) p. 1—114.
37. Tanaka N. — *Conformal connexions and conformal transformations.* Trans. Am. Math. Soc., 92 (1959) p. 168—190.
38. Tondeur Ph. — *Affine Zusamenhänge auf Mannigfaltigkeiten mit fast-symplektischer Struktur.* Comm. Math. Helv., 36 (1961) p. 234—244.
39. Vaisman I. — *Sur quelques formules du calcul de Ricci global.* Comm. Math. Helv., 41 (1966—67) p. 73—87.
40. Vaisman I. — *Tenseurs projectifs sur une variété différentiable.* An. şt. Univ. Iaşi, 12 (1966) p. 347—352.
41. Vaisman I. — *Sur la cohomologie des variétés riemanniennes feuilletées.* C. R. Acad. Sci. Paris, 268 (1969) p. 720—723.
42. Vrănceanu G. — *Lecţii de geometrie diferenţială,* vol. I, II, Ed. did. ped. 1962, 1964.

CONEXIUNI RIEMANNIENE DEGENERATE ŞI CONFORME DEGENERATE

Rezumat

Se studiază problema integrabilităţii structurilor riemanniene degenerate cu ajutorul familiei de conexiuni compatibile cu aceste structuri. Se obţine un rezultat analog cu rezultatul clasic pentru structuri riemanniene. O structură riemanniană degenerată este integrabilă dacă şi numai dacă există o conexiune compatibilă cu această structură avînd tensorii de curbură şi torsiune nuli.

Pentru cazul structurilor conforme singulare se introduc nişte invarianţi care amintesc de tensorii Weyl ai structurilor conforme.

AUTOMORFISME INFINITEZIMALE ALE UNEI r-π-STRUCTURI

DE

ELENA VAMANU

Fie V_n o varietate diferenţiabilă dotată cu o r-π-structură şi φ tensorul fundamental al acestei structuri, deci $\overset{r}{\varphi} = \lambda^r I$ [2]. Vom numi automorfism infinitezimal al unei r-π-structuri un cîmp de vectori $X \in H(V_n)$ în raport cu care

$$L_X \varphi = 0, \tag{1}$$

unde $H(V_n)$ este algebra Lie a cîmourilor de vectori pe V_n, iar L_X simbolul derivatei Lie în raport cu cîmpul X *).

În cele ce urmează ne propunem să studiem cîteva proprietăţi ale acestor automorfisme.

Teorema 1. *Un cîmp de vectori $X \in H(V_n)$ este un automorfism infinitezimal al unei r-π-structuri dacă şi numai dacă*

$$[X, \varphi Y] = \varphi([X, Y]) \text{ pentru orice } Y \in H(V_n). \tag{2}$$

([.] reprezintă croşetul a două cîmpuri de vectori).

Demonstraţie. Fie $X, Y \in H(V_n)$. Avem:

$$[X, \varphi Y] = L_X(\varphi Y) = (L_X \varphi) Y + \varphi([X, Y]). \tag{3}$$

Din (3) rezultă că $L_X \varphi = 0$ dacă şi numai dacă $[X, \varphi Y] = \varphi([X, Y])$, c. c. t. d.

Observaţie. Din proprietăţile derivatei Lie rezultă că $L_X \varphi = 0$ atrage şi

$$L_X \overset{r-1}{\varphi} = 0, \tag{4}$$

*) Pentru detalii vezi [1] şi [3].

iar (2) implică şi

(5) $$[X, \overset{r-1}{\varphi} Y] = \overset{r-1}{\varphi}([X, Y]) \text{ pentru orice } Y \in H(V_n).$$

Fie Γ o conexiune liniară complet reductibilă pe V_n, deci $\nabla\varphi = 0$ (∇ fiind simbolul diferenţierii covariante în raport cu Γ) şi T tensorul de torsiune al ei.

O nouă caracterizare a unui automorfism infinitezimal va fi dată de

Teorema 2. *Condiţia necesară şi suficientă ca un cîmp de vectori $X \in H(V_n)$ să fie un automorfism infinitezimal al unei r-π-structuri este ca*

(6) $$\nabla_{\varphi Y} X - \varphi \nabla_Y X = \varphi(T(X, Y)) - T(X, \varphi Y) \text{ pentru orice } Y \in H(V_n).$$

Demonstraţie. Tensorul de torsiune T al conexiunii Γ e definit de

(7) $$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

Avem

$$\varphi T(X, Y) - T(X, \varphi Y) = \varphi(\nabla_X Y) - \varphi(\nabla_Y X) - \varphi([X, Y]) - \nabla_X \varphi Y + \nabla_{\varphi Y} X + [X, \varphi Y].$$

