SUR L'ÉQUILIBRE ÉLASTO-PLASTIQUE DE LA SPHÈRE PLEINE ORTHOTROPE

PAR

V. DIACONIŢA

Dans cette Note on étudie l'équilibre élasto-plastique d'une sphère pleine de rayon a composée d'un matériel qui possède une orthotropie sphérique et qui est soumise à une pression p uniformément distribuée sur la surface. Nous rapportons la sphère à un système de coordonnées sphériques r, θ, φ.

Dans la première partie du travail on étudie l'équilibre élastique; ensuite, dans la deuxième partie, celui élasto-plastique.

Si la pression p reste plus petite que la pression limite (la pression pour laquelle aparaissent les premières déformations plastiques) la sphère se déforme élastiquement. Si la pression extérieure dépasse la pression limite, une zone plastique sera engendrée dans la sphère et à cause de la symétrie, cette zone sera limitée par une sphère de rayon ρ.

§ 1. L'équilibre élastique. Nous essayons de résoudre le problème dans l'hypothèse que le déplacement est radial et fonction seulement de la distance r au centre de la sphère [2]. Dans cette hypothèse les composantes différentes de zéro du tenseur de tension sont σ_r, σ_θ et σ_φ; elles dépendent seulement de r. On constate que les déformations différentes de zéro sont ε_r, $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi$.

Les équations de l'équilibre dans l'absence des forces de masse et dans le système de coordonnées choisi se présentent sous la forme:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r}(2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\varphi) = 0, \tag{1.1}$$

$$-\sigma_\theta + \sigma_\varphi = 0.$$

Les relations entre les déformations et les déplacements dans notre hypothèse deviennent:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}, \gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta\varphi} = \gamma_{r\varphi} = 0. \tag{1.2}$$

En vertu de (1.2) les relations entre les tensions et les déplacements, pour un matériel orthotrope prennent la forme:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= A_{11}\frac{du}{dr} + (A_{12} + A_{13})\frac{u}{r}, \\ \sigma_\theta &= A_{12}\frac{du}{dr} + (A_{22} + A_{23})\frac{u}{r}, \\ \sigma_\varphi &= A_{13}\frac{du}{dr} + (A_{23} + A_{33})\frac{u}{r}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Introduisant les valeurs (1.3) en (1.1), nous obtenons pour le déplacement u les équations:

$$\begin{aligned} &A_{11}\frac{d^2u}{dr^2} + 2A_{11}\frac{du}{dr} - (A_{22} + A_{33} + 2A_{23} - A_{12} - A_{13})\frac{u}{r^2} = 0, \\ &(A_{13} - A_{12})\frac{du}{dr} + (A_{33} - A_{22})\frac{u}{r} = 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Si le matériel n'est pas à isotropie transversale par rapport au rayon $(A_{13} - A_{12} \neq 0, A_{33} - A_{22} \neq 0)$, alors en intégrant la deuxième des équations (1.4), on obtient

$$u = cr^K, \tag{1.5}$$

où

$$K = \frac{A_{22} - A_{33}}{A_{13} - A_{12}}. \tag{1.6}$$

Pour que la première équation (1.4) soit aussi vérifiée, il faut et il suffit qu'entre les coefficients A_{ij} il y ait la relation

$$\left(\frac{A_{22} - A_{33}}{A_{13} - A_{12}}\right)^2 + \frac{A_{22} + A_{33}}{A_{13} - A_{12}} = \frac{A_{22} + A_{33} + 2A_{23} - A_{12} - A_{13}}{A_{11}}, \tag{1.7}$$

condition qui est identiquement vérifiée dans le cas de l'isotropie transversale par rapport au rayon.

La constante c qui intervient en (1.5) est déterminée par la condition

$$\sigma_r = -p \qquad \text{pour} \qquad r = a; \tag{1.8}$$

et nous trouvons pour les tensions, les déformations et le déplacement, les expressions:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -p\left(\frac{r}{a}\right)^{K-1} \\ \sigma_\theta = \sigma_\varphi &= -p\frac{A_{12}K + A_{22} + A_{23}}{A_{11}K + A_{12} + A_{13}}\left(\frac{r}{a}\right)^{K-1}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= -\frac{pK}{A_{11}K + A_{12} + A_{13}}\left(\frac{r}{a}\right)^{K-1}, \\ \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi &= -\frac{p}{A_{11}K + A_{12} + A_{13}}\left(\frac{r}{a}\right)^{K-1}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

$$u = -\frac{p}{A_{11}K + A_{12} + A_{13}}\left(\frac{r}{a}\right)^{K}. \tag{1.11}$$

De (1.9) on remarque que si $K \geq 1$, les tensions dans la sphère sont finies. Si $K < 1$, les tensions deviennent infinies à l'origine, où se produit une concentration des tensions. Nous considérons le cas $K \geq 1$.

