Si δ est non-dégénérée, χ est évidemment une opération biunivoque, donc toute forme λ est du type précédent et il suit que l'expression générale de δ est

$$\delta = \chi d \chi^{-1} \tag{2}$$

et qu'on a toujours $\delta^2 \lambda = 0$, c.q.f.d. De plus, il résulte immédiatement que δ vérifie aussi le lemme classique de Poincaré.

Maintenant, remarquons que dans le § 2.4 de notre article, la condition que δ soit non-dégénérée intervient seulement dans la démonstration du lemme de la page 129. Mais il est clair (voir l'article) que ce lemme reste ausi valable dans des conditions plus générales, par exemple il suffit d'avoir $\mathrm{Tr}\, \varphi \neq 0$ (φ est le tenseur du type (1,1) qui entre dans la définition de δ). Donc, pour que les conditions du § 2.4 discuté gardent leur intérêt il suffit qu'on définisse les dérivations non-dégénérées par la condition $\mathrm{Tr}\, \varphi \neq 0$ au lieu de $\mathrm{Det}\, \varphi \neq 0$. (De plus la forme correcte de la formule (67) § 2.4 est $\delta \omega_0 \in \mathcal{S}^{q+1}(U)$.)

L'existence des dérivations spéciales δ, telles que $\delta^2 \neq 0$ (en général) et $\mathrm{Tr}\, \varphi \neq 0$ est démontrée par l'exemple suivant: la dérivation δ définie dans l'espace arithmétique à trois dimensions par les conditions

$$\delta x^1 = 0, \quad \delta x^2 = dx^2, \quad \delta x^3 = dx^3,$$

$$\delta(dx^1) = x^1 dx^2 \wedge dx^1 \quad \delta(dx^2) = 0, \quad \delta(dx^3) = 0.$$

2. Nous profitons de cette occasion pour corriger aussi une autre inexactité de l'article en question. Dans les indications sur les Θ-structures complexes à la fin du § 2.2, la formule (18) doit être remplacée par $\bar{\partial} f \wedge \Theta = 0$, et dans l'alinéa qui suit à cette formule, au lieu de „remarquons que la condition (14) garde la même expression" on lira „la condition (14) devient $\omega_{0n} \wedge \Theta = 0$".

O OBSERVAȚIE ASUPPA ARTICOLULUI „PSEUDOCOMPLEXE DE COLANȚURI ȘI APLICAȚIILE LOR GEOMETRICE"

Rezumat

Se precizează condițiile de valabilitate ale unora din rezultatele articolului menționat al autorului.

COMPLEXES DE CÔNES QUADRATIQUES DANS L'ESPACE ÉQUIAFFINE ET EUCLIDIEN A TROIS DIMENSIONS

PAR

D. RIMER

§ 1. Introduction. Nous nommons complexe de cônes quadratiques une variété à trois dimensions, de cônes quadratiques. La géométrie differentielle de ces variétés dans l'espace équiaffine et euclidien à trois dimensions a été étudiée par Gh. Gheorghiev en [4, 5], en partant de l'étude des champs de vecteurs. Dans le cas affine elles constituent un cas d'exception dans le processus de canonisation du repère des champs non-stationnaires de directions.

En [10—15] nous nous sommes occupés des variétés V de cônes quadratiques à un ou deux paramètres en P_3, A_3, E_3 et à trois paramètres en P_3. Dans tous les cas étudiés, nous avons interprété les variétés V de cônes quadratiques des espaces à trois dimensions comme des variétés ponctuelles $\bar{V}$, situées sur une hypersurface de dimension huit d'un espace projectif S_9, à neuf dimensions et nous avons appliqué la méthode du repère mobile de Cartan à la variété ponctuelle $\bar{V}$. Le repère canonique étant déterminé, nous avons trouvé des interprétations géométriques par des considérations faites sur les variétés V et $\bar{V}$ mêmes, ainsi que sur les figures qu'on leur associe de manière naturelle.

En utilisant la même méthode, nous allons faire l'étude différentielle des complexes de cônes quadratiques en A_3 et en E_3.

§ 2. Les complexes V en A_3. Nous utiliserons les indices suivants

$$h \in H = \{1, 2\}; \quad i, j, l \in I = \{1, 2, 3\};$$

$$\alpha, \beta, \lambda, \mu \in \Lambda = \{0, 1, 2, 3\}; \quad \gamma \in \Gamma = \{1, 2, \ldots, 21\}.$$

En rapportant l'espace équiaffine A_3 à un système de coordonnées curvilignes $u = (u^i)_{i \in I}$ on fixe dans chaque point $M(u)$ de l'espace, le sommet d'un trièdre $(M, I_i)_{i \in I}$. Nous considérons ce trièdre comme trièdre fonda-

mental de l'espace A_3, qui sera utilisé pour l'étude différentielle des variétés situées dans A_3. Notons par $\{\omega^i\}_{i\in I}$ et $\{\omega^j_i\}_{i,j\in I}$, les coordonnées des différentielles dM et $\{dI_i\}_{i\in I}$, par rapport à ce repère (ω^i et ω^j_i étant des fonctions linéaires de $\{du^i\}_{i\in I}$). Avec ces notations, les équations de mouvement de ce repère sont

$$(2.1)\qquad \begin{aligned} dM &= \omega^i I_i \\ dI_i &= \omega^l_i I_l \qquad (i, l \in I), \end{aligned}$$

les pfaffiens ω^i et ω^j_i satisfaisant aux équations de structure

$$\begin{aligned} d\omega^i &= [\omega^j, \omega^i_j], \\ d\omega^j_i &= [\omega^l_i, \omega^j_l], \quad (i, j, l \in I). \end{aligned}$$

Considérons aussi, dans l'espace auxiliaire S_9, le repère mobile $(A^{\lambda\mu}, E)$, $\lambda, \mu \in \Lambda$, où $A^{\lambda\mu} = A^{\mu\lambda}$. En notant par $\omega^\lambda_\alpha (\alpha, \lambda \in \Lambda)$, les coordonnées des différentielles dA_α par rapport au repère (A_α, U) de P_3, on obtient [10]:

$$(2.2)\qquad dA^{\lambda\mu} = -\omega^\lambda_\alpha A^{\alpha\mu} - \omega^\mu_\beta A^{\beta\lambda},$$

les pfaffiens ω^β_α satisfaisant aux équations de structure

$$d\omega^\beta_\alpha = [\omega^\lambda_\alpha, \omega^\beta_\lambda].$$

Afin de choisir les repères d'ordre zéro des variétés $\bar{V}$ de S_9, respectivement des variétés V de A_3, nous imposons les conditions suivantes géométriques en A_3: 1) l'origine M est au sommet du cône local C; 2) MI_1, MI_2, ainsi que MU sont situées sur trois des génératrices de ce cône; 3) MI_3 est situé sur la droite d'intersection des plans tangents au cône C suivant MI_1 et MI_2.

Par rapport à cette famille de repères, l'équation du cône local est

$$(2.3)\qquad C \equiv x^1 x^2 - (x^3)^2 = 0,$$

donc la même qu'en [15]. Nous avons obtenu en même temps les repères d'ordre zéro en S_9 et par rapport à eux l'image en S_9 du cône. C'est le point

$$(2.3')\qquad \bar{C} = A^{12} - A^{33}.$$

Toutes les considérations analytiques qui suivent en [15] pour la canonisation du repère, restent valables ici, avec les modifications suivantes déterminées par le fait qu'ici on a le groupe équiaffine: 1) $\omega^0_\alpha = 0$; 2) $\omega^i_0 = \omega^i$; 3) on fixe seulement trois paramètres secondaires, au lieu de sept.