Deoarece Γ este complet reductibilă, $\nabla_X \varphi Y = \varphi \nabla_X Y$. Deci

(8) $$\varphi T(X, Y) - T(X, \varphi Y) = \nabla_{\varphi Y} X - \varphi \nabla_Y X + [X, \varphi Y] - \varphi([X, Y]).$$

Aplicînd teorema 1, rezultă că X este automorfism infinitezimal dacă şi numai dacă

$$\nabla_{\varphi Y} X - \varphi \nabla_Y X = \varphi T(X, Y) - T(X, \varphi Y) \text{ pentru orice } Y \in H(V_n), \text{ c. c. t. d}$$

Observaţie. În cazul particular cînd conexiunea Γ este şi fără torsiune, X este automorfism infinitezimal dacă şi numai dacă avem

(9) $$\nabla_{\varphi Y} X = \varphi \nabla_Y X \text{ pentru orice } Y \in H(V_n).$$

Asociem cîmpurilor de tensori φ, $\overset{r-1}{\varphi}$ tensorul

(10) $$N(X, Y) = [\overset{r-1}{\varphi} X, \varphi Y] + \lambda^r [X, Y] - \overset{r-1}{\varphi}[X, \varphi Y] - \varphi[\overset{r-1}{\varphi} X, Y];$$
$$X, Y \in H(V_n).$$

Observăm că în cazul particular $r = 2$ (al structurilor aproape-complexe şi aproape-produs) acest tensor coincide cu tensorul lui Nijenhuis.

Un calcul simplu ne dă următoarea relaţie între tensorul φ al structurii, tensorul T de torsiune a conexiunii complet reductibile Γ şi tensorul N

(11) $$\varphi T(\overset{r-1}{\varphi} X, Y) - T(\overset{r-1}{\varphi} X, \varphi Y) + \overset{r-1}{\varphi} T(X, \varphi Y) - \lambda^r T(X, Y) = N(X, Y).$$

Din (10) şi din condiţia $\overset{r}{\varphi} = \lambda^r I$ rezultă

Teorema 3. *Condiţia necesară şi suficientă ca un cîmp de vectori $X \in H(V_n)$ să fie un automorfism infinitezimal al unei r-π-structuri este ca*

(12) $$N(X, Y) = [\overset{r-1}{\varphi} X, \varphi Y] - \varphi[\overset{r-1}{\varphi} X, Y], \text{ pentru orice } Y \in H(V_n).$$

Fie $X \in H(V_n)$ şi $\tilde{X} = \overset{r-1}{\varphi} X$ cîmpul de vectori asociat lui X prin $\overset{r-1}{\varphi}$.

Dacă X este automorfism infinitezimal al unei r-π-structuri, $\tilde{X}$, în general, nu se bucură de această proprietate.

În baza teoremei 1 rezultă că $\tilde{X}$ este automorfism infinitezimal al unei r-π-structuri dacă şi numai dacă este îndeplinită condiţia:

(13) $$[\overset{r-1}{\varphi} X, \varphi Y] = \varphi([\overset{r-1}{\varphi} X, Y]) \text{ pentru orice } Y \in H(V_n).$$

Observaţie. Din (12) rezultă că în aceste condiţii avem

(14) $$N(X, Y) = 0.$$

Un automorfism infinitezimal X pentru care şi $\tilde{X}$ este tot automorfism infinitezimal îl vom numi *special*.

Din cele de mai sus rezultă

Teorema 4. *Condiţia necesară şi suficientă ca un cîmp de vectori $X \in H(V_n)$ să fie un automorfism infinitezimal special al unei r-π-structuri este ca*

(15) $$L_X \varphi = 0, \; N(X, Y) = 0 \text{ pentru orice } Y \in H(V_n).$$

Din (11) şi din teorema 4 rezultă

Teorema 5. *Condiţia necesară şi suficientă ca un automorfism infinitezimal X să fie special este ca să existe pe V_n conexiuni complet reductibile cu tensorul de torsiune satisfăcînd condiţia*

(16) $$\varphi T(\overset{r-1}{\varphi} X, Y) - T(\overset{r-1}{\varphi} X, \varphi Y) + \overset{r-1}{\varphi} T(X, \varphi Y) - \lambda^r T(X, Y) = 0$$

pentru orice $Y \in H(V_n)$.

Fie $\mathcal{A}$ algebra Lie a automorfismelor infinitezimale ale unei r-π-structuri (că aceste automorfisme formează o algebră Lie rezultă imediat) şi $\mathcal{A}_s$ mulţimea automorfismelor infinitezimale speciale. Să demonstrăm că $\mathcal{A}_s$ formează un ideal în $\mathcal{A}$.

