$$D_Z g(X, Y) = (\delta g(X, Y))(Z) - g(X, D_Z Y) - g(D_Z X, Y) = 0. \tag{23}$$

Din (22) şi (23) rezultă

$$(\delta g(X, Y))(Z) = g(X, D_Z Y) + g(D_X Z, Y) + g(\psi([\varphi Z, \varphi X]), Y).$$

Permutînd ciclic literele X, Y, Z, avem

$$(\delta g(X, Y))(Z) = g(X, D_Z Y) + g(D_X Z, Y) + g(\psi([\varphi Z, \varphi X]), Y),$$
$$(\delta g(Y, Z))(X) = g(Y, D_X Z) + g(D_Y X, Z) + g(\psi([\varphi X, \varphi Y]), Z),$$
$$(\delta g(Z, X))(Y) = g(Z, D_Y X) + g(D_Z Y, X) + g(\psi([\varphi Y, \varphi Z]), X).$$

Adunînd aceste relaţii (a doua luată cu semnul minus) obţinem:

$$2g(X, D_Z Y) = (\delta g(X, Y))(Z) - (\delta g(Y, Z))(X) + (\delta g(Z, X))(Y) + \tag{24}$$
$$+ g(\psi([\varphi Z, \varphi X]), Y) - g(\psi([\varphi X, \varphi Y]), Z) + g(\psi([\varphi Y, \varphi Z]), X).$$

(24) ne determină o cvasi-conexiune unică ce satisface cele două condiţii. Reciproc, o cvasi-conexiune definită prin (24) satisface condiţiile *a.* şi *b.*

Într-o hartă locală, cvasi-conexiunea dată de formula (24) are componentele:

$$\Gamma^m_{jk} = \frac{1}{2} g^{im} (g_{ij,h} \varphi^h_k - g_{jk,h} \varphi^h_i + g_{ki,h} \varphi^h_j) - \psi^h_{l,n} \varphi^n_{[i} \varphi^l_{j]} g_{hk} g^{im} + \tag{25}$$
$$+ \psi^m_{l,h} \varphi^h_{[j} \varphi^l_{k]} - \psi^h_{l,n} \varphi^n_{[i} \varphi^l_{k]} g_{hj} g^{im}.$$

BIBLIOGRAFIE

1. V a m a n u E. — *Cvasi-conexiuni pe spaţii cu structură aproape produs*. An. şt. Univ. Iaşi, Matematică, t. XIII (1967), pp. 401–407.
2. V a m a n u E. — *Cvasi-conexiuni pe spaţii dotate cu o r-structură*. An. şt. Univ. Iaşi, Matematică, t. XVI (1970), pp. 117–125.
3. W o n g Y. C. — *Linear connections and quasi connections on a differentiable manifold*. Tôhoku Math. Journ. 14 (1962), pp. 48–63.

QUASI-CONNEXIONS SUR VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

Résume

On donne une définition globale de la notion de quasi-connexion dans le sens de Wong sur une variété différentiable. On introduit aussi les tenseurs de torsion et de courbure pour cette quasi-connexion, les équations de structure, la dérivée covariante, etc. Si la variété est riemannienne, on détermine une quasi-connexion unique sans torsion et par rapport à laquelle la dérivée covariante du tenseur fondamental de l'espace est nulle.

PROPRIÉTÉS DES STRUCTURES TRANSITIVES

PAR

C. APREUTESEI

Dans cette Note on étudie quelques propriétés des structures transitives [2] définies sur une variété différentiable: un aspect concernant le prolongement des structures, les G-structures associées et le tenseur de structure, le groupe d'holonomie d'une connexion infinitésimale; on construit en partant de la structure donnée et des groupes associés au groupe G_T (v. § 5), une suite d'espaces fibrés principaux (e.f.p.) différentiables et une famille de connexions associées ([10], ch. IV).

1. Soit V_n une variété différentiable C^∞ de dimension $n \geq 3$. Nous allons adopter la même notation pour les applications et leurs différentielles.

Une couple de distributions (V, M) régulières de classe C^∞ définit une structure transitive T [2] si dans chaque point $x \in V_n$ sont satisfaites les conditions suivantes:

1) $T_x = V_x + M_x$,

2) La distribution K définie par les espaces $K_x = V_x \cap M_x$ est régulière et a la dimension $q \geq 1$, où T_x et V_x, M_x sont respectivement l'espace tangent à V_n et les plans des distributions au point x.

Rappelons que la géométrie locale d'une couple de distributions définies sur un espace à connexion affine, a été étudiée par R. M i r o n et D. P a p u c [8].

Exemples. a) Soit R^3 l'espace affine de dimension 3 et R_0 le repère naturel. Chaque couple de plans des repères qui sont obtenus par la translation du repère R_0, détermine une structure transitive dans l'espace R^3.

b) Supposons donnée sur V_n une structure presque-produit réelle [6] intégrable définie par une couple de distributions notées (V, M). Si l'on procède de la manière indiquée dans [2] (voir aussi le § 2 de cette Note) nous obtenons une suite

$$\mathcal{S}_1(V_n), \quad \mathcal{S}_1^{(1)}(\mathcal{S}_1), \ldots, \mathcal{S}_1^{(h)}(\mathcal{S}_1^{(h-1)}), \ldots$$

d'e.f.p. définis par les repères transverses respectivement aux distributions

$$V,\quad V^{(1)},\ldots,V^{(h)},\ldots$$

On obtient pour la distribution M la suite

$$\mathcal{E}_2(V_n),\quad \mathcal{E}_2^{(1)}(\mathcal{E}_2),\ldots,\mathcal{E}_2^{(h)}(\mathcal{E}_2^{(h-1)}),\ldots$$

d'e.f.p. des repères transverses respectivement aux distributions

$$M,\quad M^{(1)},\ldots,M^{(h)},\ldots$$

Les distributions $V^{(h)}$ et $M^{(h)}$ sont obtenues respectivement de $V^{(h-1)}$ et $M^{(h-1)}$ en utilisant les projections des espaces $\mathcal{E}_1^{(h)}$ et $\mathcal{E}_2^{(h)}$ sur leurs bases. On peut obtenir sur l'e.f.p. $\mathcal{E}_1^{(h)} \boxtimes \mathcal{E}_2^{(h)}$ une structure transitive intégrable [2].

c) *La construction d'une structure transitive.* Supposons données sur V_n une distribution régulière $D: x \to D_x$ et une sous-distribution de cette distribution $S: x \to S_x$ (de manière que $S_x \subset D_x$, $\forall x \in V_n$) soit aussi régulière. Considérons sur V_n une métrique g fixée. Nous définissons une distribution S' qui a le plan S'_x formé par l'ensemble de vecteurs de D_x orthogonaux (dans la métrique g) à l'espace S_x. Si S'' est la distribution définie par le supplément orthogonal de S_x dans l'espace T_x, nous avons $D_x \cap S''_x = S'_x$ et $T_x = D_x + S''_x$. La couple (D, S'') définit ainsi une structure transitive.