Dans le processus de détermination du repère canonique on exclut les cas

$$\gamma_1 - \alpha_3 = 0 \text{ et } \varepsilon_2 - \beta_3 = 0,$$

où $\{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \varepsilon_i\}_{i\in I}$ sont les coefficients à l'aide desquels on a exprimé les uns des pfaffiens principaux d'ordre zéro, fonctions des pfaffiens $\{\omega^i\}_{i\in I}$ de la variété;

$$\omega^2_1 = \alpha_i \omega^i \text{ *)}, \quad \omega^1_2 = \beta_i \omega^i, \quad 2\omega^3_1 - \omega^2_3 = \gamma_i \omega^i, \quad 2\omega^3_2 - \omega^1_3 = \varepsilon_i \omega^i,$$

$$\omega^1_1 + \omega^2_2 - 2\omega^3_3 = \eta_i \omega^i.$$

De même, après avoir fixé deux des paramètres secondaires (en donnant la valeur zéro à deux coefficients, α_1 et β_2) on remarque qu'aucun des autres coefficients ne peut pas s'annuler, car, alors le repère ne pourrait pas se fixer. En supposant que l'un des coefficients (ε_3) n'est pas zéro, on lui donne la valeur 1 et l'on obtient le repère invariant de la variété $\bar{V}$ ainsi que celui du complexe V. C'est un repère du premier ordre. Il y a douze invariants du premier ordre et neuf du deuxième ordre, notés par $\{k_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, ainsi que trois formes invariantes du premier ordre, $\{\omega^i\}_{i\in I}$.

Nous écrivons alors les formules de type Frenet du complexe V:

$$(2.4)\qquad \begin{aligned} dM &= \omega^i I_i, \\ dI_1 &= [(-k_{9+i} - k_{18+i})\,\omega^i I_1 + k_{i-1}\,\omega^i I_2 + k_{12+i}\,\omega^i I_3], \quad (k_0 = 0), \\ dI_2 &= (k_3\,\omega^1 + k_4\,\omega^3)\, I_1 + k_{18+i}\,\omega^i I_2 + k_{15+i}\,\omega^i I_3, \\ dI_3 &= [(2k_{15+h} - k_{4+h})\,\omega^h + (2k_{18} - 1)\,\omega^3]\, I_1 + (2k_{12+i} - \\ &\qquad - k_{6+i})\,\omega^i I_2 + k_{9+i}\,\omega^i I_3. \end{aligned}$$

Voilà aussi quelques-unes des 66 conditions d'intégrabilité:

$$(2.5)\qquad \begin{aligned} d\omega^1 &= (-k_3 - k_{11} - k_{20})[\omega^1, \omega^2] + (k_4 + k_6 - 2k_{17})\,[\omega^2, \omega^3] + \\ &\qquad + (-k_5 + k_{12} + 2k_{16} + k_{21})[\omega^3, \omega^1], \\ d\omega^2 &= (k_1 - k_{12})[\omega^1, \omega^2] + (k_8 - 2k_{14} + k_{21})[\omega^2, \omega^3] + \\ &\qquad + (-k_2 - k_7 + 2k_{13})\,[\omega^3, \omega^1], \\ d\omega^3 &= (k_{14} - k_{16})[\omega^1, \omega^2] + (-k_{11} + k_{18})[\omega^2, \omega^3] + \\ &\qquad + (k_{10} - k_{15})\,[\omega^3, \omega^1], \end{aligned}$$

*) On utilise la convention d'Einstein de sommation des indices.

$$
(2.5')\qquad
\begin{aligned}
&k_{1,1} + k_1(-k_3 + k_{10} - k_{11} + 2k_{19} - k_{20}) + k_2(k_{11} - k_{18}) - \\
&\qquad - k_7 k_{11} + k_8 k_{13} = 0,\\
&-k_{1,2} + k_{2,2} + k_1(k_4 + k_9 - k_{12} - 2k_{17} - 2k_{21}) + \\
&\qquad + k_2(k_{12} + 2k_{20}) - k_8 k_{15} + k_9 k_{11} = 0,\\
&-k_{2,1} + k_1(-k_5 + k_{12} + 2k_{16} + k_{21}) + k_2(-k_{15} - 2k_{19}) + \\
&\qquad + k_7 k_{15} - k_9 k_{13} = 0,\\
&-k_{19,2} + k_{20,1} + k_1(k_4 + k_{20}) - k_{19}(k_3 + k_{11} + 2k_{20}) + k_{16}(k_8 - k_{21}) - \\
&\qquad - k_{17}(k_7 - 2k_{13}) + k_{14}(k_{21} - 2k_{16}) = 0,\\
&-k_{20,3} + k_{21,2} + k_1(k_4 + k_{19}) + k_{19}(k_6 - 2k_{17}) + (k_{18} - k_{20})(-k_8 + \\
&\qquad + 2k_{14}) + k_{17}(k_9 - 2k_{15}) + k_{21}(-k_{11} + k_{18} + k_{20}) = 0,\\
&k_{19,3} - k_{21,1} + k_2(k_3 - k_{20}) + k_{19}(-k_5 + k_{12} + 2k_{16} + k_{21}) + \\
&\qquad + (k_7 - 2k_{13})(k_{18} - k_{20}) + k_{16}(-k_9 + 2k_{15}) + k_{21}(k_{10} - k_{15}) = 0.
\end{aligned}
$$

Il n'y a pas de conditions d'intégrabilité finies.

Il résulte alors que dans l'espace équaiffine à trois dimensions, un complexe de cônes quadratiques est déterminé, à une transformation équiaffine près, en donnant trois pfaffiens $\{\omega^i\}_{i\in I}$ de trois variables $\{u^j\}_{j\in I}$ et 21 fonctions régulières k_γ $(\gamma \in \Gamma)$ des mêmes variables qui satisfont aux conditions d'intégrabilité.

On obtient des interprétations géométriques de la même manière qu'en [15]. Ainsi $\{\omega^i\}_{i\in I}$ sont les parties principales des coordonnées x^1, x^2, x^3 d'un point M' situé dans le voisinage du premier ordre de l'origine M.

Une autre interprétation de $\{\omega^i\}_{i\in I}$ est donnée par:

$$
(2.6)\qquad \omega^i = |(dM, I_j, I_l)|, \quad (i \neq j \neq l \neq i),
$$

résultat obtenu à l'aide de (2.4). Nous pouvons nommer les deux interprétations de $\{\omega^i\}_{i\in I}$ la signification projective, respectivement équiaffine des formes invariantes $\{\omega^i\}_{i\in I}$.

Si l'on considère les courbes $\{\Gamma_i\}_{i\in I}$ d'équations

$$
(2.7)\qquad (\Gamma_i) \equiv \omega^j = \omega^l = 0 \quad (i \neq j \neq l \neq i),
$$

il résulte, selon (2.4) que les arêtes $\{MI_i\}_{i\in I}$ du repère sont tangentes en M, respectivement aux courbes $\{\Gamma_i\}_{i\in I}$ (les indices de MI_i et Γ_i se correspondent).

Soit Φ la famille linéaire à trois dimensions de quadriques, „tangente" au complexe Γ, l'élément de contact étant le cône C, Φ étant la contre-image en A_3 de la variété linéaire à trois dimensions $\bar{\Phi}$ de S_9, tangente à Γ au point C. Son équation est

$$
(2.8)\qquad \Phi \equiv \lambda_0 C + \sum_1^3 \lambda_i Q_i = 0,
$$

où C est le cône (2.3) et les quadriques de base Q_i ont les équations:

$$
(2.9)\qquad
\begin{cases}
Q_1 \equiv k_2(x^2)^2 - 3k_{10}(x^3)^2 - k_7 x^1 x^3 - k_5 x^2 x^3 = 0,\\
Q_2 \equiv k_1(x^1)^2 - 3k_{11}(x^3)^2 - k_8 x^1 x^3 - k_6 x^2 x^3 = 0,\\
Q_3 \equiv k_2(x^1)^2 + k_4(x^2)^2 - 3k_{12}(x^3)^2 - k_9 x^1 x^3 - x^2 x^3 = 0.
\end{cases}
$$

Les quadriques $\{Q_i\}_{i\in I}$ sont des cônes ayant leurs sommets dans l'origine M. On associe ainsi au complexe Γ d'autres trois complexes de cônes quadratiques, ayant pour cônes locaux les cônes Q_i.

