Thus the necessary condition for the solution of (1) under the present situation is

$$a + b \equiv 0\,; \quad b^2 \equiv \pm 1\,; \quad a^2 \equiv \pm 1\,; \quad c \equiv 0 \pmod{4p+1},$$

whereby Theorem 3 has been proved.

REFERENCES

1. Dickson E. — *History of Theory of Numbers*. Vol. II, Chelsea Publishing Company, 1952.
2. Gandhi M. — *On Fermat's Last Theorem*. American Math. Monthly 73 (1966), pp. 1106–1107.
3. Mordell J. — *Three Lectures on Fermat's Last Theorem*. Chelsea Publishing Company, 1956.
4. Stone E. D. — *On Fermat's Last Theorem*. American Math. Monthly, 70 (1963), pp. 976–977.

DESPRE ULTIMA TEOREMĂ A LUI FERMAT

Rezumat

Se demonstrează că dacă p şi $4p+1$ sînt numere prime impare şi a, b, c întregi primi între ei doi cîte doi, care satisfac (1), atunci unul şi numai unul din întregii a, b, c este divizibil prin p. Dacă p şi $2p+1$ sînt prime impare şi deci (1) are o soluţie, atunci are loc una din cele 4 relaţii (3): dacă p şi $4p+1$ sînt prime impare, atunci pentru ca (1) să admită soluţie este necesar ca cele 2 congruenţe (4) să fie satisfăcute.

SUR LES ALGÈBRES TERNAIRES

PAR

ION CREANGĂ

Communication présentée à la session scientifique de l'Université „Al. I. Cuza" de 26 – 28 octobre 1969

Soit l'espace linéaire $\mathfrak{L}$ doté d'une loi de composition interne, ternaire, ainsi que, par trois vecteurs $x, y, z \in \mathfrak{L}$, on détermine, d'une manière unique, un quatrième élément $u \in \mathfrak{L}$, à la seule condition que si l'un des facteurs est nul, le produit est nul. C'est une application du produit cartésien $\mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \times \mathfrak{L}$ dans $\mathfrak{L}$, qui a parmi les préimages de $\mathcal{O}$, les ternes qui contiennent au moins un zéro.

On désigne le produit ternaire des vecteurs x, y, z par xyz.

Les algèbres binaires sont de même considérées par nous comme des applications du produit cartésien $\mathfrak{L} \times \mathfrak{L}$ dans $\mathfrak{L}$, qui a aussi parmi les préimages de zéro, les couples de vecteurs qui contiennent au moins un zéro. On constate que les algèbres binaires sont aussi des algèbres ternaires et dans une algèbre ternaire on peut avoir des familles d'algèbres binaires, qui sont des sous-algèbres d'algèbre ternaire.

On dit qu'une algèbre $\mathcal{A}$ ternaire est totalement homogène de degré un, par rapport aux scalaires du corps de base et par rapport à chacun des facteurs si l'on a:

$$\alpha\overline{xyz} = \overline{(\alpha . x)yz} = \overline{x(\alpha y)z} = \overline{xy(\alpha z)}\,. \tag{1}$$

De même l'algèbre $\mathcal{A}$ est totalement distributive si les conditions suivantes sont remplies:

$$\begin{aligned} &(D_1) \quad \overline{(x+y)uv} = \overline{xuv} + \overline{yuv}\,, \\ &(D_2) \quad \overline{u(x+y)v} = \overline{uxv} + \overline{uyv}\,. \\ &(D_3) \quad \overline{uv(x+y)} = \overline{uvx} + \overline{uvy}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Pour les algèbres ternaires totalement homogènes et totalement distributives, d'ordre fini, dans un repère $\{e_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$, nous avons :

(3) $$\overline{xyz} = \xi^i \eta^j \zeta^k \overline{e_i e_j e_k},$$

où :
$x = \xi^i e_i$, $y = \eta^j e_j$, $z = \zeta^k e_k$, avec la convention des indices muets.

Il résulte, dans ce cas qu'une algèbre ternaire sera connue si l'on donne un tableau cubique pour les produits ternaires des éléments de base :

(4) $$\overline{e_i e_j e_k} = \alpha^s_{ijk} e_s.$$

Les coordonnées α^s_{ijk}, en nombre de n^4, seront appelées, de même que dans le cas des algèbres binaires, les constantes de structure pour l'algèbre ternaire $\mathfrak{A}$.

En ce qui concerne les propriétés de commutativité nous en avons trois sortes :

(5) $$\overline{xyz} = \overline{yzx},$$ (7) $$\overline{xyz} = \overline{zyx}.$$

(6) $$\overline{xyz} = \overline{yxz},$$

Quand les trois propriétés (5), (6), (7) sont satisfaites, on dit que l'algèbre $\mathfrak{A}$ est totalement commutative ; dans ce cas le produit des trois éléments reste invariable pour le groupe symétrique S_3.