Nous faisons les conventions suivantes pour la notation des indices: $\alpha, \beta, \ldots = 1, 2, \ldots, n$; $i, j, k, \ldots = 1, 2, \ldots, m$; $i', j', k', \ldots = m+1, \ldots, n-p$; $i'', j'', k'', \ldots = n-p+1, \ldots, n$, où $n-p = \dim V$, $n-m = \dim M$ et donc $m = n-p-q$.

Une base (e_α) relative à x adaptée à la structure transitive est formée par les vecteurs $e_i \in V_x$ $(e_i \notin K_x)$, $e_{i'} \in K_x$, $e_{i''} \in M_x$ $(e_{i''} \notin K_x)$. L'ensemble des bases adaptées à la structure transitive est muni, par rapport à la projection naturelle, d'une structure d'e.f.p. de base V_n et le groupe structural G_T donné par l'ensemble des matrices régulières $n \times n$:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & \delta & \varepsilon \end{pmatrix}$$

où $\alpha = (a^i_j) \in GL(m, R)$, $\beta = (a^i_{j'})$ de type $m \times q$, $\gamma = (a^{i'}_{j'}) \in GL(q, R)$, $\delta = (a^{i''}_{j'})$ de type $p \times q$ et $\varepsilon = (a^{i''}_{j''}) \in GL(p, R)$. Cet e.f.p. est noté par $E(V_n, G_T)$ et nous l'appelons G_T-structure.

2.1. Nous notons par $\mathcal{S}^{(1)}$ l'espace fibré des vecteurs tangents à V_n; alors $\mathcal{S}^{(h)}$ sera l'espace fibré des vecteurs tangents à $\mathcal{S}^{(h-1)}$ et donc $\dim \mathcal{S}^{(h)} = 2^h n$. Nous définirons sur chaque variété $\mathcal{S}^{(h)}$ une distribution $V^{(h)}$ à partir de la distribution $V^{(h-1)}$. Soit π_1 la projection de l'espace fibré $\mathcal{S}^{(1)}$

sur V_n. Si $u \in \mathcal{S}^{(1)}$ et $\pi_1(u) = x$, nous définissons $V^{(1)}_u = \pi_1^{-1}(V_x)$. L'application π_1 étant régulière [9], la distribution $V^{(1)}: u \to V^{(1)}_u$ a la dimension $2n-p$. On peut continuer le processus: nous associons à la distribution $V^{(h-1)}$ la distribution $V^{(h)} = \pi_h^{-1}(V^{(h-1)})$, où π_h est la projection de $\mathcal{S}^{(h)}$ sur $\mathcal{S}^{(h-1)}$. Vu que $\dim \mathcal{S}^{(h-1)} = 2^{h-1} n$, $\dim V^{(h-1)} = 2^{h-1} n - p$, il résulte $\dim V^{(h)} = 2^h n - p$. Nous pouvons obtenir pour la distribution M, sur $\mathcal{S}^{(h)}$, par le procédé indiqué, une distribution $M^{(h)}$ ayant la dimension $2^h n - m$.

Remarque. 1 Pour tout h les distributions $V^{(h)}$ et $M^{(h)}$ ont les codimensions égales à la codim V et codim M, respectivement.

Définissons le sous-espace τ_u tangent en chaque point u de $\mathcal{S}^{(1)}$, par l'égalité: $\tau_u = V^{(1)}_u + M^{(1)}_u$. Vu que $V^{(1)}_u \cap M^{(1)}_u = \pi_1^{-1}(K_x)$ on obtient $\dim (V^{(1)}_u \cap M^{(1)}_u) = n + q$. Il résulte que $\dim \tau_u = 2n$; mais τ_u est un sous-espace de l'espace tangent T_u de $\mathcal{S}^{(1)}$ et donc $\tau_u = T_u$. Ainsi $T_u = V^{(1)}_u + M^{(1)}_u$, $V^{(1)}_u \cap M^{(1)}_u \neq \{0\}$; nous en déduisons que la couple de distributions $(V^{(1)}, M^{(1)})$ définit sur la variété $\mathcal{S}^{(1)}$ une structure transitive $T^{(1)}$. Si la structure T est intégrable [2], alors les distributions $V^{(1)}$ et $M^{(1)}$ sont intégrables [9] et donc $T^{(1)}$ est intégrable.

On peut faire ce raisonnement pour h arbitraire. On voit facilement que $V^{(h)}_z \cap M^{(h)}_z = \pi_h^{-1}(V^{(h-1)}_t \cap M^{(h-1)}_t)$ où $\pi_h(z) = t$, $z \in \mathcal{S}^{(h)}$, $t \in \mathcal{S}^{(h-1)}$. On en déduit que $\dim (V^{(h)} \cap M^{(h)}) = q + (2^h - 1)n$. Définissons d'une manière analogue le sous-espace tangent par $\tau_z = V^{(h)}_z + M^{(h)}_z$. La $\dim \tau_z = 2^h n$; il en résulte que l'espace T_z tangent à la variété $\mathcal{S}^{(h)}$ coïncide avec τ_z et donc $T_z = V^{(h)}_z + M^{(h)}_z$; comme $V^{(h)}_z \cap M^{(h)}_z \neq \{0\}$, la couple de distributions $(V^{(h)}, M^{(h)})$ définit sur $\mathcal{S}^{(h)}$ une structure transitive $T^{(h)}$. Si la structure initiale est intégrable, alors $T^{(h)}$ est aussi intégrable.

On peut appeler $T^{(h)}$ le prolongement d'ordre h à la structure T par rapport à la variété $\mathcal{S}^{(h)}$.

Remarquons que l'ensemble des repères de la variété $\mathcal{S}^{(1)}$ adaptés à la structure $T^{(1)}$ forme une G_T-structure notée par $E^{(1)}$ $(\mathcal{S}^{(1)}, G^{(1)}_T)$, où $G^{(1)}_T$ est le sous-groupe de $GL(2n, R)$ donné par les matrices

$$\begin{pmatrix} \alpha^{(1)} & \beta^{(1)} & 0 \\ 0 & \gamma^{(1)} & 0 \\ 0 & \delta^{(1)} & \varepsilon^{(1)} \end{pmatrix},$$

où $\alpha^{(1)} \in GL(m, R)$, $\varepsilon^{(1)} \in GL(p, R)$, $\gamma^{(1)} \in GL(\nu_1, R)$, $\beta^{(1)}$ est de type $m \times \nu_1$ et $\delta^{(1)}$ de type $p \times \nu_1$, où $\nu_1 = 3n + q$.

D'une manière analogue, sur l'espace $\mathcal{S}^{(h)}$ nous avons défini une G_T-structure $E^{(h)}(\mathcal{S}^{(h)}, G_T^{(h)})$, où $G_T^{(h)}$ est le sous-groupe de $GL(2^h n, R)$ donné par l'ensemble des matrices

$$\begin{pmatrix} \alpha^{(h)} & \beta^{(h)} & 0 \\ 0 & \gamma^{(h)} & 0 \\ 0 & \delta^{(h)} & \varepsilon^{(h)} \end{pmatrix}$$

où $\alpha^{(h)} \in GL(m, R)$, $\varepsilon^{(h)} \in GL(p, R)$, $\gamma^{(h)} \in GL(\nu_h, R)$, $\beta^{(h)}$ est de type $m \times \nu_h$ et $\delta^{(h)}$ est de type $p \times \nu_h$ ayant $\nu_h = (2^h - 1)n + q$.