Le cône C coupe les cônes Q_1 et Q_2 suivant MI_1, respectivement MI_2 et deux cubiques. On a ainsi l'interprétation géométrique du repère canonique.

Notons $(F_i) \equiv \lambda_0 C + \lambda_i Q_i = 0$, $i \in I$. Les trois axes du repère sont tangents en M aux quadriques de F_3. Les arêtes MI_2 et MI_3, respectivement MI_1 et MI_3 sont tangentes en M au cône Q_1, respectivement Q_2.

En cherchant les pôles des plans $x^i = 0$ par rapport aux cônes C et Q_i on trouve les droites de pôles suivantes ce qui apporte un nombre d'interprétations à douze invariants $(k_1 - k_{12})$.

(2.10)

	C	Q_1	Q_2	Q_3
$x^1 = 0$	MI_2	$\begin{cases} 2k_5x^2 - k_7x^1 = 0 \\ k_7x^1 + k_5x^2 + 6k_{10}x^3 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} k_8x^1 + k_6x^2 = 0 \\ x^3 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 2k_4x^2 - x^3 = 0 \\ k_9x^1 + x^2 + 6k_{12}x^3 = 0 \end{cases}$
$x^2 = 0$	MI_1	$\begin{cases} k_7x^1 + k_5x^2 = 0 \\ x^3 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 2k_1x^1 - k_8x^3 = 0 \\ k_8x^1 + k_6x^2 + 6k_{11}x^3 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 2k_2x^1 - k_9x^3 = 0 \\ k_9x^1 + x^2 + 6k_{12}x^3 = 0 \end{cases}$
$x^3 = 0$	MI_3	MI_1	MI_2	$\begin{cases} 2k_2x^1 - k_9x^3 = 0 \\ 2k_4x^2 - x^3 = 0 \end{cases}$

Vu que MI_1 et MI_2 sont situés sur les cônes Q_1 respectivement Q_2, il résulte que le plan $x^1 = 0$ est tangent aux cônes Q_1 et Q_2 le long de MI_1, respectivement MI_2.

En utilisant les notions de parallélisme Myller et déviation du parallélisme Myller, avec les significations données par Gh. Gheorghiev en [5], on trouve que les directions I_1 et I_2 sont parallèles au sens Myller par rapport à I_3 à un déplacement du point M le long de la courbe Γ_1, respectivement Γ_2. En notant par

$$
\varrho^i_{jl} = \left(I_j, \frac{\partial I_j}{\omega^i}, I_l\right), \quad (i, j, l \in I;\ j \neq l),
$$

la déviation du parallélisme Myller de l'arête I_j par rapport à I_i, à un déplacement du point M le long de Γ_i, on obtient, avec (2.4), des interprétations pour 15 invariants ($k_1 - k_9$; $k_{13} - k_{18}$) :

$$
(2.11)\qquad
\begin{array}{llll}
k_1 = \rho^2_{13}, & k_5 = 2\rho^1_{21} - \rho^1_{32}, & k_9 = \rho^3_{31} - 2\rho^3_{12}, & k_{16} = \rho^1_{21}, \\
k_2 = \rho^3_{13}, & k_6 = 2\rho^2_{21} - \rho^2_{32}, & k_{13} = -\rho^1_{12}, & k_{17} = \rho^2_{21}, \\
k_3 = -\rho^1_{23}, & k_7 = \rho^1_{31} - 2\rho^1_{21}, & k_{14} = -\rho^2_{12}, & k_{18} = \rho^3_{21}. \\
k_4 = -\rho^3_{23}, & k_8 = \rho^2_{31} - 2\rho^2_{12}, & k_{15} = -\rho^3_{12}, &
\end{array}
$$

Parce que I_1 et $\partial I_1/\omega^1$, c'est-à-dire (I_1, I_3), déterminent le plan osculateur de la courbe Γ_1, ce plan étant aussi tangent à C le long de MI_1, il résulte que Γ_1 est une ligne asymptotique du complexe V et I_1 est une direction asymptotique sur V. Une conclusion analogue peut être établie pour Γ_2 et I_2.

Le plan (I_1, I_3) étant tangent au complexe V au point M, on peut considérer I_2 pour normale affine à V. De $\rho^1_{12} = -k_{13}$ et $\rho^1_{21} = k_{16}$, il résulte que $-k_{13}$ et k_{16} sont la courbure géodésique (M), respectivement la torsion géodésique (M), de la courbe Γ_1 ; pour $k_{13} = 0$ ou $k_{16} = 0$, Γ_1 sont des lignes géodésiques, respectivement lignes de courbure de deuxième espèce sur V [5]. De la même manière on peut donner des interprétations aux autres invariants des formules (2.11).

Cherchons la classe des variétés V pour lesquelles les unes des courbes Γ_i sont des droites. Pour cela il faudrait que la tangente à la courbe Γ_i, respective dans chacun de ses points soit stationnaire, c'est-à-dire que $\partial^2 M/(\omega^i)^2 = \rho\, \partial M/\omega^i$. Avec (2.4), on obtient les conditions :

$$
(2.12)\qquad
\begin{array}{l}
k_{13} = 0, \text{ pour } i = 1, \\
k_{17} = 0, \text{ pour } i = 2, \\
2k_{18} - 1 = 0 \text{ et } 2k_{15} - k_9 = 0, \text{ pour } i = 3.
\end{array}
$$

Les surfaces réglées (Γ_i, I_i) sont développables. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que les réglées (Γ_i, I_j), avec $i, j \in I$, $i \neq j$, soient développables sont comprises dans le tableau suivant :

(2.13)

	I_1	I_2	I_3
Γ_1	—	$k_{16} = 0$	$k_7 - 2k_{13} = 0$
Γ_2	$k_{14} = 0$	—	$k_6 - 2k_{17} = 0$
Γ_3	$k_2 = 0$	$k_1 = 0$	—

De la même manière qu'en [15], nous associons au complexe V les variétés non holonomes linéaires V^2_{3l}, d'équations $\omega^i = 0$. Les conditions qu'elles soient holonomes, obtenues par les relations $(d\omega^i = 0) \bmod \omega^i$ sont :

$$
(2.14)\qquad
\begin{array}{ll}
k_4 + k_6 - 2k_{17} = 0, & \text{pour } i = 1, \\
k_2 + k_7 - 2k_{13} = 0, & \text{pour } i = 2, \\
k_{14} - k_{16} = 0 & \text{pour } i = 3.
\end{array}
$$

Observons — de (2.13) et (2.14) — que si deux réglées (Γ_i, I_j) et (Γ_j, I_i), avec $i \neq j$, sont développables, alors la variété V^2_{3l}, d'équation $\omega^l = 0$ $(i \neq l \neq j)$, est holonome. La réciproque n'est pas vraie.