§ 2. L'équilibre élasto-plastique. Maintenant nous étudierons le cas où grâce à l'augmentation de la pression extérieure dans la sphère il apparaît une zone plastique qui, à cause de la symétrie, sera limitée par une sphère de rayon ρ.

Trouvons d'abord la valeur de la pression pour laquelle apparaissent les premières déformations plastiques. Pour cela nous utiliserons une condition de plasticité du type proposé dans [1] qui, dans notre cas, s'écrit sous la forme

$$A\sigma_r^2 + B\sigma_\theta^2 - 2C\sigma_r\sigma_\theta = 1, \tag{2.1}$$

où A, B, C sont des constantes telles que $AB - C^2 > 0$ et qui dépendent des propriétés élastiques et plastiques du matériel.

Remplaçant dans (2.1) les expressions des tensions données par (1.9), on trouve la valeur de la pression cherchée:

$$p_a^2 = \frac{1}{A + BM^2 - 2CM}, \tag{2.2}$$

$$M = \frac{A_{12}K + A_{22} + A_{23}}{A_{11}K + A_{12} + A_{13}}. \tag{2.3}$$

S'il y a une zone plastique limitée par une sphère de rayon ρ, alors sur cette sphère la pression sera:

$$p_\rho^2 = \frac{1}{A + BM^2 - 2CM}\left(\frac{a}{\rho}\right)^{2(K-1)}. \tag{2.4}$$

Dans la zone élastique, $0 \leqslant r \leqslant \rho$, les tensions, les déformations et le déplacement u ont des expressions analogues à (1.9), (1.10), (1.11), à savoir :

$$\sigma_r = -p_\rho \left(\frac{r}{a}\right)^{K-1}, \qquad \sigma_\theta = \sigma_\varphi = -p_\rho M \left(\frac{r}{a}\right)^{K-1}, \tag{2.5}$$

$$\varepsilon_r = -\frac{p_\rho K}{A_{11}K + A_{12} + A_{13}} \left(\frac{r}{a}\right)^{K-1}, \qquad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = -\frac{p_\rho}{A_{11}K + A_{12} + A_{13}} \left(\frac{r}{a}\right)^{K-1}, \tag{2.6}$$

$$u = -\frac{p_\rho}{A_{11}K + A_{12} + A_{13}} \left(\frac{r}{a}\right)^{K}, \tag{2.7}$$

Cherchons maintenant les tensions σ_r, $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$ dans la zone plastique $\rho \leqslant r \leqslant a$. De (2.1) nous obtenons :

$$\sigma_\theta = \frac{1}{B}\left[C\sigma_r \pm \sqrt{B - (AB - C^2)\,\sigma_r^2}\right]. \tag{2.8}$$

En introduisant les notations :

$$v = (B - C)\,\sigma_r, \quad m = \frac{AB - C^2}{(B - C)^2}, \quad H = \frac{B}{B - C}, \quad z = \sqrt{B - mv^2} \tag{2.9}$$

et, compte tenu de (2.8) et de (1.1), nous trouvons

$$2\frac{dr}{r} = \frac{H\,dv}{-v + z}. \tag{2.10}$$

Par intégration, on obtient

$$\ln r^2 = -\frac{H}{m+1}\left[\ln\,(z - v) + 2\sqrt{m}\,\operatorname{arctg}\frac{z + \sqrt{B}}{\sqrt{m}\,v} + C_1\right], \tag{2.11}$$

où

$$r^{2N} = C_2\,(z - v)\,e^{2\sqrt{m}\,\theta}, \tag{2.12}$$

où

$$N = -\frac{m+1}{H}\ ;\ C_2 = e^{C_1}, \qquad \operatorname{tg}\,\theta = \frac{z + \sqrt{B}}{\sqrt{m}\,v}. \tag{2.13}$$