Remarque. 2. Pour tout h, $\dim V^{(h)} - \dim (V^{(h)} \cap M^{(h)}) = m$, $\dim M^{(h)} - \dim (V^{(h)} \cap M^{(h)}) = p$ et par suite les matrices $\alpha^{(h)} \in GL(m, R)$ et $\varepsilon^{(h)} \in GL(p, R)$.

On peut appeler l'e.f.p. $E^{(h)}(\mathcal{S}^{(h)}, G_T^{(h)})$ le prolongement d'ordre h de la G_T-structure $E(V_n, G_T)$ par rapport à $\mathcal{S}^{(h)}$.

Maintenant nous pouvons énoncer le

Théorème 1. *Le prolongement d'ordre h par rapport à la suite de variétés $\mathcal{S}^{(h)}$ d'une structure transitive (intégrable) est une structure transitive (respectivement intégrable), pour laquelle le groupe structural de la G_T-structure associée a les matrices $\alpha^{(h)}$ et $\varepsilon^{(h)}$ indépendantes de l'étape du prolongement.*

Conséquence. Le prolongement d'ordre h par rapport aux variétés $\mathcal{S}^{(h)}$ d'une structure presque-produit (intégrable) est une structure transitive (respectivement intégrable).

2.2. Interprétation géométrique (le cas intégrable). Nous obtiendrons sur chaque variétée $\mathcal{S}^{(h)}$ $(h = 0, 1, \ldots)$ un e.f.p. dont le groupe structural est formé par les matrices α et β qui sont conservées au prolongement. Pour simplifier les raisonnements, nous considérons l'étape initiale $(h = 0)$.

Soit la structure T intégrable. Si x^α sont les coordonnées du point $x \in U$ et $e_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$ les vecteurs du repère naturel, alors on suppose que $(e_{n-p+1}, \ldots, e_{n-p})$ forme une base de K_x. Par définition $\hat{e}_1 = e_1 + K_x, \ldots, \hat{e}_m = e_m + K_x$, $\hat{e}_{n-p+1} = e_{n-p+1} + K_x, \ldots, \hat{e}_n = e_n + K_x$.

Du fait que la relation $C^{a_1} \hat{e}_{a_1} = 0$ donne $C^{a_1} = 0$ $(a_1 = 1, \ldots, m, n-p+1, \ldots, n)$, il résulte que les vecteurs $\hat{e}_{a_1}$ sont linéairement indépendants et donc il forment une base de l'espace T_x/K_x. Nous définissons les formes $\hat{\theta}^{a_1}$ par les conditions $\langle \hat{e}_{a_1}, \hat{\theta}^{b_1} \rangle = \delta^{b_1}_{a_1}$. On peut introduire dans l'ensemble $T/K(V_n) = \bigcup_{x \in V_n} T_x/K_x$, des coordonnées : si $x' \in U$ et $(x', Y) \in \pi^{-1}(x)$ (où $\pi : T/K(V_n) \to V_n$ est la projection naturelle) alors

$$w^I(x', Y) = \begin{cases} x^I(x') & \text{pour } I = 1, 2, \ldots, n, \\ \hat{\theta}^I_{x'}, (Y) & \text{pour } I = n+1, \ldots, n+m, \; 2n-p+1, \ldots, 2n \end{cases}$$

où $Y = \tau + K_{x'}$ si $\tau \in T_{x'}$. L'ensemble $T/K(V_n)$ est un espace fibré différentiable avec la base V_n, la fibre-type R^{n-q} et le groupe structural $GL(n-q, R)$.

Soit P_x l'ensemble des repères de l'espace T_x/K_x. L'ensemble $P^{(0)} = \bigcup_{x \in V_n} P_x$ forme un e.f.p. de base V_n et groupe structural $GL(n-q, R)$. Du fait que l'espace tangent à V_n admet ([1]*) et [2]) la décomposition $T_x/K_x = V_x/K_x \oplus M_x/K_x$, il résulte que l'ensemble des repères de l'espace T_x/K_x adaptables à la structure presque-produit ([6] et [1]) définie par la couple de distributions $(V/K, M/K)$ forme un s.e.f.p. $P_{(0)}(V_n, G)$ de $P^{(0)}$, ayant le groupe structural G donné par l'ensemble des matrices du groupe $GL(n-q, R)$ de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ où $\alpha \in GL(m, R)$ et $\beta \in GL(p, R)$.

En utilisant ce raisonnement pour l'espace $\mathcal{S}^{(h)}$ doué de la structure transitive $T^{(h)}$, on trouve un e.f.p. $P^{(h)}(\mathcal{S}^{(h)}, GL(n-q, R))$ et son s.e.f.p. $P_{(h)}(\mathcal{S}^{(h)}, G)$. Le groupe structural G est isomorphe à $GL(m, R) \times GL(p, R)$.

2.3. Les résultats des théorèmes 1 (de cette Note) et 2 (dans [2]) sont compris dans un résultat plus général :

Soit W une variété différentiable C^∞ de dimension N et $h : W \to V_n$ une application régulière dans le sens de Palais [9]. Soit $y = h(x)$, $x \in V_n$. Dans ces conditions on peut énoncer le

Théorème 2. *Si T est une structure transitive (intégrable) sur V_n et $h : W \to V_n$ une application régulière, alors il existe sur la variété W une structure transitive $\bar{T}$ (respectivement intégrable).*

Démonstration. Nous définissons sur W deux distributions $\bar{V} : y \to \bar{V}_y$, $\bar{M} : y \to \bar{M}_y$, où :

$$\bar{V}_y = \{\tau \in T'_y / h(\tau) \in V_x\},$$

$$\bar{M}_y = \{\tau \in T'_y / h(\tau) \in M_x\},$$

T'_y étant l'espace tangent à W au point y.

Les distributions $\bar{V}$ et $\bar{M}$ sont régulières (intégrables) si les distributions V et M étaient régulières (respectivement intégrables) [9]. Puis, $\dim \bar{V} = N - p$, $\dim \bar{M} = N - m$. Si nous notons $\bar{K}_y = \bar{V}_y \cap \bar{M}_y$, on peut démontrer que $\bar{K}_y = h^{-1}(K_x)$. On obient ainsi $\dim \bar{K}_y = N + q - n$. Nous définissons l'espace $\bar{\tau}_y = \bar{V}_y + \bar{M}_y$. Nous avons $\dim \bar{\tau}_y = N$; il résulte $\bar{\tau}_y = T'_y$. Comme $\bar{K} \neq \{0\}$ il en résulte que la couple de distributions $(\bar{V}, \bar{M})$ définit sur W une structure transitive $\bar{T}$, qui est intégrable si T est intégrable.