§ 3. **Les complexes V en E_3.** Reprenons les considérations que nous avons faites en [14]. Alors, on a dans l'espace E_3 le groupe fondamental G_6 et le rèpere mobile $(M, I_j)_{j \in I}$, avec $I_j^2 = 1$ et $I_j I_i = 0$ $(j, i \in I)$. Les équations de mouvement de ce repère sont

$$
(*)\qquad dM = \omega^j I_j, \quad dI_j = \Omega \times I_j
$$

où $\Omega = pI_1 + qI_2 + rI_3$, $p = \omega^3_2$, $q = \omega^1_3$, $r = \omega^2_1$.
De même les équations de structure sont

$$
(**)\qquad
\begin{array}{l}
d\omega^1 = [r, \omega^2] - [q, \omega^3], \text{ etc.} \\
dp = [r, q], \text{ etc.}
\end{array}
$$

L'espace projectif associé, S_9, a pour groupe fondamental, la réalisation de G_6 comme groupe de transformations sur les quadriques. Parce que le nombre des paramètres du groupe est $r = 6$ et la dimension de l'espace auxiliaire est $n = 9$, on a $r < n$ et alors la réalisation de G_6 en S_9 est intransitive ce qui conduira à déterminer les domaines de transitivité.

Rapportons l'espace S_9 au repère $(A^{\alpha\beta}, E)$, avec les équations de mouvement (2.2) dans lesquelles on a : $\omega^0_\alpha = 0$, $\omega^l_0 = \omega^l$ et de plus, $\omega^i_j + \omega^j_i = 0$.

Par les mêmes considérations géométriques que nous avons faites en [14], nous déterminons le repère canonique du complexe V : c'est à dire, quand l'origine du repère coïncide avec le sommet du cône local C et les verseurs $(I_j)_{j \in I}$ ont la direction des axes du cône, le verseur I_3 étant situé sur l'axe intérieur du cône.

L'équation locale du cône C rapporté à ce repère est alors

$$
(3.1)\qquad C \equiv \alpha_h (x^h)^2 - (x^3)^2 = 0, \quad h \in H.
$$

Si $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, ou $\alpha_1 = \pm 1$ ou $\alpha_2 = \pm 1$, C est un cône de rotation et ce cas sera considéré dans le § 4.

Si $\alpha_1 = 0$, ou $\alpha_2 = 0$, C est une paire de plans. Ce cas ne fera pas l'objet de notre recherche.

Le cas générique réel, dont nous nous occuperons dans ce paragraphe correspond aux conditions :

$$0 < \alpha_h \neq 1, \quad \alpha_1 \neq \alpha_2.$$

Chaque couple de valeurs $\{\alpha_h\}_{h \in H}$ détermine un cône C_0; sous l'action des transformations de G_6, on obtient la famille des cônes équivalents à C_0, donc un domaine de transitivité, θ. Le complexe V est formé de ces domaines de transitivité. Lorsque le couple (α_1, α_2) parcourt $R^+ \times R^+$, on obtient la famille des domaines de transitivité. On a donc une application bijective $\varphi : R^+ \times R^+ \to \Theta$, où Θ est la famille des domaines de transitivité θ.

Par la correspondance connue, on a, en S_9, le point:

$$\bar{C} = \alpha_1 A^{11} + \alpha_2 A^{22} - A^{33}. \tag{3.2}$$

A chaque domaine de transitivité θ correspond en S_9 une portion simplement connexe de variété à trois dimensions et l'image du complexe V est la réunion de ces portions de variétés. Nous notons $\Gamma = f(V)$.

Le repère canonique étant fixé de manière géométrique, pour écrire les formules de Frenet, on considère $\{\omega^i\}_{i \in I}$ comme les pfaffiens du complexe V et on a: $p = p_i \omega^i$, $q = q_i \omega^i$, $r = r_i \omega^i$ $(i \in I)$, où p_i, q_i, r_i sont neuf fonctions régulières de $(u^i)_{i \in I}$. On peut donner alors les formules de Frenet du complexe:

$$\begin{aligned} dM &= \omega^i I_i, \\ dI_1 &= \qquad r_i \omega^i I_2 - q_i \omega^i I_3, \\ dI_2 &= -r_i \omega^i I_1 \quad + p_i \omega^i I_3, \\ dI_3 &= q_i \omega^i I_1 - p_i \omega^i I_2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Avec les équations de structure (**) et la notation

$$m = p_1 + q_2 + r_3 \tag{3.4}$$

on obtient les conditions d'intégrabilité:

(3.5)

	$[\omega^1, \omega^2]$	$[\omega^2, \omega^3]$	$[\omega^3, \omega^1]$
$d\omega^1$	r_1	$-(m - p_1)$	$-q_1$
$d\omega^2$	r_2	p_2	$m - q_2$
$d\omega^3$	$-(m - r_3)$	p_3	$-q_3$

$$p_{2,1} - p_{1,2} + \sum_{i=1}^{3} p_i r_i - mp_3 - q_1 r_2 + q_2 r_1 = 0,$$

$$p_{3,2} - p_{2,3} + \sum_{i=1}^{3} p_i^2 - mp_1 - q_2 r_3 + q_3 r_2 = 0, \tag{3.5'}$$

$$p_{1,3} - p_{3,1} + \sum_{i=1}^{3} p_i q_i \quad mp_2 - q_3 r_1 + q_1 r_3 = 0$$

et autres six relations analogues pour $q_{j,i}$ et $r_{j,i}$.

Le problème de l'existence et de l'unicité du complexe Γ de cônes quadratiques à un mouvement près est résolu.

Cherchons quelques interprétations géométriques.

En sectionnant le cône C par les plans $x^2 = 0$, respectivement $x^1 = 0$, on obtient deux couples de droites d_1, d'_1, respectivement d_2, d'_2, d'équations:

$$x^3 \pm \sqrt{\alpha_1}\, x^1 = 0, \quad x^2 = 0, \tag{3.6}$$

$$x^3 \pm \sqrt{\alpha_2}\, x^2 = 0, \quad x^1 = 0. \tag{3.7}$$

On a ainsi une interprétation géométrique des invariants d'ordre zéro $\{\alpha_h\}_{h \in H}$. Les droites (3.6) et (3.7) seront nommées les *traces* du domaine de transitivité θ sur les plans $x^2 = 0$ et $x^1 = 0$.

On trouvera des interprétations géométriques des invariants du premier ordre, en considérant le voisinage du premier ordre du point $\bar{C} \in \Gamma$ et donc, du cône C, la variété linéaire Φ à trois dimensions, „tangente" à la variété ponctuelle Γ au point C et la famille linéaire de quadriques, $\Phi = f^{-1}(\Phi)$, que nous nommerons „tangente" au complexe Γ au cône C. Son équation est

$$\Phi = \lambda_0 C + \sum_{1}^{3} \lambda_i Q_i = 0, \tag{3.8}$$

où $Q_i = f^{-1}(Q_i) = f^{-1}\begin{pmatrix} \partial C \\ \omega^i \end{pmatrix}$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} Q_1 = \alpha_{1,1}(x^1)^2 + \alpha_{2,1}(x^2)^2 + 2\tilde{r}_1 x^1 x^2 - 2\tilde{q}_1 x^1 x^3 + 2\tilde{p}_1 x^2 x^3 - 2\alpha_1 x^1 = 0, \\ Q_2 = \alpha_{1,2}(x^1)^2 + \alpha_{2,2}(x^2)^2 + 2\tilde{r}_2 x^1 x^2 - 2\tilde{q}_2 x^1 x^3 + 2\tilde{p}_2 x^2 x^3 - 2\alpha_2 x^2 = 0, \\ Q_3 = \alpha_{1,3}(x^1)^2 + \alpha_{2,3}(x^2)^2 + 2\tilde{r}_3 x^1 x^2 - 2\tilde{q}_3 x^1 x^3 + 2\tilde{p}_3 x^2 x^3 + 2x^3 = 0, \end{cases} \tag{3.8'}$$

avec les notations:

$$\tilde{p}_i = (1 + \alpha_2) p_i, \quad \tilde{q}_i = (1 + \alpha_1) q_i, \quad \tilde{r}_i = (\alpha_1 - \alpha_2) r_i. \tag{3.8''}$$

On observe que les équations des trois quadriques Q_i sont très semblables outre le terme linéaire.