Fie $X, Y \in \mathcal{A}_s$, deci

(17) $$[X, \varphi Z] = \varphi([X, Z]), \; [\overset{r-1}{\varphi} X, \varphi Z] = \varphi([\overset{r-1}{\varphi} X, Z])$$
pentru orice $Z \in H(V_n)$

şi

(18) $$[Y, \overset{r-1}{\varphi} Z] = \varphi([Y, Z]), \; [\overset{r-1}{\varphi} Y, \varphi Z] = \overset{r-1}{\varphi}([\varphi Y, Z]),$$

pentru orice $Z \in H(V_n)$.

Să arătăm că $[X, Y] \in \mathcal{A}_s$.

$\mathcal{A}$ fiind algebră Lie, avem $[X, Y] \in \mathcal{A}$, deci

$$([X, Y], \varphi Z] = \varphi([[X, Y], Z]) \text{ pentru orice } Z \in H(V_n).$$

Să mai arătăm că

(19) $$[\overset{r-1}{\varphi}([X, Y]), \varphi Z] = \varphi([\overset{r-1}{\varphi}([X, Y]), Z]) \text{ pentru orice } Z \in H(V_n).$$

Deoarece $Y \in \mathcal{A}_s$, $\overset{r-1}{\varphi} Y$ este şi el automorfism infinitezimal, deci $\overset{r-1}{\varphi} Y \in \mathcal{A}$ şi atunci cîmpul de vectori $[X, \overset{r-1}{\varphi} Y] \in \mathcal{A}$ ceea ce poate fi caracterizat prin

(20) $$[[X, \overset{r-1}{\varphi} Y], \varphi Z] = \varphi([[X, \overset{r-1}{\varphi} Y], Z]), \text{ cu } Z \in H(V_n).$$

Cum X este automorfism infinitezimal, are loc relaţia (5) şi, ţinînd cont de aceasta, în (20), obţinem :

$$[\overset{r-1}{\varphi}([X, Y]), \varphi Z] = \varphi([\overset{r-1}{\varphi}([X, Y]), Z]), \text{ c. c. t. d.}$$

Am arătat astfel că $\mathcal{A}_s$ este o subalgebră în $\mathcal{A}$.

Observaţie. În demonstraţia de mai sus nu a intervenit esenţial $X \in \mathcal{A}_s$. Considerăm acum $X \in \mathcal{A}$ şi $Y \in \mathcal{A}_s$. Conform observaţiei făcute, rezultă că croşetul $[X, Y] \in \mathcal{A}_s$, ceea ce demonstrează că $\mathcal{A}_s$ este un ideal în $\mathcal{A}$.

Am demonstrat astfel că mulţimea automorfismelor infinitezimale speciale formează un ideal în algebra Lie a tuturor automorfismelor infinitezimale ale unei r-π-structuri.

Observaţie. Fie X un automorfism infinitezimal. Considerînd derivata Lie a tensorului N dat de (10) în raport cu cîmpul de vectori X obţinem

(21) $$L_X N = 0.$$

Deci tensorul N este un invariant al algebrei $\mathcal{A}$.

În cazul particular $r = 2$, N coincide cu tensorul lui Nijenhuis şi obţinem un rezultat dat de Y. Mutô în [4] pentru structurile aproape-complexe.

BIBLIOGRAFIE

1. Chu H. and Kobayashi S. — *The automorphism group of a geometric structure*. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 113 (1964), p. 141-150.

2. Hsu C. J. — *On some properties of π-structures on differentiable manifolds*. Tohôku Math. Journ. 12 (1960), p. 429-454.
3. Kobayashi S. and Nomizu K. — *Foundations of Differential Geometry*. vol. II, Interscience Publishers, 1969.
4. Mutô Y. — *On some almost analytic tensor fields in almost complex manifolds*. Kodai Math. Sem. Rep., 19 (1967), p. 454-469.

AUTOMORPHISMES INFINITÉSIMAUX D'UNE r-π-STRUCTURE

Résumé

Étant donné un espace V_n muni d'une r-π-structure caractérisée par un champ de tenseurs φ, un champ de vecteurs X sur V_n est nommé automorphisme infinitésimal de la structure si $L_X \varphi = 0$. Si, de plus $L_{\overset{r-1}{\varphi} X} \varphi = 0$, le champ X est nommé automorphisme infinitésimal spécial.

Dans cette Note on donne quelques propriétés des automorphismes infinitésimaux et on montre que les automorphismes infinitésimaux spéciaux forment un idéal dans l'algèbre Lie de tous les automorphismes infinitésimaux.