Remarque 3. Si les variétés V et W ont les dimensions égales, alors $\dim \bar{K}_y = q$. Dans cette situation, en partant d'une structure presque-produit intégrable définie sur V, nous obtenons sur W une structure presque-produit intégrable.

*) A la page 131 de [1], ligne 13 il y a une erreur de notation : $\bigcup$ doit être remplacé par $\oplus$

Théorème 3. *L'image réciproque d'une structure transitive (intégrable) par une application régulière* [9] *est une structure transitive (respectivement intégrable).*

Remarque 4. Les matrices α et β sont conservées en passant à l'image réciproque de la structure transitive.

3. Tenseur de structure d'une G_T-structure ([3] et [4]). Pour déterminer le tenseur de structure, nous employons les notations de [3].

Soit (e_α) une base fixée de l'espace R^n. Une base d'algèbre de Lie G_T du groupe G_T est donnée par

$$\{e_j \otimes f^i,\quad e_{j'} \otimes f^i,\quad e_{j'} \otimes f^{i'},\quad e_{j'} \otimes f^{i''},\quad e_{j''} \otimes f^{i''}\},$$

où (f^α) est la base duale. Alors nous avons une base dans l'espace $N = G_T \otimes R^{*n}$ donnée par les vecteurs:

$$\{e_j \otimes f^i \otimes f^k,\quad e_{j'} \otimes f^i \otimes f^k,\quad e_{j'} \otimes f^{i'} \otimes f^k,\quad e_{j'} \otimes f^{i''} \otimes f^k,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$e_{j''} \otimes f^i \otimes f^{k''},\quad e_{j''} \otimes f^{i'} \otimes f^{k''},\quad e_{j''} \otimes f^{i''} \otimes f^{k''},\quad e_{j''} \otimes f^{i''} \otimes f^{k''}\}.$$

Soit $\mathcal{A}$ la projection naturelle de l'espace $N_1 = R^n \otimes R^{*n} \otimes R^{*n}$ sur l'espace N_1/P, où $P = R^n \otimes \wedge^2 R^{*n}$ et A la restriction de cet opérateur à l'espace N. La base de l'espace $V = A(N)$ déterminée par la base considérée de l'espace N, sera donnée par les expressions:

$$\{e_j \otimes f^i \wedge f^k \quad (i<k),\quad e_{j'} \otimes f^i \wedge f^k \quad (i<k),\quad e_{j'} \otimes f^{i'} \wedge f^k,\quad e_{j'} \otimes f^{i''} \wedge f^k$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$e_{j''} \otimes f^i \wedge f^{k''},\quad e_{j''} \otimes f^{i'} \wedge f^{k''},\quad e_{j''} \otimes f^{i''} \wedge f^{k''}(i'' < k''),\quad e_{j''} \otimes f^{i''} \wedge f^{k''}(i'' < k'')\}.$$

Il résulte que l'espace V admet un espace supplémentaire W_1 invariant à l'action du groupe G_T et qui a une base donnée par

$$\{e_j \otimes f^{i'} \wedge f^{k'}(i' < k'),\quad e_j \otimes f^{i''} \wedge f^{k''},\quad e_j \otimes f^{i''} \wedge f^{k''}(i'' < k''),\quad e_{j'} \otimes f^i \wedge f^k(i<k)$$

$$e_{j'} \otimes f^i \wedge f^{k'},\quad e_{j'} \otimes f^{i'} \wedge f^{k'}(i' < k')\}.$$

Définition. *On appelle G_T-connexion sur V_n, toute connexion infinitésimale sur l'e.f.p. $E(V_n, G_T)$.*

Si on fait la convention: $a, b, \ldots = 1, 2, \ldots, n-p$; $a', b', \ldots = m+1, \ldots, n$ nous pouvons énoncer le

Théorème 4. *Le tenseur de structure d'une G_T-structure sur V_n est déterminé par les composantes $\{t^i_{ab},\ t^{i''}_{a'b'}\}$ du tenseur de torsion d'une G_T-connexion quelconque.*

Conséquence. Si la G_T-structure est intégrable, alors il existe un tenseur $\{t^i_{ab},\ t^{i''}_{a'b'}\}$ nul.

Connexions. Considérons un recouvrement de V_n par des ouverts munis chacun d'une section locale de $E(V_n, G_T)$; une G_T-connexion peut

être définie par une forme locale sur chaque ouvert U, à valeurs dans l'algèbre de Lie de G_T, représentée par une matrice $n \times n$

$$\pi_U = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & 0 \\ 0 & \pi_3 & 0 \\ 0 & \pi_4 & \pi_5 \end{pmatrix}$$

dont les éléments sont des formes linéaires locales; $\pi_1 = (\pi^i_j)$, $\pi_2 = (\pi^{i'}_j), \ldots,$ $\pi_5 = (\pi^{i''}_{j''})$.

Vu que $E(V_n, G_T)$ est un s.e.f.p. de l'e.f.p. des repères de la variété V_n, une G_T-connexion détermine d'une manière canonique une connexion linéaire représentée dans chaque point du voisinage U, douée de sections de $E(V_n, G_T)$, par une matrice (π^α_β) $(\alpha, \beta = 1, \ldots n)$. Pour que cette connexion puisse être identifiée à une G_T-connexion il faut et il suffit que la matrice (π^α_β) satisfasse aux relations $\pi^i_{j'} = \pi^{i'}_j = \pi^{i''}_{j''} = \pi^{i''}_j = 0$.

4.2. Courbure. Étant donnée une G_T-connexion, la courbure est représentée par 2-formes $\Omega^\alpha_\beta = d\pi^\alpha_\beta + \pi^\alpha_\gamma \wedge \pi^\gamma_\beta$. On obtient: $\Omega^i_k = d\pi^i_k + \pi^i_h \wedge \pi^h_k$, $\Omega^i_{k'} = d\pi^i_{k'} + \pi^i_h \wedge \pi^h_{k'} + \pi^i_{h'} \wedge \pi^{h'}_{k'}$, $\Omega^{i'}_{k'} = d\pi^{i'}_{k'} + \pi^{i'}_{h'} \wedge \pi^{h'}_{k'}$, $\Omega^{i''}_{k'} = d\pi^{i''}_{k'} + \pi^{i''}_{h'} \wedge \pi^{h'}_{k'} + \pi^{i''}_{h''} \wedge \pi^{h''}_{k'}$, $\Omega^{i''}_{k''} = d\pi^{i''}_{k''} + \pi^{i''}_{h''} \wedge \pi^{h''}_{k''}$.