Les discriminants des quadriques Q_i étant $\Delta_1 = \alpha_1^2 \tilde{p}_1^2$, $\Delta_2 = \alpha_2^2 \tilde{q}_2^2$, $\Delta_3 = \tilde{r}_3^2 - \alpha_{1,3}\alpha_{2,3}$, il résulte que, si $\Delta_i \neq 0$, Q_i sont des quadriques non dégénérées.

En notant leur invariant cubique par δ_i, on a

$$\delta_i = -(\alpha_{1,i}\tilde{p}_i^2 + \alpha_{2,i}\tilde{q}_i^2 + 2\tilde{p}_i \tilde{q}_i \tilde{r}_i).$$

Si $\delta_i \neq 0$, Q_i sont des hyperboloïdes à une nappe, dont les centres sont:

$$
(3.9)\qquad
\begin{aligned}
i=1&:\left(-\frac{\alpha_1\tilde{p}_1^2}{\delta_1},\ \frac{\alpha_1\tilde{p}_1\tilde{q}_1}{\delta_1},\ \frac{\alpha_1(\tilde{p}_1\tilde{r}_1+\alpha_{2,1}\tilde{q}_1)}{\delta_1}\right),\\
i=2&:\left(-\frac{\alpha_2\tilde{p}_2\tilde{q}_2}{\delta_2},\ -\frac{\alpha_2\tilde{q}_2^2}{\delta_2},\ -\frac{\alpha_2(\tilde{q}_2\tilde{r}_2+\alpha_{1,2}\tilde{p}_2)}{\delta_2}\right),\\
i=3&:\left(-\frac{\tilde{p}_3\tilde{r}_3+\alpha_{2,3}\tilde{q}_3}{\delta_3},\ \frac{\tilde{q}_3\tilde{r}_3+\alpha_{1,3}\tilde{r}_3}{\delta_3},\ \frac{\tilde{r}_3^2-\alpha_{1,3}\alpha_{2,3}}{\delta_3}\right).
\end{aligned}
$$

Les pôles ou les droites de pôles des plans $x^i=0$, $i\in I$ par rapport aux quadriques $\{Q_i\}_{i\in I}$, $i\neq j$, sont les suivants:

$$
(3.10)\qquad
\begin{array}{l|l}
(x^1=0) & Q_2:\ MI_3:\ Q_3:\left(\dfrac{\alpha_{2,3}}{\tilde{p}_3\tilde{r}_3+\alpha_{2,3}\tilde{q}_3},\ \dfrac{-\tilde{r}_3}{\tilde{p}_3\tilde{r}_3+\alpha_{2,3}\tilde{q}_3},\ 0\right)\\
\hline
(x^2=0) & Q_1:\ MI_3:\ Q_3:\left(\dfrac{\tilde{r}_3}{\tilde{q}_3\tilde{r}_3+\alpha_{1,3}\tilde{p}_3},\ \dfrac{-\alpha_{1,3}}{\tilde{q}_3\tilde{r}_3+\alpha_{1,3}\tilde{p}_3},\ 0\right)\\
\hline
(x^3=0) & \begin{array}{l}
Q_1:\left(0,\ \dfrac{\alpha_1\tilde{p}_1}{\tilde{p}_1\tilde{r}_1+\alpha_{2,1}\tilde{q}_1},\ \dfrac{-\alpha_1\alpha_{2,1}}{\tilde{p}_1\tilde{r}_1+\alpha_{2,1}\tilde{q}_1}\right);\\
Q_2:\left(\dfrac{\alpha_2\tilde{q}_2}{\tilde{q}_2\tilde{r}_2+\alpha_{1,2}\tilde{p}_2},\ 0,\ \dfrac{\alpha_2\alpha_{1,2}}{\tilde{q}_2\tilde{r}_2+\alpha_{1,2}\tilde{p}_2}\right).
\end{array}
\end{array}
$$

Les quadriques Q_i sont tangentes en M aux plans $x^i=0$ (les indices se correspondent). Il résulte alors que $\{Q_i\}_{i\in I}$ forment un système triple orthogonal de surfaces. Les plans tangents $(x^i=0)$ coupent les quadriques Q_i suivant les couples de droites:

$$
(3.11)\qquad
\begin{aligned}
i=1&:\ MI_3 \text{ et } \alpha_{2,1}x^2+2\tilde{p}_1x^3=x^1=0,\\
i=2&:\ MI_3 \text{ et } \alpha_{1,2}x^1-2\tilde{q}_2x^3=x^2=0,\\
i=3&:\ \alpha_{1,3}(x^1)^2+2\tilde{r}_3x^1x^2+\alpha_{2,3}(x^2)^2=0.
\end{aligned}
$$

Ces relations fournissent d'autres interprétations géométriques des invariants $\tilde{p}_1$, $\tilde{q}_2$, $\tilde{r}_3$.

Si $\tilde{p}_1=\tilde{q}_2=\tilde{r}_3^2-\alpha_{1,3}\alpha_{2,3}=0$, alors les invariants biquadratiques ($\Delta_1=\alpha_1^2\tilde{p}_1^2$, $\Delta_2=\alpha_2^2\tilde{q}_2^2$, $\Delta_3=\tilde{r}_3^2-\alpha_{1,3}\alpha_{2,3}$) des quadriques Q_i s'annulent et Q_i deviennent des cônes quadratiques dont les sommets sont les points $(0,0,1/\tilde{q}_1)$, $(0,0,1/\tilde{p}_2)$, $((-\tilde{p}_3\tilde{r}_3-\alpha_{2,3}\tilde{q}_3)/\delta_3,\ (\tilde{q}_3\tilde{r}_3+\alpha_{1,3}\tilde{p}_3)/\delta_3,\ 0)$.

On voit aussi que I_3 définit une direction asymptotique pour Q_3, MI_1 est tangent à Q_2 et à Q_3 au point M et MI_2 est tangent à Q_1 et à Q_3 au point M. Les axes MI_h coupent les quadriques Q_h (les indices se correspondent) aux points ayant $x^h=2\alpha_h/\alpha_{h,h}$.

En voici les droites polairement conjuguées aux axes I_l $(l\in I)$ par rapport aux quadriques Q_i $(i\in I)$.

$$
(3.12)\qquad
\begin{array}{c|c|c|c|c}
I_l & Q_i & Q_1 & Q_2 & Q_3\\
\hline
I_1 & & \begin{array}{l}x^1=0\\ \tilde{r}_1x^2-\tilde{q}_1x^3-\alpha_1=0\end{array} & \begin{array}{l}x^2=0\\ \alpha_{1,2}x^1-\tilde{q}_2x^3=0\end{array} & \begin{array}{l}x^3=0\\ \alpha_{1,3}x^1+\tilde{r}_3x^2=0\end{array}\\
\hline
I_2 & & \begin{array}{l}x^1=0\\ \alpha_{2,1}x^2+\tilde{p}_1x^3=0\end{array} & \begin{array}{l}x^2=0\\ \tilde{r}_2x^1+\tilde{p}_2x^3-\alpha_2=0\end{array} & \begin{array}{l}x^3=0\\ \alpha_{2,3}x^2+\tilde{r}_3x^1=0\end{array}\\
\hline
I_3 & & I_3 & I_3 & \begin{array}{l}x^3=0\\ \tilde{q}_3x^1-\tilde{p}_3x_2-1=0\end{array}
\end{array}
$$

Ce sont des droites situées dans l'un des plans $x^i=0$.

