CVASI-CONEXIUNI PE VARIETĂŢI DIFERENŢIABILE

DE

ELENA VAMANU

Fie V_n o varietate diferenţiabilă de clasă C^∞ şi φ un cîmp de tensori pe V_n, de tip (1, 1), nedegenerat. Existenţa cîmpului φ ne permite considerarea pe V_n a cvasi-conexiunilor în sens Wong [3]*. În această Notă se dă o definiţie globală a noţiunii de cvasi-conexiune, se introduc tensorii de torsiune şi de curbură, ecuaţiile de structură, derivata covariantă pentru această cvasi-conexiune etc. Dacă V_n este şi spaţiu Riemann, se determină o cvasi-conexiune unică fără torsiune şi în raport cu care derivata covariantă a tensorului fundamental al spaţiului este nulă.

1. Introducem notaţiile:

$F(V_n)$ — mulţimea funcţiilor diferenţiabile pe V_n.

$L^1(V_n)$ — algebra Lie a cîmpurilor de vectori pe V_n.

$L_1(V_n)$ — dualul spaţiului $L^1(V_n)$.

$L_{[p]}(V_n)$ — spaţiul formelor exterioare de grad p (spaţiul p-formelor).

$\mathcal{E}(V_n) = \bigcup_{p=0}^{n} L_{[p]}(V_n)$ — algebra exterioară a formelor exterioare.

Fie δ o derivare de grad 1 a algebrei $\mathcal{E}(V_n)$ definită prin condiţiile:

1° $\delta f(X) = \varphi X . f$, unde $f \in F(V_n)$, $X \in L^1(V_n)$ şi φX este imaginea vectorului X prin operatorul φ.

2° $2\delta\omega(X, Y) = \varphi X . \omega(Y) - \varphi Y . \omega(X) - \omega(\varphi([\varphi X, \varphi Y]))$ pentru orice $X, Y \in L^1(V_n)$ şi $\omega \in L_1(V_n)$.

---

* Un exemplu de spaţii ce posedă un cîmp de tensori φ nedegenerat este dat de spaţiile dotate cu o r-s-structură. Cvasi-conexiunile pe aceste spaţii au fost considerate în [1] şi [2]

Observaţie. În 2°, ψ reprezintă reciprocul tensorului φ, iar $[,]$ operaţia croşet.

Fie $x \in V_n$ un punct oarecare al varietăţii V_n şi (U, x^i) o vecinătate de coordonate a punctului x. Considerăm în U reperul natural $\partial/\partial x^i$ şi coreperul asociat (dx^i).

Dacă u_p este o p-formă diferenţială reprezentată în vecinătatea U prin

$$u_p = \frac{1}{p!} a_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}, \tag{1}$$

atunci, folosind axiomele care definesc operatorul δ obţinem:

$$\delta u_p = \frac{1}{(p+1)!} \left[\frac{1}{p!} \varepsilon^{i_0 i_1 \dots i_p}_{j_0 j_1 \dots j_p} \left(\varphi^h_{i_0} a_{i_1, i_2 \dots i_p, h} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{p} \psi^k_{h,l} \varphi^l_{[i_0} \varphi^h_{i_\alpha]} \right. \right. \tag{2}$$

$$\left. \left. a_{i_1, i_2 \dots i_{\alpha-1} k i_{\alpha+1}, \dots, i_p} \right) \right] \wedge dx^{j_0} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p},$$

unde $\varepsilon^{i_0 i_1 \dots i_p}_{j_0 j_1 \dots j_p}$ este simbolul lui Kronecker.

(2) exprimă acţiunea operatorului δ asupra unei p-forme.

Se poate verifica imediat că $\delta^2 u_p = 0$ pentru orice $u_p \in L_{[p]}(V_n)$.

2. Definim pe V_n o lege D care asociază fiecărui vector $X \in L^1(V_n)$ reprezentarea liniară D_X a spaţiului $L^1(V_n)$ în el însuşi prin următoarele condiţii:

1'. $$D_{fX+gY} = fD_X + gD_Y,$$

2'. $$D_X fY = fD_X Y + \delta f(X) Y$$

pentru orice $f, g \in F(V_n)$ şi $X, Y \in L^1(V_n)$.

Legea D cu proprietăţile 1', 2' o vom numi cvasi-conexiune pe V_n, iar operatorul D_X îl vom numi derivată covariantă în raport cu cîmpul de vectori X.

O cvasi-conexiune D pe V_n induce o cvasi-conexiune D_U pe orice subvarietate deschisă U din V_n. În particular, aceasta este adevărat pentru o vecinătate de coordonate U.