Nous obtenons de la première, la troisième et de la dernière égalité (par l'opération de contraction):

$$\Omega^i_i = d\pi^i_i,\quad \Omega^{i''}_{i''} = d\pi^{i''}_i,\quad \Omega^{i'}_{i'} = d\pi^i_{i'}.$$

Par définition, $\psi_1 = d\pi^i_i$ (respectivement $\psi_2 = -d\pi^{i''}_i$, $\psi_3 = -d\pi^i_{i'}$), s'appelle la première (respectivement la deuxième et la troisième forme caractéristique de la G_T-connexion. Il existe une forme φ telle que $\psi_1 - \psi_2 = d\varphi$. Ainsi les 2-formes ψ_1 et ψ_2 définissent la même classe de cohomologie. Puis, si $(\widetilde{\pi}^\alpha_\beta)$ est une autre G_T-connexion et $\widetilde{\psi}_1$, $\widetilde{\psi}_2$ sont les formes caractéristiques correspondantes, la 2-forme $\widetilde{\psi}_1 - \psi_1 = d(\widetilde{\pi}^i_i - \pi^i_i)$ (d'une manière analogue pour les formes $\psi_2, \widetilde{\psi}_2$ et $\psi_3, \widetilde{\psi}_3$) est homologue à 0. Nous énonçons le

Théorème 5. *Les formes caractérisique d'une G_T-connexion définissent la même classe de cohomologie qui est indépendante de la connexion.*

La classe de cohomologie exprimée ici pourrait être nommée la classe de cohomologie de la G_T-structure définie par la couple de distribution (V, M).

4.3. Groupe d'holonomie restreint. Du fait qu'on peut identifier toute G_T-connexion à une connexion linéaire déterminée, les notions de groupe d'holonomie et groupe d'holonomie restreint sont fournies par celles ([7], ch. II) des connexions linéaires.

Notons par S_1G_T (respectivement S_2G_T, S_3G_T) l'ensemble des matrices du groupe G_T pour lequel les sous-matrices α (resp. ε, γ) satisfont à la condition **det** $\alpha = 1$ (resp. det $\varepsilon = 1$, det $\gamma = 1$).

Lemme. *Les ensembles S_1G_T, S_2G_T, S_3G_T sont des sous-groupes invariants du groupe G_T.*

Démonstration. Pour fixer les idées nous considérons S_1G_T. Si $A_1, B_1 \in S_1G_T$, alors le produit $C_1 = A_1B_1^{-1} \in S_1G_T$ parce que C_1 contient une sous-matrice $\alpha'' = \alpha(\alpha')^{-1}$ pour laquelle $\det \alpha'' = \det \alpha \det (\alpha')^{-1} = 1$. Alors S_1G_T est un sous-groupe de G_T. Puis, si $D_1 = A_1^{-1} B_1 A_1$, où $A_1 \in G_T$, $B_1 \in S_1G_T$, alors D_1 contient une sous-matrice $\alpha_1' = \alpha_1^{-1}\alpha_2\alpha_1$ dont $\det \alpha_1' = 1$.

Si l'on note par $\widetilde{V}_n$ le recouvrement universel de la variété V_n, la projection $p: \widetilde{V}_n \to V_n$ permet de définir sur $\widetilde{V}_n$ une structure transitive et une G_T-connexion; le groupe d'holonomie homogène de cette G_T-connexion au point $x' \in \widetilde{V}_n$ peut s'identifier au groupe d'holonomie restreint de la G_T-connexion correspondante au point $x = p(x')$. Notons tout de même le recouvrement universel de la variété V_n (munie d'une G_T-connexion) et si z_0 est un repère adapté à $x_0 \in U$ nous supposons que le groupe d'holonomie restreint σ_{z_0} est sous-groupe du groupe S_1G_T. Le tenseur t_0 défini dans x_0, relativement à z_0, par les composantes

$$t_{j_1 \cdots j_m} = \varepsilon^{1\,2 \ldots m}_{1\,j_2 \ldots j_m}$$

est invariant à σ_{z_0}. Si t est le tenseur sur V_n, obtenu de t_0 par le transport la différentielle absolue est nulle (dans la connexion considérée) $\nabla t = 0$ et alors il y a ([7], ch. III) une fonction f sur U telle que, par rapport à la section locale,

$$t_{j_1 j_2 \ldots j_n} = \varepsilon^{1\,2 \ldots m}_{j_1 j_2 \ldots j_m} f;$$

et alors $\pi_i^1 = d(\log f)$. D'ici il résulte $\psi_1 = 0$. Réciproquement, pour x arbitraire de V_n, il y a voisinage U muni d'une section locale et une fonction f_1 de manière que $\pi_i^1 = d(\log f_1)$ par rapport à la section considérée. Le tenseur t covariant d'ordre m défini sur U par les composantes

$$t_{j_1 \ldots j_m} = \varepsilon^{1\,2 \ldots m}_{j_1 j_2 \ldots j_m} f_1$$

satisfait à la condition $\nabla t = 0$.

Le groupe d'holonomie restreint σ_z étant sous-groupe G_T, ses éléments obtenus par le développement des lacets en x, contenus en U, laisse t invariant; ces éléments appartiennent à S_1G_T. Le point x étant arbitraire, il résulte du lemme de factorisation ([7], ch. II) que σ_z est sous-groupe de S_1G_T.

En utilisant des considérations analogues pour ψ_2, ψ_3 et revenant à la variété initiale, on peut énoncer le

Théorème 6.*) *Une condition nécessaire et suffisante pour que le groupe d'holonomie restreint d'une G_T-connexion soit le sous-groupe du groupe S_1G_T*

*) Un raisonnement analogue a été fait par A. Lichnerowicz pour les connexions presque hermitiennes ([7], ch. V) et adapté d'une manière convenable par G. Legrand [6] et H. A. Eliopoulos [5].

(respectivement S_2G_T, S_3G_T) est que la première (respectivement la deuxième, troisième) forme caractéristique soit nulle sur V_n.

5. Connexions prolongées. Soit $A = (a^\alpha_\beta) \in G_T$; nous notons par $\widetilde{A} = (\widetilde{a}^\alpha_\beta)$ la matrice inverse de A. Les formes du groupe G_T invariantes à gauche sont données par les expressions

$$\begin{aligned}
&\omega_i^j = -\widetilde{a}_i^k\, da_k^j, \quad \omega_i^{j'} = -(\widetilde{a}_i^k\, da_k^{j'} + \widetilde{a}_i^{k'}\, da_{k'}^{j'}), \quad \omega_i^{j''} = 0,\\
(1)\qquad &\omega_{i'}^j = 0, \quad \omega_{i'}^{j'} = -\widetilde{a}_{i'}^{k'}\, da_{k'}^{j'}, \quad \omega_{i'}^{j''} = 0,\\
&\omega_{i''}^j = 0, \quad \omega_{i''}^{j'} = -(\widetilde{a}_{i''}^{k'}\, da_{k'}^{j'} + \widetilde{a}_{i''}^{k''}\, da_{k''}^{j'}), \quad \omega_{i''}^{j''} = -\widetilde{a}_{i''}^{k''}\, da_{k''}^{j''}.
\end{aligned}$$