Des neuf surfaces réglées $\{\Gamma_i, I_l\}_{l,i\in I}$, trois $\{\Gamma_i, I_i\}$ (les indices se correspondent) sont développables. Les conditions afin que les autres six soient aussi développables sont:

$$
(3.13)\qquad
\begin{aligned}
\tilde{p}_1&=0\quad(\Gamma_1, I_2)\quad\text{et}\quad(\Gamma_1, I_3),\\
\tilde{q}_2&=0\quad(\Gamma_2, I_1)\quad\text{et}\quad(\Gamma_2, I_3),\\
\tilde{r}_3&=0\quad(\Gamma_3, I_1)\quad\text{et}\quad(\Gamma_3, I_2).
\end{aligned}
$$

Les vecteurs unité I_j forment trois champs de vecteurs. Beaucoup de résultats établis dans leur étude [3] peuvent être utilisés ici. En voici un exemple.

Nous nous posons le problème de déterminer les conditions pour que le trièdre canonique du complexe V coïncide avec le trièdre Frenet de l'une des courbes Γ_i et, en ce cas, d'exprimer les invariants de la courbe à l'aide des invariants du complexe V. Des formules (3.3) il résulte:

(3.14)

Γ_i	la condition	la courbure de Γ_i	la torsion de Γ_i
Γ_1	$q_1=0$	r_1	p_1
Γ_2	$r_2=0$	p_2	q_2
Γ_3	$p_3=0$	q_3	r_3

Mais, en [3] on donne des interprétations géométriques aux invariants p_i, q_i, r_i, en liaison avec les lignes vectorielles des champs I_i, lignes considérées sur les surfaces réglées ayant I_i pour génératrices et I_{i+1} pour normales ($I_4 = I_1$).

(3.15)

la génératrice de la surface	la normale de la surface	la courbure géodesique de la ligne Γ_i	la courbure normale de la ligne Γ_i	la torsion géodésique de la ligne Γ_i
I_1	I_2	q_1	r_1	p_1
I_2	I_3	r_2	p_2	q_2
I_3	I_4	p_3	q_3	r_3

De (3.14) et (3.15) il résulte: la condition nécessaire et suffisante pour que le repère canonique du complexe Γ coïncide avec le repère Frenet de l'une des courbes Γ_i est que cette courbe soit une ligne géodésique sur la surface réglée ayant I_i pour génératrice et I_{i+1} pour normale. Cette condition étant remplie, la courbure normale et le torsion géodésique de la courbe Γ_i sont la courbure et la torsion de Γ_i.

§ 4. **Les complexes Γ_1 de cônes de rotation en E_3.** Si l'élément générique du complexe est un cône de rotation, nous aurons un cas d'exception, qui a été signalé plus haut et dont l'étude sera entreprise dans ce paragraphe. Notons par Γ_1 un tel complexe et par C_1 le cône générateur. Analytiquement, la condition pour que le cône C_1 soit de rotation peut être obtenue en prenant en (3.1) $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/\alpha$; l'équation locale du cône est alors;

$$C_1 = (x^1)^2 + (x^2)^2 - \alpha(x^3)^2 = 0, \tag{4.1}$$

et son image en S_9 est le point

$$\bar{C}_1 = A^{11} + A^{22} - A^{33}. \tag{4.2}$$

Nous considérons seulement $\alpha > 0$, parce que $\alpha = 0$ nous conduit à un couple de plans isotropes et $\alpha < 0$ à un cône isotrope et nous renonçons à l'étude des complexes ayant ceux-ci pour éléments génériques.

Les conditions géométriques qui nous ont conduit au repere canonique dans le cas des cônes quadratiques quelconques du paragraphe précédent ne sont plus suffisantes dans le cas du complexe Γ_1 parce que le cône de rotation n'a pas un triplet unique d'axes de symétrie. En prenant l'origine du repère au sommet du cône C_1 et I_3 parallèlement à l'axe de rotation de ce cône, le repère n'est pas encore fixé: il peut tourner autour de MI_3. Le groupe de stabilité du cône C_1 a dans ce cas un paramètre. Si δ est un déplacement dans la famille des repères d'ordre zéro, on aura:

$$\delta M = 0, \quad \delta I_1 = \pi_1^2 I_2, \quad \delta I_2 = \pi_2^1 I_1 = -\pi_1^2 I_2, \quad \delta I_3 = 0.$$

En considérant $[\omega^1, \omega^2, \omega^3] \neq 0$ on peut écrire

$$\omega_3^i = k_i \omega^i, \quad \omega_3^2 = k_{3+i} \omega^i, \quad i \in I.$$

Nous avons introduit six coefficients, fonctions d'un paramètre secondaire d'ordre zéro.

Après les calculs usuels, on obtient:

$$\begin{aligned}
&\delta k_1 + (-k_2 + k_4)\,\pi_1^2 = 0,\\
&\delta k_2 + (k_1 + k_5)\,\pi_1^2 = 0,\\
&\delta k_3 + k_6\,\pi_1^2 = 0,\\
&\delta k_4 - (k_1 + k_5)\,\pi_1^2 = 0,\\
&\delta k_5 + (-k_2 + k_4)\,\pi_1^2 = 0,\\
&\delta k_6 - k_3\,\pi_1^2 = 0.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

D'ici, il résulte:

$$\delta(k_1 + k_4) = 0, \quad \delta(k_2 - k_4) = 0, \quad \delta(k_3^2 + k_6^2) = 0, \quad \delta(k_1^2 + k_2^2 + k_4^2 + k_5^2) = 0.$$

Il suit que pour les complexes qui satisfont aux conditions;

$$k_3^2 + k_6^2 = 0, \quad k_1^2 + k_2^2 + k_4^2 + k_5^2 = 0, \quad k_1 + k_5 = 0, \quad k_2 - k_4 = 0,$$

ou seulement aux premières deux de ces conditions (car les autres deux en résultent immédiatement), le repère ne peut pas être fixé; ces variétés admettent un groupe d'automorphismes à un paramètre. L'étude de ces complexes sera exclue de cette recherche et nous nous occuperons seulement du cas générique. Soit $k_3^2 + k_6^2 \neq 0$; alors, en supposant $k_3 \neq 0$, prenons $k_6 = 0$; on obtient $\pi_1^2 = 0$ et le repère est fixé. C'est un repère du premier ordre. Les cinq coefficients qui n'ont pas reçu des valeurs sont les invariants du premier ordre du complexe Γ. Notons, $k_i = q_i$, $k_{3+k} = -p_k$ et le pfaffien principal du premier ordre, $\omega_1^2 = r_i \omega^i$. Les trois fonctions $\{r_i\}_{i \in I}$ sont les invariants du second ordre du complexe Γ.

Maintenant nous pouvons écrire les formules de Frenet du complexe Γ_1.

$$\begin{cases}
dM = \omega^i I_i,\\
dI_1 = r_i \omega^i I_2 - q_i \omega^i I_3,\\
dI_2 = -r_i \omega^i I_1 + p_k \omega^k I_3,\\
dI_3 = q_i \omega^i I_1 - p_k \omega^k I_2.
\end{cases} \tag{4.4}$$

Il résulte l'existence et l'unicité du complexe V_1 — à une transformation orthogonale près — si l'on donne trois formes de Pfaff $\{\omega^i\}_{i\in I}$ à trois variables $\{u^j\}$ et huit fonctions régulières des mêmes variables.