Fie (U, x^i) vecinătatea de coordonate considerat mai sus cu reper şi coreper natural. Notăm

$$D_i = (D_U)_{\frac{\partial}{\partial x^i}}, \tag{3}$$

şi definim pe vecinătatea U funcţiile Γ^k_{ij} date de:

$$D_i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{4}$$

Dacă $(x^{i'})$ este un alt sistem de coordonate pe U, avem:

$$D_{i'} \left(\frac{\partial}{\partial x^{j'}} \right) = \Gamma^{k'}_{i'j'} \frac{\partial}{\partial x^{k'}}.$$

Folosind axiomele 1' şi 2' obţinem:

$$\Gamma^{k'}_{i'j'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \Gamma^k_{ij} + \varphi^{k}_{i'} \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{k'} \partial x^{j'}} \right). \tag{5}$$

Un obiect geometric cu legea de transformare (5) se numeşte cvasi-conexiune [3].

Funcţiile Γ^k_{ij} le vom numi coeficienţi de cvasi-conexiune.

Observaţie. Diferenţa a două cvasi-conexiuni este un tensor.

Formele date de

$$\omega^k_i = \Gamma^k_{ij} dx^j \tag{6}$$

le vom numi forme de cvasi-conexiune.

3. Introducem cîmpurile de operatori

$$T(X, Y) = D_X Y - D_Y X - \psi([\varphi X, \varphi Y]) \text{ pentru orice } X, Y \in L^1(V_n) \tag{7}$$

$$R(X, Y) = D_X D_Y - D_Y D_X - D_{\psi([\varphi X, \varphi Y])} \text{ pentru orice } X, Y \in L^1(V_n). \tag{8}$$

Se verifică imediat că:

$$T(X, Y) = -T(Y, X), \qquad R(X, Y) = -R(Y, X),$$

$$T(fX, gY) = fgT(X, Y), \quad R(fX, gY) = fgR(X, Y)$$

pentru orice $f, g \in F(V_n)$ şi $X, Y \in L^1(V_n)$.

Deci $T(X, Y)$ determină un tensor de tip $(1, 2)$ iar $R(X, Y)$ un tensor de tip $(1, 3)$.

În vecinătatea de coordonate (U, x^i) aceşti tensori au componentele date de:

$$T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji} + \varphi^k_{h,m} \varphi^m_{[i} \varphi^h_{j]} \tag{9}$$

şi respectiv

$$R^k_{hij} = \Gamma^k_{im} \Gamma^m_{jh} - \Gamma^k_{jm} \Gamma^m_{ih} + \Gamma^k_{jh,m} \varphi^m_i - \Gamma^k_{ih,m} \varphi^m_j + \Gamma^k_{lh} \psi^l_{m,n} \varphi^n_{[i} \varphi^m_{j]}. \tag{10}$$

Ecuaţiile de structură ale cvasi-conexiunii D sînt:

$$\delta dx^i + \omega^i_j \wedge dx^j = \frac{1}{2} T^i_{jk} dx^j \wedge dx^k,$$

$$\delta \omega^i_j + \omega^i_h \wedge \omega^h_j = \frac{1}{2} R^i_{jkm} dx^k \wedge dx^m, \tag{11}$$

ceea ce justifică denumirea de tensor de torsiune şi de curbură pe care le vom da tensorilor T şi respectiv R.

4. Am numit D_X derivata covariantă în raport cu cîmpul de vectori X. Din definiţia operatorului D_X rezultă:

$$D_X f = \delta f(X), \text{ cu } f \in F(V_n).$$

Fie $\omega \in L_1(V_n)$. Definim $D_X \omega$ astfel:

$$(D_X \omega)(Y) = (\delta\omega(Y))(X) - \omega(D_X Y).$$

Cunoscînd cum acţionează D_X asupra elementelor din $L^1(V_n)$ şi $L_1(V_n)$ putem scrie derivata covariantă a unui cîmp de tensori T de tip (p, q) prin

$$(D_X T)(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q) = (\delta T(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q) \cdot (X) -$$

(12) $$\sum_{\alpha=1}^{p} T(\omega^1, \ldots, D_X \omega^\alpha, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q) - \sum_{\beta=1}^{q} T(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, D_X X_\beta, \ldots, X_q)$$

Observaţie. Identităţile lui Bianchi-Padova cît şi identităţile lui Ricc au aceeaşi formă ca şi în cazul conexiunilor.

5. Unei cvasi-conexiuni D îi putem asocia alte două cvasi-conexiuni:

a) Cvasi-conexiunea transpusă D' definită prin

(13) $$D'_X Y = D_Y X + \psi([\varphi X, \varphi Y]);$$

b) Cvasi-conexiunea medie dată de

(14) $$\overset{m}{D}_X Y = \frac{1}{2}(D_X Y + D'_X Y).$$

Fie $T'(X, Y)$ tensorul de torsiune al cvasi-conexiunii D' şi $\overset{m}{T}(X, Y)$ tensorul de torsiune al cvasi-conexiunii $\overset{m}{D}$.