Le groupe G_T a $\varrho = (p+m)(q+m) + p(p+q) + q^2$ paramètres et les équations de structure sont données par

$$\begin{aligned}
&d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j, \quad d\omega_i^{j'} = \omega_i^k \wedge \omega_k^{j'} + \omega_i^{k'} \wedge \omega_{k'}^{j'},\\
(2)\qquad &d\omega_{i'}^{j'} = \omega_{i'}^{k'} \wedge \omega_{k'}^{j'}, \quad d\omega_{i''}^{j'} = \omega_{i''}^{k'} \wedge \omega_{k'}^{j'} + \omega_{i''}^{k''} \wedge \omega_{k''}^{j'},\\
&d\omega_{i''}^{j''} = \omega_{i''}^{k''} \wedge \omega_{k''}^{j''}, \quad d\omega_i^{j''} = d\omega_{i'}^{j} = d\omega_{i'}^{j''} = d\omega_{i''}^{j} = 0.
\end{aligned}$$

Remarque 5. Les transformations infinitésimales du groupe G_T ont la forme suivante:

$$X_i^k = x^k \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad X_{i'}^k = x^k \frac{\partial}{\partial x^{i'}}, \quad X_i^{k'} = x^{k'} \frac{\partial}{\partial x^{i'}}, \quad X_i^{k''} = x^{k''} \frac{\partial}{\partial x^{i'}},$$

$$X_{i''}^{k''} = x^{k''} \frac{\partial}{\partial x^{i''}}, \quad X_{i'}^k = X_i^{k'} = X_{i''}^{k'} = X_i^{k''} = 0.$$

Supposons maintenant que la variété V_n est connexe. Nous pouvons munir l'espace $E(V_n, G_T)$ d'un système de n formes différentielles linéaires ω^α définies globalement dans cet espace; sur le voisinage $U \times G_T$, les formes ω^α sont définies par les relations

$$(3)\qquad \omega^\alpha = a^\alpha_\beta \theta^\beta$$

où (θ^β) est un co-repère distingué. Par la différentiation extérieure de (3) on obtient des expressions de la forme:

$$\begin{aligned}
&d\omega^i + \omega^i_\alpha \wedge \omega^\alpha = \frac{1}{2} T^{i}_{\alpha\beta}\, \omega^\alpha \wedge \omega^\beta\\
(4)\qquad &d\omega^{i'} + \omega^{i'}_\alpha \wedge \omega^\alpha = \frac{1}{2} T^{i'}_{\alpha\beta}\, \omega^\alpha \wedge \omega^\beta\\
&d\omega^{i''} + \omega^{i''}_\alpha \wedge \omega^\alpha = \frac{1}{2} T^{i''}_{\alpha\beta}\, \omega^\alpha \wedge \omega^\beta
\end{aligned}$$

où $T_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\lambda} = -T_{\beta\alpha}^{\cdot\cdot\lambda}$ sont exprimés par les matrices A, $\widetilde{A}$ et les fonctions $b_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\lambda} = -b_{\beta\alpha}^{\cdot\cdot\lambda}$ des expressions $d\theta^{\lambda} = \frac{1}{2} b_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\lambda}\, \theta^{\alpha} \wedge \theta^{\beta}$. Les formes $\{\omega_a^i, \dots, \omega_{a'}^{i''}\}$ déterminent ([10], ch. IV) une connexion $\gamma_{(0)}$ définie globalement dans l'espace $E(V_n, G_I)$ dont les équations de structure sont (4).

Remarque 6. Parce que la connexion $\gamma_{(0)}$ est liée intrinséquement à la G_I-structure, les composantes $T_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\lambda}$ de sa torsion sont des invariants différentiels du premier ordre de cet espace [5]. Ces invariants sont des fonctions de coordonnées du point $z = (x, u)$, $x \in U$, $u \in G_I$; donc:

$$dT_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\lambda} = T_{\alpha\beta,\gamma}^{\cdot\cdot\lambda}\, \omega^{\gamma} + T_{\alpha\beta,\rho}^{\cdot\cdot\lambda\,\tau}\, \omega_{\tau}^{\delta}$$

où $T_{\alpha\beta,\gamma}^{\cdot\cdot\lambda}$, $T_{\alpha\beta,\rho}^{\cdot\cdot\lambda\,\tau}$ sont des invariants différentiels du second ordre de la G_I-structure. Le processus peut être continué et l'on obtient une suite d'invariants d'ordre supérieur.

On trouve facilement que la connexion $\gamma_{(0)}$ a la courbure nulle. Nous avons obtenu ainsi le

Théorème 7. *La variété V_n connexe, qui possède une structure transitive, peut être douée d'une connexion $\gamma_{(0)}$ sans courbure.*

Nous pouvons déduire de la connexion $\gamma_{(0)}$ une infinité de connexions en faisant sur les formes $\{\omega_a^i, \omega_{j'}^{i'}, \omega_{a'}^{i''}\}$ la substitution

$$\pi_{\beta}^{\alpha} = \omega_{\beta}^{\alpha} + t_{\beta\gamma}^{\alpha}\, \omega^{\gamma}, \tag{5}$$

où $t_{\beta\lambda}^{\alpha}$ sont des fonctions de classe C^{∞} dans le voisinage du point $z \in E$ qui sont symétriques dans la couple d'indices (β, λ) et satisfont aux conditions

$$t_{i\lambda}^{k''} = t_{i'\lambda}^{k} = t_{i'\lambda}^{k''} = t_{i''\lambda}^{k} = 0. \tag{6}$$

Les équations de structure pour les nouvelles connexions sont

$$d\omega^{\alpha} + \pi_{\beta}^{\alpha} \wedge \omega^{\beta} = \frac{1}{2} T_{\beta\lambda}^{\cdot\cdot\alpha}\, \omega^{\beta} \wedge \omega^{\lambda}. \tag{7}$$

Il résulte que toutes les connexions ont la même torsion donnée par les composantes de la torsion de la connexion $\gamma_{(0)}$.

Remarque 7. Les composantes π_{β}^{α} de chacune des nouvelles connexions satisfont aux relations $\pi_{i}^{k''} = \pi_{i'}^{k} = \pi_{i'}^{k''} = \pi_{i''}^{k} = 0$.

Les transformations

$$\begin{aligned} \pi_{\beta}^{\alpha} &= \omega_{\beta}^{\alpha} + t_{\beta\lambda}^{\alpha}\, \omega^{\lambda}, \\ \pi^{\alpha} &= \omega^{\alpha}, \end{aligned} \tag{8}$$

définissent un groupe $\widetilde{G}_T^{(1)}$ qui a la dimension donnée par $\rho_1 = \frac{1}{2}[p^2(p^2+1) + m^2(m+1) + qn(n+1)]$.