Les conditions d'intégrabilité seront:

$$
\begin{aligned}
&d\omega^1 = r_1[\omega^1, \omega^2] - r_3[\omega^2, \omega^3],\\
&d\omega^2 = r_2[\omega^1, \omega^2] - r_3[\omega^2, \omega^1],\\
&d\omega^3 = 0,\\
&p_{1,2} - p_{2,1} + r_1(q_2 - p_1) - r_2(q_1 + p_2) = 0,\\
&p_{1,3} \qquad - r_3(q_1 + p_2) + q_3 r_1 \qquad = 0,\\
&p_{2,3} \qquad - r_3(q_2 - p_1) + q_3 r_2 \qquad = 0,\\
&q_{1,2} - q_{2,1} - r_1(q_1 + p_2) - r_2(q_2 - p_1) = 0,\\
&q_{2,3} - q_{3,2} + r_3(q_1 + p_2) \qquad = 0,\\
&q_{3,1} - q_{1,3} - r_3(q_2 - p_1) \qquad = 0,\\
&r_{1,2} - r_{2,1} - (r_1^2 + r_2^2) + q_1 p_2 - q_2 p_1 = 0.\\
&r_{2,3} - r_{3,2} - q_3 p_2 + r_1 r_3 \qquad = 0,\\
&r_{3,1} - r_{1,3} + q_3 p_1 + r_2 r_3 \qquad = 0.
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

En voici quelques-unes des interprétations géométriques du repère et des invariants. Si l'on coupe le cône C_1 par le plan $x^3 = 1$, on obtient un cercle de centre $(0, 0, 1)$ et de rayon $\sqrt{\alpha}$.

De la même manière que dans le cas des complexes génériques V en E_3, on peut remarquer que chaque valeur $\alpha > 0$ détermine un cône C_1; la famille des cônes équivalents à C_1 par rapport au groupe G_6 est un domaine de transitivité θ. Le complexe V_1 est formé de ces domaines de transitivité.

En coupant un cône C_1 par les plans $x^1 = 0$, $x^2 = 0$, on obtient respectivement deux couples de droites

$$x^1 = 0, \quad x^2 = \pm\sqrt{\alpha}\, x^3, \tag{4.6}$$

$$x^2 = 0, \quad x^1 = \pm\sqrt{\alpha}\, x^3, \tag{4.6'}$$

que nous allons nommer les *traces* du domaine θ sur les plans $x^1 = 0$, $x^2 = 0$. Nous avons ainsi une autre interprétation pour l'invariant α, d'ordre 0.

On peut donner à $\{\omega^i\}_{i\in I}$ une interprétation analogue à celle donnée dans le cas projectif:

$$\omega^i \approx x^i, \quad i \in I, \tag{4.7}$$

où $\{x^i\}$ sont les coordonnées d'un point M', voisin à M. De la même manière que dans le cas affine, on a aussi:

$$\omega^i = [dM, I_j, I_l], \quad i \neq j \neq l \neq i, \tag{4.8}$$

c'est-à-dire que ω^i est le volume du parallélipipède construit sur les vecteurs dM, I_j, I_l $(i \neq j \neq l \neq i)$.

Considérons maintenant les courbes $\{\Gamma_i\}_{i\in I}$ d'équations $\omega^j = \omega^l = 0$ $(i \neq j \neq l \neq i)$. Des formules (4.4) il résulte que chaque courbe Γ_i est tangente à l'axe I_i du repère (les indices se correspondent).

Si l'on détermine la variété linéaire à trois dimensions tangente à la variété $\bar{V}$ de S_9, sa contreimage en E_3 est la famille linéaire à trois dimensions de quadriques, Φ, nommée „tangente" au complexe V_1. Son équation est:

$$
\begin{aligned}
\Phi = \lambda_0[(x^1)^2 + (x^2)^2 - \alpha(x^3)^2] + \sum_{h=1}^{2} \lambda_h[\alpha_{,h}(x^3)^2 + 2\tilde{q}_h x^1 x^3 -\\
- 2\tilde{p}_h x^2 x^3 + 2x^h] + \lambda_3[\alpha_{,3}(x^3)^2 + 2q_3 x^1 x^3 - 2\alpha x^3] = 0,
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

où $\tilde{p}_i = (1 + \alpha)p_i$ et $\tilde{q}_i = (1 + \alpha)q_i$.

En notant $Q_i = \partial C/\omega^i$, alors Q_i sont les quadriques de base de la famille Φ et l'équation (4.9) devient:

$$\Phi = \lambda_0 C_1 + \sum_1^3 \lambda_i Q_i = 0. \tag{4.9'}$$

L'axe MI_3 du repère est l'axe de rotation du cône. Les sections du plan $x^3 = 0$ orthogonal à MI_3 avec les quadriques $\{Q_h\}_{h\in H}$ sont les couples de droites:

$h = 1$: l'axe MI_2 et la droite à l'infini (Δ) du plan $x^3 = 0$,

$h = 2$: l'axe MI_1 et la même droite (Δ).

Observons [12, 14] que l'axe MI_2 est l'une des droites d'intersection du plan $x^1 = 0$ avec les quadriques $\partial C/\omega$, respectivement $\partial C/\omega^1$, au cas des variétés de cônes de rotation à un, respectivement deux paramètres.

En ce qui concerne les quadriques Q_i notons que $\{Q_h\}_{h\in H}$ sont les paraboloïdes hyperboliques et Q_3 est une couple de plans. En faisant respectivement les transformations:

$$h = 1: X = x, \quad Y = -\tilde{q}_1 x + \tilde{p}_1 y, \quad Z = \frac{\tilde{q}_1}{\alpha_{,1}} x - \frac{\tilde{p}_1}{\alpha_{,1}} y + z,$$

$$h = 2: X = \tilde{q}_2 x - \tilde{p}_2 y, \quad Y = y, \quad Z = \frac{\tilde{q}_2}{\alpha_{,2}} x - \frac{\tilde{p}_2}{\alpha_{,2}} y + z,$$

les équations des paraboloïdes Q_h deviennent:

$$
(4.10)\qquad
\begin{aligned}
Q_1 &: \frac{Y^2}{\alpha_{,1}} - \frac{Z^2}{\dfrac{1}{\alpha_{,1}}} - 2X = 0,\\
Q_2 &: \frac{X^2}{\alpha_{,2}} - \frac{Z^2}{\dfrac{1}{\alpha_{,2}}} - 2Y = 0.
\end{aligned}
$$

Les plans $x^h = 0$ sont tangents en M aux quadriques Q_h (les indices se correspondent).

Soit V_1' la sous-famille de V_1 formée des cônes ayant leurs sommets le long de $\Gamma_1(\omega^2 = \omega^3 = 0)$. L'enveloppe de V_1' est engendrée par la courbe caractéristique donnée par C_1 et $Q_1 = \partial C_1/\omega^1$.

En coupant le cône C_1 par un plan $x^3 = \lambda$, $\lambda \in R$, on obtient un cercle de rayon $R = \lambda\sqrt{\alpha}$. Les équations paramétriques de ce cercle étant $x^1 = \lambda\sqrt{\alpha}\cos\psi$, $x^2 = \lambda\sqrt{\alpha}\sin\psi$, $x^3 = \lambda$, les équations paramétriques du cône C_1 sont

$$
(4.11)\qquad
\begin{aligned}
x^1 &= \lambda\sqrt{\alpha}\cos\psi,\\
x^2 &= \lambda\sqrt{\alpha}\sin\psi,\\
x^3 &= \lambda.
\end{aligned}
$$

Les points de C_1 qui appartiennent à Q_1 forment la courbe caractéristique Γ'. Avec (4.11) l'équation de Q_1 devient:

$$
(4.12)\qquad \lambda[(\alpha_{,1} + 2\tilde{q}_1\sqrt{\alpha}\cos\psi - 2\tilde{p}_1\sqrt{\alpha}\sin\psi)\lambda + 2\sqrt{\alpha}\cos\psi] = 0.
$$

Il résulte que Γ', donc l'enveloppe passe par l'origine M. De plus, (4.12) donne:

$$
\lambda = \frac{2\sqrt{\alpha}\cos\psi}{(-\alpha_{,1} - 2\tilde{q}_1\sqrt{\alpha}\cos\psi + 2\tilde{p}_1\sqrt{\alpha}\sin\psi)}.
$$