Folosind (7), (13) şi (14) obţinem:

(15) $$T'(X, Y) = T(Y, X),$$

(16) $$\overset{m}{T}(X, Y) = 0.$$

Deci cvasi-conexiunea medie este fără torsiune.

Într-o hartă locală componentele celor două cvasi-conexiuni sînt date de

(17) $$\Gamma'^k_{ij} = \Gamma^k_{ji} + \psi^k_{m,h}\, \varphi^h_{[j}\, \varphi^m_{i]}$$

şi

(18) $$\overset{m}{\Gamma}{}^k_{ij} = \frac{1}{2}(\Gamma^k_{ij} + \Gamma'^k_{ij}) = \frac{1}{2}(\Gamma^k_{ij} + \Gamma^k_{ji} + \psi^k_{m,h}\, \varphi^h_{[j}\, \varphi^m_{i]}).$$

Dacă ∇ este o conexiune liniară pe V_n (definită în sens Koszul), ei i se

poate asocia o cvasi-conexiune $\overset{0}{D}$ definită prin:

(19) $$\overset{0}{D}_X = \nabla_{\varphi X}.$$

În adevăr, avem:

$$\overset{0}{D}_{fX+gY} = \nabla_{f\varphi X + g\varphi Y} = f\nabla_{\varphi X} + g\nabla_{\varphi Y} = f\overset{0}{D}_X + g\overset{0}{D}_Y,$$

$$\overset{0}{D}_X(fY) = \nabla_{\varphi X}(fY) = f\nabla_{\varphi X} Y + (\varphi X)fY = f\overset{0}{D}_X Y + \delta f(X) Y.$$

Am obţinut astfel un exemplu de cvasi-conexiune asociată canonic unei conexiuni liniare.

Fie $\overset{0}{T}$, $\overset{0}{R}$, t, r tensorii de torsiune şi de curbură ai cvasi-conexiunii $\overset{0}{D}$ şi respectiv ai conexiunii ∇.

Ţinînd cont de definiţia acestor tensori, obţinem:

(20) $$\varphi \overset{0}{T}(\psi X, \psi Y) = t(X, Y) + \varphi((\nabla_X \psi) Y - (\nabla_Y \psi) X),$$

(21) $$\overset{0}{R}(X, Y) = r(\varphi X, \varphi Y).$$

Într-o hartă locală (19), (20) şi (21) devin

(19') $$\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk} = \varphi^m_j\, \gamma^i_{mk},$$

(20') $$\varphi^m_i\, \overset{0}{T}{}^i_{jk}\, \psi^j_h\, \psi^k_n = t^m_{hn} + \varphi^m_i\, (\nabla_h \psi^i_n - \nabla_n \psi^i_h),$$

(21') $$\overset{0}{R}{}^i_{jkl} = r^i_{jmn}\, \varphi^m_k\, \varphi^n_l.$$

Din (20') şi (21') rezultă:

— Dacă conexiunea ∇ este fără torsiune, cvasi-conexiunea $\overset{0}{D}$ asociată nu are, în general, torsiune nulă.

— Cvasi-conexiunea $\overset{0}{D}$ este fără curbură dacă şi numai dacă conexiunea ∇ este fără curbură.

Presupunem acum că V_n este un spaţiu Riemann. În acest caz are loc

Teorema. *Pe un spaţiu Riemann V_n există o cvasi-conexiune unică care satisface condiţiile:*

a. Este fără torsiune.

b. Derivata covariantă a tensorului metric fundamental g al spaţiului în raport cu această cvasi-conexiune este nulă.

Demonstraţie. Condiţiile *a.* şi *b.* ne dau

(22) $$D_X Y - D_Y X - \psi([\varphi X, \varphi Y]) = 0,$$

$$D_Z g(X, Y) = (\delta g(X, Y))(Z) - g(X, D_Z Y) - g(D_Z X, Y) = 0. \tag{23}$$

Din (22) şi (23) rezultă

$$(\delta g(X, Y))(Z) = g(X, D_Z Y) + g(D_X Z, Y) + g(\psi([\varphi Z, \varphi X]), Y).$$

Permutînd ciclic literele X, Y, Z, avem

$$(\delta g(X, Y))(Z) = g(X, D_Z Y) + g(D_X Z, Y) + g(\psi([\varphi Z, \varphi X]), Y),$$
$$(\delta g(Y, Z))(X) = g(Y, D_X Z) + g(D_Y X, Z) + g(\psi([\varphi X, \varphi Y]), Z),$$
$$(\delta g(Z, X))(Y) = g(Z, D_Y X) + g(D_Z Y, X) + g(\psi([\varphi Y, \varphi Z]), X).$$