Il résulte ([10], ch. IV) que sur la G_T-structure $E(V_n, G_T)$ considérée comme base, on peut définir l'e.f.p. $\widetilde{E}^{(1)}(E, \widetilde{G}_T^{(1)})$. On peut munir cet espace d'une connexion $\gamma_{(1)}$ qui a les équations de structure (7) et (9):

$$\begin{aligned}
d\pi_j^k &= \omega_{j\lambda}^k \wedge \omega^{\lambda} + \omega_j^l \wedge \omega_l^k + \frac{1}{2} \overset{(1)}{T}{}_{j\lambda,\mu}^{\cdot\cdot k}\, \omega^{\lambda} \wedge \omega^{\mu}, \\
d\pi_h^{k'} &= \pi_{h\lambda}^{k'} \wedge \omega^{\lambda} + \omega_h^a \wedge \omega_a^{k'} + \frac{1}{2} \overset{(1)}{T}{}_{h\lambda,\mu}^{\cdot\cdot k'}\, \omega^{\lambda} \wedge \omega^{\mu}, \\
d\pi_{h'}^{k'} &= \omega_{h'\lambda}^{k'} \wedge \omega^{\lambda} + \omega_{h'}^{l'} \wedge \omega_{l'}^{k'} + \frac{1}{2} \overset{(1)}{T}{}_{h'\lambda,\mu}^{\cdot\cdot k'}\, \omega^{\lambda} \wedge \omega^{\mu}, \\
d\pi_{h''}^{k'} &= \omega_{h''\lambda}^{k'} \wedge \omega^{\lambda} + \omega_{h''}^{a'} \wedge \omega_{a'}^{k'} + \frac{1}{2} \overset{(1)}{T}{}_{h''\lambda,\mu}^{\cdot\cdot k'}\, \omega^{\lambda} \wedge \omega^{\mu}, \\
d\pi_{j''}^{k''} &= \omega_{j''\lambda}^{k''} \wedge \omega^{\lambda} + \omega_{j''}^{l''} \wedge \omega_{l''}^{k''} + \frac{1}{2} \overset{(1)}{T}{}_{j''\lambda,\mu}^{\cdot\cdot k''}\, \omega^{\lambda} \wedge \omega^{\mu},
\end{aligned} \tag{9}$$

obtenues par la différentiation extérieure des expressions (5) et en utilisant les relations (1), (2) et (4). Les coefficients $T_{\beta\lambda,\mu}^{\cdot\cdot\alpha}$ sont les composantes de la torsion de la connexion $\gamma_{(1)}$; ceux-ci sont des invariants différentiels de l'espace $\widetilde{E}^{(1)}$. Les nouvelles formes introduites satisfont aux relations $\omega_{i'\lambda}^{k} = \omega_{i''\lambda}^{k} = \omega_{i\lambda}^{k''} = \omega_{i'\lambda}^{k''} = 0$ parce que les coefficients $t_{\beta\gamma}^{\alpha}$ sont soumis aux conditions (6).

On peut obtenir d'autres connexions prolongées si nous faisons la substitution

$$\pi_{\beta\lambda}^{\alpha} = \omega_{\beta\lambda}^{\alpha} + t_{\beta\lambda,\nu}^{\alpha}\, \omega^{\nu}, \tag{10}$$

où les coefficients $t_{\beta\lambda,\nu}^{\alpha}$ sont des fonctions de classe C^{∞} symétriques dans les indices (λ, ν) et qui satisfont aux relations

$$t_{i'\lambda,\nu}^{k} = t_{i''\lambda,\nu}^{k} = t_{i\lambda,\nu}^{k''} = t_{i'\lambda,\nu}^{k''} = 0. \tag{11}$$

Remarque 8. Les composantes $\pi_{\beta\lambda}^{\alpha}$ de chacune des nouvelles connexions satisfont aux relations

$$\pi_{i'\lambda}^{k} = \pi_{i''\lambda}^{k} = \pi_{i\lambda}^{k''} = \pi_{i'\lambda}^{k''} = 0. \tag{12}$$

Les équations (10) complétées par la transformation identique $\widetilde{\omega}^{\alpha} = \omega^{\alpha}$ donnent un groupe $\widetilde{G}_T^{(2)}$ qui a la dimension $\rho_2 = [n(n+1)/2]\,(p^2 + m^2 + qn)$; ce groupe permet de construire sur la variété $\widetilde{E}^{(1)}$ un e.f.p. $\widetilde{E}^{(2)}(\widetilde{E}^{(1)}, \widetilde{G}_T^{(2)})$ qui peut être muni d'une connexion $\gamma_{(2)}$ définie globalement, dont les équations de structure sont de la forme

$$
(13)\qquad
\begin{aligned}
d\pi^k_{ij} &= \omega^k_{ij\alpha}\wedge\omega^\alpha + \cdots + \frac{1}{2}\overset{(2)}{T}{}^{\cdots k}_{ij\alpha\beta}\,\omega^\alpha\wedge\omega^\beta,\\
d\pi^{k'}_{ij} &= \omega^{k'}_{ij\alpha}\wedge\omega^\alpha + \cdots + \frac{1}{2}\overset{(2)}{T}{}^{\cdots k}_{ij\alpha\beta}\,\omega^\alpha\wedge\omega^\beta,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
d\pi^{k'}_{ij} &= \omega^{k'}_{ij\alpha}\wedge\omega^\alpha + \cdots + \frac{1}{2}\overset{(2)}{T}{}^{\cdots k'}_{ij\alpha\beta}\,\omega^\alpha\wedge\omega^\beta,
\end{aligned}
$$

où $\overset{(2)}{T}{}^{\cdots\alpha}_{ij\alpha\beta} = -\overset{(2)}{T}{}^{\cdots\alpha}_{ij\beta\alpha}$.

En continuant le raisonnement, on obtient une suite de groupes

$$\widetilde{G}^{(1)}_T,\ \widetilde{G}^{(2)}_T,\ \ldots,\ \widetilde{G}^{(s)}_T,\ \ldots$$

et une suite d'e. f. p.

$$\widetilde{E}^{(1)},\ \widetilde{E}^{(2)},\ \ldots,\ \widetilde{E}^{(s)},\ \ldots$$

où l'espace $\widetilde{E}^{(s)}(\widetilde{E}^{(s-1)}, \widetilde{G}^{(s)}_T)$ possède une connexion $\gamma_{(s)}$ définie globalement et dont les composantes de torsion sont des invariants différentiels de cet espace. La dimension du groupe $\widetilde{G}^{(s)}_T$ est $\varrho_s = [n^{s-1}(n+1)/2]\,(p^s + m^s + qn)$ $(s \geq 2)$.

6. G_T-connexions unimodulaires. Le groupe G_T est unimodulaire s'il laisse invariant le volume d'un parallélépipède quelconque à n dimensions, noté dans ce cas par G^u_T; il est formé par l'ensemble des matrices $A \in G_T$ dont $\det A = 1$. Vu que G_T est unimodulaire si et seulement si $\sum \omega^\alpha_\alpha = 0$, le nombre des composantes relatives du repère mobile du groupe G^u_T est $\varrho - 1$.

Supposons qu'il y a une G-structure $E_0(V_n, G^u_T)$ sur V_n. Nous appelons les connexions dont on peut douer E_0, G_T-connexions unimodulaires.