La constante C_2 qui intervient en (2.12) est déterminée à l'aide de la condition (1.8) et nous obtenons pour elle la valeur

$$C_2 = \frac{a^{2N}}{(z - v)_a}\,e^{-2\sqrt{m}\,\theta_a}, \tag{2.14}$$

Dans (2.14) l'indice a montre les valeurs des quantités respectives pour $r = a$. Après avoir déterminé la constante C_2, nous pouvons écrire (2.12) sous la forme

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{2N} = \frac{z - v}{(z - v)_a}\,e^{2\sqrt{m}\,(\theta - \theta_a)}. \tag{2.15}$$

De $(2.13)_2$ nous avons :

$$v = \sqrt{\frac{B}{m}}\sin 2\theta, \qquad z = -\sqrt{B}\cos 2\theta \tag{2.16}$$

et de cette manière nous obtenons une représentation paramétrique pour les tensions

$$\sigma_r = \frac{1}{B - C}\sqrt{\frac{B}{m}}\sin 2\theta, \qquad \sigma_\theta = \sigma_\varphi = \frac{1}{B(B - C)}\sqrt{\frac{B}{m}}\left[C\sin 2\theta - (B - C)\sqrt{m}\cos 2\theta\right], \tag{2.17}$$

la fonction θ étant donnée par (2.15).

Enfin il reste à déterminer le rayon ρ de la sphère qui sépare la zone élastique de celle plastique. Pour cela nous imposons la condition de continuité de la tension σ_r au passage d'une de ces deux zones à l'autre, c'est-à-dire

$$\sigma_r^e = \sigma_r^p \quad \text{pour } r = \rho. \tag{2.18}$$

Si nous tenons compte de (2.5) et de (2.17), nous obtenons pour ρ l'équation

$$-p\left(\frac{\rho}{a}\right)^{K-1} = \frac{1}{B - C}\sqrt{\frac{B}{m}}\sin 2\theta_\rho, \tag{2.19}$$

où la valeur de θ_ρ est déterminée de (2.15), r étant remplacé par ρ.

BIBLIOGRAPHIE

1. Borş C. I. — *Sur la théorie de la plasticité des corps orthotropes.* Bull. Acad. Polon Sci., Sér. Sci. Techn., no. 9 (1966), p 541.
2. Saint-Venant B. — *Mémoire sur les divers genres d'homogénéité des corps solides, et principalement sur l'homogénéité semi-polaire ou cylindrique, et sur les homogénéités polaires ou sphèriconique et sphérique.* Journ. de Math. pures et appl., t. 10 (1865), p. 297.

ECHILIBRUL ELASTO-PLASTIC AL SFEREI PLINE ORTOTROPE

Rezumat

Se studiază echilibrul elasto-plastic al unei sfere pline ortotrope, sub acţiunea presiunii exterioare uniform distribuite pe suprafaţa sa. Tensiunile, deformările şi deplasarea radială în zona elastică $0 \leq r \leq \rho$ sînt date de (2.5), (2.6) şi (2.7). Tensiunile în zona plastică $\rho \leq r \leq a$ sînt date de (2.17)

EXACT SOLUTIONS OF THE ONE-DIMENSIONAL NONSTEADY FLOW OF IDEAL ELASTIC FLUIDS

BY

I. PINTILEI and E. COSTEA

1. Introduction. The classical linear theories of mechanics and physics use some general representations for the solutions of the underlying partial differential equations. The fundamental equations become more complicated by generalizing them to include chemical reactions and electromagnetic phenomena, or when one considers substances with unfamiliar equations of state.

In this paper we deal with the nonsteady one-dimensional compressible flow. A survey of this subject has been made by O. Zaldastani [1] and an unified account has been given by R. von Mises [2] ch. III. In the case of the anisentropic flows the general solution has been constructed by M. H. Martin and G. S. S. Ludford [3], for the equations of state that include Karmen-Tsien's approximation to ideal gas. J. A. Giese [4, 5] gives an unified study of the above problem, and finds a general parametric representation of fluids.

Here we intend to find a general solution of the one-dimensional flow for some classes of elastic ideal fluids and to construct a solution for some boundary-value problems using the general representation of the solution. We consider an ideal elastic fluid with the equation of state

$$p = p(\rho), \tag{1.1}$$

where p is the pressure, ρ is the density of the fluid, and $p(\rho)$ is a C^1 function. Newton's equation and the equation of continuity may be written in the form

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{1.2}$$