En notant

$$
(4.13)\qquad u' = \frac{2\sqrt{\alpha}}{2\tilde{p}_1\sqrt{\alpha}\sin\psi - 2\tilde{q}_1\sqrt{\alpha}\cos\psi - \alpha_{,1}},
$$

les équations paramétriques de Γ' deviennent:

$$
(4.13')\qquad
\begin{aligned}
x^1 &= u'\sqrt{\alpha}\cos^2\psi,\\
x^2 &= u'\sqrt{\alpha}\sin\psi\cos\psi,\\
x^3 &= u'\cos\psi.
\end{aligned}
$$

La courbe Γ' coupe le plan (I_1, I_3) aux points

$$
(4.14)\qquad
\begin{aligned}
&P_1\left(-\frac{2\alpha}{2\tilde{q}_1\sqrt{\alpha} + \alpha_{,1}},\ 0,\ -\frac{2\sqrt{\alpha}}{2\tilde{q}_1\sqrt{\alpha} + \alpha_{,1}}\right), \text{ pour } \psi = 0,\\
&P_2\left(-\frac{2\alpha}{2\tilde{q}_1\sqrt{\alpha} - \alpha_{,1}},\ 0,\ \frac{2\sqrt{\alpha}}{2\tilde{q}_1\sqrt{\alpha} - \alpha_{,1}}\right), \text{ pour } \psi = \pi.
\end{aligned}
$$

On a ici une interprétation de l'invariant $\tilde{q}_1$. De la même manière on peut considérer l'enveloppe de la sous-famille $V_1'' \subset V_1$ de cônes ayant leurs sommets sur la courbe Γ_2. On obtient des formules analogues à (4.13), (4.13′) et (4.14), en remplaçant seulement $\tilde{q}_1$ par q_2.

Si l'on considère les surfaces réglées (Γ_i, I_l) $(i, l \in I)$ on établit que les réglées (Γ_i, I_i) sont développables et que les conditions nécessaires et suffisantes pour que les autres réglées (Γ_i, I_j), avec $j \neq i$, soient développables sont:

$$
(4.15)\qquad
\begin{aligned}
i = 1 &: p_1 = 0,\\
i = 2 &: q_2 = 0,\\
i = 3 &: r_3 = 0.
\end{aligned}
$$

De (3.14), (3.15) et (4.4) il résulte encore que *le repère du complexe V_1 coïncide avec le repère Frenet de la courbe Γ_3*, que q_3 et r_3 sont, respectivement, la courbure et la torsion de la courbe Γ_3 et que Γ_3 est une ligne géodésique sur la surface réglée ayant I_3 pour génératrice et I_1 pour normale.

BIBLIOGRAPHIE

1. Cartan E. — *La théorie des groupes finis et continus.* Gauthier-Villars, Paris, 1937.
2. Фиников С. П. — *Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии.* Москва-Ленинград, 1948.
3. Gheorghiev Gh. — *Despre geometria intrinsecă a unui cimp de vectori.* Studii şi cerc. şt. Iaşi, vol. II (1951), fasc. 3–4, pp. 1–21.
4. Gheorghiev Gh. — *Sulla geometria dei coni dell S_3 euclideo.* An. şt. Univ. Iaşi, t. III (1957) pp. 125–132.
5. Gheorghiev Gh. — *Observaţii asupra geometriei afine diferenţiale a cimpurilor de vectori.* Lucrările Consfatuirii de geometrie şi topologie, Iaşi 2–5 iunie 1958, pp. 127–138.
6. Георгиев Г. — *Дифференциальная геометрия многообразий конусов в трехмерном пространстве.* An. şt. Univ. Iaşi, s. I, t. VIII, fasc. 2, (1962), pp. 353–367.
7. Gheorghiev Gh., Miron R., Papuc I. Dan — *Geometria analitică şi diferenţială.* Ed. did. şi ped., Bucureşti, 1968.
8. Mihăilescu T. — *Geometrie diferenţială şi proiectivă.* Ed. Acad. R.S.R., 1958.
9. Малаховский В. С. — *Комплексы кривых второго порядка в трехмерном пространстве.* Геом. Сборник, вып. 4. Труды Томск. ун-та 174 (1964), стр. 28–36.
10. Rimer D. — *La géométrie différentielle des variétés uniparamétriques de cônes quadratiques dans l'espace projectif à trois dimensions.* An. şt. Univ. Iaşi, s. I, Matematică t. XII, fasc. 2 (1966), pp. 377–403.

11. Rimer D. — *La géométrie différentielle des variétés uniparamétriques de cônes quadratiques dans l'espace équiaffine à trois dimensions.* Bull. Math. de la Soc. Sci Math. de la R. S. de Roumaine, t. IX (57), fasc. 3 (1965), pp. 211—225.
12. Rimer D. — *Geometria diferențială a varietăților uniparametrice de conuri pătratice în spațiul euclidian cu trei dimensiuni.* An. Univ. Timișoara, vol. V (1967), pp. 257—279.
13. Rimer D. — *Variétés biparamétriques de cônes quadratiques dans l'espace projectif et équiaffine à trois dimensions.* An. șt. Univ. Iași, s. I, Matematică t. XIII, fasc. 2 (1967), pp. 349—365.
14. Rimer D. — *Congruences de cônes quadratiques en E_3.* An. șt. Univ. Iași, s. I, Matematică, t. XV, fasc. 1, (1969), pp. 121—131.
15. Rimer D. — *La géométrie différentielle des complexes de cônes quadratiques dans l'espaces projectif à trois dimensions.* An. șt. Univ. Iași, s. I, Matematică t. XIV, (1968), pp. 137—147.
16. Рютин В. Р. — *Инвариантные образы комплекса коник в евклидовом пространстве.* Геом. Сборник, Томск. т. 191 (1967), стр. 140—142.

COMPLEXE DE CONURI PĂTRATICE ÎN SPAȚIUL ECHIAFIN ȘI EUCLIDIAN TRIDIMENSIONAL

Rezumat

Continuînd lucrările [10—15], se studiază geometria diferențială a varietăților cu trei parametri de conuri pătratice în A_3 și E_3. Se folosește, în acest scop, metoda reperului mobil, a lui Cartan, aplicată imaginii complexului într-un spațiu proiectiv cu 9 dimensiuni. Se obține, în ambele cazuri, reperul canonic și sistemul complet de invarianți. Se dau interpretări geometrice reperului și invarianților, utilizînd complexul, imaginea sa în S_9, precum și diferite figuri asociate complexului. Dintre cazurile de excepție se cercetează complexe de conuri de rotație în E_3.

EXTENSION AND BENDING OF ORTHOTROPIC NATURALLY TWISTED BARS

BY

C. I. BORȘ

We shall consider a bar limited by two planes $x_3 = 0$, $x_3 = h$ and a surface $\mathfrak{S}$ given by the equation

$$f(x_1 - kx_2x_3,\ x_2 + kx_1x_3) = 0, \tag{1}$$

where k is a small parameter, the square and higher powers of which can be neglected. The region occupied by the bar will be denoted by $\mathfrak{V}$.

We shall name such bars *slightly twisted bars* [1], [5]*).

We will suppose that the tractions applied at the ends of the bar are statically equivalent either to a longitudinal force or to one bending couple. The surface $\mathfrak{S}$ is free from tractions. Also we suppose that there are no body forces.

1. General equations

If we make the transformation:

$$\xi = x_1 - kx_2x_3, \quad \eta = x_2 + kx_1x_3, \quad \zeta = x_3, \tag{2}$$

then the surface (1) becomes

$$f(\xi, \eta) = 0 \tag{3}$$

and it is a cylindrical surface $\mathfrak{S}_1$ in the space ξ, η, ζ.

*) The work of Riz [5] is quoted after Khatiashvili [3]. I do not know if the surfaces (1) were introduced in [5] or not. Anyway, in the work [5] the isotropic case was discussed.