On peut déterminer n formes linéaires ω^α dans l'espace E_0, qui ont localement la forme

$$(14)\qquad \omega^\alpha = a^\alpha_\beta\,\theta^\beta,\quad (a^\alpha_\beta) \in G^u_T.$$

En différentiant extérieurement ces relations on obtient les équations de structure d'une G_T-connexion unimodulaire $\Gamma_{(0)}$:

$$
(15)\qquad
\begin{aligned}
d\omega^1 &= \omega^1_\alpha\wedge\omega^\alpha + \omega^1_j\wedge\omega^j = \frac{1}{2}T^{\cdots 1}_{\alpha\beta}\,\omega^\alpha\wedge\omega^\beta,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
d\omega^{l'} &= \omega^{l'}_\alpha\wedge\omega^\alpha + \omega^{l'}_j\wedge\omega^j = \frac{1}{2}T^{\cdots l'}_{\alpha\beta}\,\omega^\alpha\wedge\omega^\beta,
\end{aligned}
$$

où $\{\omega^1_j, \ldots, \omega^{l'}_j\}$ sont des formes différentielles linéaires indépendantes définies dans l'espace du groupe G^u_T et qui vérifient la relation $\sum \omega^\alpha_\alpha = 0$. La courbure de la connexion $\Gamma_{(0)}$ est nulle.

On peut déduire de la connexion $\Gamma_{(0)}$, dans l'espace E_0, d'autres G_T-connexions si l'on fait la substitution

$$(16)\qquad \bar{\pi}^\alpha_\beta = \omega^\alpha_\beta + \bar{t}^\alpha_{\beta\lambda}\,\omega^\lambda,$$

où $\bar{t}^\alpha_{\beta\lambda}$ sont des fonctions différentiables C^∞ définies dans le voisinage $U \times G^u_T$, symétriques en leurs indices inférieurs et qui satisfont aux conditions $\sum \bar{t}^\alpha_{\alpha\lambda} = 0$, $\bar{t}^{k'}_{ik} = \bar{t}^k_{ik'} = \bar{t}^{k'}_{i'k} = \bar{t}^k_{i'k'} = 0$. Les formes $\bar{\pi}^\alpha_\beta$ satisfont à la relation $\sum \bar{\pi}^\alpha_\alpha = 0$ et aux conditions analogues à celles de la remarque 7.

En complétant les équations (16) par des relations identiques $\bar{\omega}^\alpha = \omega^\alpha$ on obtient les transformations d'un groupe linéaire $\overset{(1)}{G}{}^u_T$ qui a la dimension $\varrho_1 - 1$.

On peut construire sur l'e.f.p. E_0 un e.f.p. $E^{(1)}_0(E_0, \overset{(1)}{G}{}^u_T)$ qui peut être muni d'une connexion $\Gamma_{(1)}$ définie globalement. En continuant le procédé, on construit un ensemble d'e.f.p. $E^{(s)}_0(E^{(s-1)}_0, \overset{(s)}{G}{}^u_T)$ $(s = 1, 2, \ldots)$ chacun étant muni d'une connexion $\Gamma_{(s)}$ respectivement. La dimension du groupe $\overset{(s)}{G}{}^u_T$ est $\varrho_s - 1$.

Remarque 9. En même temps avec la détermination des connexions globales $\gamma_{(s)}$ et $\Gamma_{(s)}$ on obtient, pour chaque s, une infinité de connexions locales mais celles-ci ne sont plus intrinséquement liées aux espaces $E^{(s)}$, respectivement $E^{(s)}_0$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Apreutesei C. — *Sur les connexions généralisées.* An. şt. Univ. Iaşi, Matematică t. XVI (1970), pp. 127–135
2. Apreutesei C. — *Structures transitives.* C. R. de l'Ac. Sc., Paris, (Sous presse)
3. Bernard D — *Sur la géométrie différentielle des G-structures.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 10 (1960), pp. 15[illegible]–270.
4. Chern S.S. — *Pseudogroupes continus infinis.* Colloque Intern. de Strassbourg, 1953 Paris, 1953, pp. 119–141.
5. Eliopoulos H. — *On the connections and the holonomy group of certain G-structures.* Ann. di Mat. pura ed. applicata, t. 78 (1968), pp. 1–12.
6. Legrand G. — *Étude d'une généralisation des structures presque complexes sur les variétés différentielles.* Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, t. 7 (1958), p.p. 323–354.
7. Lichnerowicz A. — *Théorie globale des connexion et des groupes d'holonomie.* Roma (1955).
8. Miron R., Papuc D. — *Sur la théorie locale des distributions définies sur un espace à connexion affine.* Rev. Roum. de Math. pures et appl., t. XII (1967), pp. 537–548.

9. Palais R. — *A global formulation of the Lie theory of transformation groups*. Memoirs of the American Mathematical Society, No. 22, 1957.
10. Slebodzinski W. — *Formes extérieures et leurs applications*, vol. II, Warszawa, 1963.

PROPRIETĂŢI ALE STRUCTURILOR TRANZITIVE

Rezumat

Problema studierii unei perechi de distribuţii (V, M) pe o varietate diferenţiabilă de clasă C^∞, a căror sumă $V + M$ generează distribuţia planelor tangente şi avînd intersecţia netrivială, a fost pusă de autor în [2].

În prezenta Notă se dau exemple de structuri tranzitive şi sînt cuprinse rezultate privind prelungirea acestor structuri fibrate principale asociate, tensorul de structură al unei G_I-structuri (vezi § 2), conexiuni şi grupuri de olonomie.

UNE REMARQUE SUR L'ARTICLE „LES PSEUDOCOMPLEXES DE COCHAÎNES ET LEURS APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES"

PAR

IZU VAISMAN

1. Dans notre article „Les pseudocomplexes de cochaînes et leurs applications géométriques" publié dans ces Annales, T. XIV, 1968, pp. 106—136, nous avons présenté une généralisation des complexes de cochaînes et nous avons donné quelques applications géométriques de celle-ci. Parmi elles se trouve la discussion (§ 2.4 de l'article) d'une situation où intervient une dérivation δ du premier degré, dite spéciale et non dégénérée (pour tous les résultats, notions et notations ci-dessous voir l'article en discussion). À l'égard de cette situation, M-lle E. Vamanu nous a attiré l'attention sur le fait qu'une pareille dérivation a la propriété $\delta^2\lambda = 0$ pour toute forme différentielle λ et pas seulement pour une fonction λ (malgré que la forme compliquée de la seconde condition (57) ne le laissait pas voir), ce qui rend banale la situation mentionnée, car, contrairement à ce qu'on affirme à la page 128 de l'article, (Ω, δ) est un complexe de cochaînes. En lui remerciant, nous montrons ici que les considérations du § 2.4 de notre article précédent gardent leur signification si l'on change convenablement la définition de la notion de dérivation non-dégénérée.

Donnons d'abord une démonstration de la remarque faite (d'une autre manière) par M-lle Vamanu. Soit δ une dérivation spéciale et λ une forme quelconque. En remplaçant dans l'expression locale de λ les dx^i par δx^i, nous obtenons un opérateur χ de degré zéro, agissant sur les formes et il est simple de voir que l'hypothèse $\delta^2 f = 0$ pour toute fonction f implique

$$\delta\lambda = \chi d\lambda \tag{1}$$

Donc, si λ est du type $\lambda = \chi\mu$, nous avons $\delta\lambda = \chi d\mu$, $\delta^2\lambda = 0$.