Adunînd aceste relaţii (a doua luată cu semnul minus) obţinem:

$$2g(X, D_Z Y) = (\delta g(X, Y))(Z) - (\delta g(Y, Z))(X) + (\delta g(Z, X))(Y) + \tag{24}$$
$$+ g(\psi([\varphi Z, \varphi X]), Y) - g(\psi([\varphi X, \varphi Y]), Z) + g\,\psi([\varphi Y, \varphi Z]), X).$$

(24) ne determină o cvasi-conexiune unică ce satisface cele două condiţii. Reciproc, o cvasi-conexiune definită prin (24) satisface condiţiile *a.* şi *b.*

Într-o hartă locală, cvasi-conexiunea dată de formula (24) are componentele:

$$\Gamma^m_{jk} = \frac{1}{2} g^{im} (g_{ij,h}\, \varphi^h_k - g_{jk,h}\, \varphi^h_i + g_{ki,h}\, \varphi^h_j) - \psi^h_{l,n}\, \varphi^n_{[i}\, \varphi^l_{j]}\, g_{hk}\, g^{im} + \tag{25}$$
$$+ \psi^m_{l,h}\, \varphi^h_{[j}\, \varphi^l_{k]} - \psi^h_{l,n}\, \varphi^n_{[i}\, \varphi^l_{k]}\, g_{hj}\, g^{im}.$$

BIBLIOGRAFIE

1. V a m a n u E. — *Cvasi-conexiuni pe spaţii cu structură aproape produs.* An. şt. Univ. Iaşi, Matematică, t. XIII (1967), pp. 401–407.
2. V a m a n u E. — *Cvasi-conexiuni pe spaţii dotate cu o r-structură.* An. şt. Univ. Iaşi, Matematică, t. XVI (1970), pp. 117–125.
3. W o n g Y. C. — *Linear connections and quasi connections on a differentiable manifold.* Tôhoku Math. Journ. 14 (1962), pp. 48–63.

QUASI-CONNEXIONS SUR VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

Résumé

On donne une définition globale de la notion de quasi-connexion dans le sens de Wong sur une variété différentiable. On introduit aussi les tenseurs de torsion et de courbure pour cette quasi-connexion, les équations de structure, la dérivée covariante, etc. Si la variété est riemannienne, on détermine une quasi-connexion unique sans torsion et par rapport à laquelle la dérivée covariante du tenseur fondamental de l'espace est nulle.

PROPRIÉTÉS DES STRUCTURES TRANSITIVES

PAR

C. APREUTESEI

Dans cette Note on étudie quelques propriétés des structures transitives [2] définies sur une variété différentiable: un aspect concernant le prolongement des structures, les G-structures associées et le tenseur de structure, le groupe d'holonomie d'une connexion infinitésimale; on construit en partant de la structure donnée et des groupes associés au groupe G_T (v. § 5), une suite d'espaces fibrés principaux (e.f.p.) différentiables et une famille de connexions associées ([10], ch. IV).

1. Soit V_n une variété différentiable C^∞ de dimension $n \geq 3$. Nous allons adopter la même notation pour les applications et leurs différentielles.

Une couple de distributions (V, M) régulières de classe C^∞ définit une structure transitive T [2] si dans chaque point $x \in V_n$ sont satisfaites les conditions suivantes:

1) $T_x = V_x + M_x$,

2) La distribution K définie par les espaces $K_x = V_x \cap M_x$ est régulière et a la dimension $q \geq 1$, où T_x et V_x, M_x sont respectivement l'espace tangent à V_n et les plans des distributions au point x.

Rappelons que la géométrie locale d'une couple de distributions définies sur un espace à connexion affine, a été étudiée par R. M i r o n et D. P a p u c [8].

Exemples. a) Soit R^3 l'espace affine de dimension 3 et R_0 le repère naturel. Chaque couple de plans des repères qui sont obtenus par la translation du repère R_0, détermine une structure transitive dans l'espace R^3.

b) Supposons donnée sur V_n une structure presque-produit réelle [6] intégrable définie par une couple de distributions notées (V, M). Si l'on procède de la manière indiquée dans [2] (voir aussi le § 2 de cette Note) nous obtenons une suite

$$\mathcal{S}_1(V_n), \quad \mathcal{S}_1^{(1)}(\mathcal{S}_1), \ldots, \mathcal{S}_1^{(h)}(\mathcal{S}_1^{(h-1)}), \ldots$$