Nous avons aussi trois espèces d'associativité :

(8) $$\overline{\overline{xyz}uv} = \overline{x\overline{yzu}v},$$

(9) $$\overline{\overline{xyz}uv} = \overline{x\overline{yzu}v},$$

(10) $$\overline{\overline{xyz}uv} = \overline{x\overline{yzu}v}.$$

Nous remarquons que si deux de ces relations sont satisfaites, la troisième le sera également.

Si l'algèbre $\mathfrak{A}$ possède les trois propriétés (8), (9), (10), on dit qu'elle est totalement associative.

On appelle unités, respectivement à gauche, à droite et au milieu, les éléments u, v, w pour lesquels nous avons :

(11) $$\overline{xxu} = x, \quad \overline{vxx} = x, \quad \overline{xwx} = x,$$

pour tous les éléments x de $\mathfrak{L}$.

On dit qu'une couple d'éléments (a, b) est une couple unitaire, respectivement à droite, à gauche, et bilatéral, si l'on a :

(12) $$\overline{xab} = x, \quad \overline{abx} = x, \quad \overline{axb} = x$$

pour tous les $x \in \mathfrak{L}$.

Les éléments e, f, g de $\mathfrak{L}$, quand ils existent et quand ils satisfont aux relations :

(13) $$\overline{xee} = x, \quad \overline{ffx} = x, \quad \overline{gxg} = x,$$

pour tous $x, y \in \mathfrak{L}$, sont nommés, respectivement, biunités à droite, à gauche et bilatérales.

Quand un élément $i \in \mathfrak{L}$ remplit la condition :

(14) $$\overline{iii} = i,$$

on dit qu'il est idempotent ; les éléments t, s'ils existent, pour lesquels on a :

(15) $$\overline{xyt} = 0, \quad \overline{txy} = 0, \quad \overline{xty} = 0,$$

pour tous les $x, y \in \mathfrak{L}$, sont des annulateurs, respectivement, à droite, à gauche et au milieu.

De même, on dit d'une couple $t, z \in \mathfrak{L}$ que c'est une couple annulatrice, respectivement à droite, à gauche et latérale quand :

(16) $$\overline{xtz} = 0, \quad \overline{tzx} = 0, \quad \overline{txz} = 0,$$

quel que soit $x \in \mathfrak{L}$.

Les éléments $h, l, k \in \mathfrak{L}$ sont appelés biannulateurs à droite, à gauche et latéralement, respectivement, quand :

(17) $$\overline{xhh} = 0, \quad \overline{llx} = 0, \quad \overline{kxk} = 0.$$

Une sous-algèbre ternaire est un sous-ensemble d'une algèbre ternaire, qui est clos relativement aux trois opérations de l'algèbre.

On peut définir six genres d'idéaux, à savoir :

1° les idéaux $I_1^{(d)}$ qui sont des sous-algèbres ternaires de $\mathfrak{A}$, qui, en plus, satisfont à la condition : si $x, y \in I_1^{(d)}$ et quel que soit $z \in \mathfrak{A}$, nous avons

(18) $$\overline{xyz} \in I_1^{(d)},$$

2° les idéaux $I_2^{(d)}$, les sous-algèbres qui satisfont à la condition : si $x \in I_2^{(d)}$ et quels que soient $y, z \in \mathfrak{A}$, on a :

$$\overline{xyz} \in I_2^{(d)},$$

3° les idéaux $I_1^{(s)}$: quels que soient $x \in \mathfrak{A}$ et $y, z \in I_1^{(s)}$ on a :

$$\overline{xyz} \in I_1^{(s)},$$

4° les idéaux $I_2^{(s)}$: quels que soient $x, y \in \mathfrak{A}$ et $z \in I_2^{(s)}$ on a :

$$\overline{xyz} \in I_2^{(s)},$$

5° les idéaux $I_1^{(m)}$: quels que soient $y \in \mathfrak{A}$ et $x, z \in I_1^{(m)}$ on a:

$$\overline{xyz} \in I_1^{(m)},$$

6° les idéaux $I_2^{(m)}$: quels que soient $x, z \in \mathfrak{A}$ et $y \in I_2^{(m)}$ on a:

$$\overline{xyz} \in I_2^{(m)}.$$

On observe que les idéaux $I_2^{(d)}$ sont aussi des idéaux $I_1^{(d)}$; de même les $I_2^{(s)}$ sont aussi des $I_1^{(s)}$.

On peut obtenir d'une algèbre ternaire, des algèbres binaires. Une famille de ces algèbres est donnée si, par exemple, l'un des facteurs dans toutes les ternes (dans la même position) est rendu constant, à savoir:

(19) $$(x, y)_{s,a} = \overline{axy} \text{ ou } (x, y)_{d,a} = \overline{xya} \text{ ou } (xy)_{m,a} = \overline{xay}.$$

Si l'on prend l'algèbre ternaire totalement associative et ayant un élément e biunité, dans tous les sens, on trouve par exemple:

(20) $$(xy)_{s,e} = \overline{exy} \text{ avec } (ey)_{s,e} = \overline{eey} = y, \text{ et } (xe)_{s,e} = \overline{exe} = x.$$

De même, nous avons:

(21) $$((xy)_{s,e} \cdot z)_{s,e} = \overline{eexyz} = \overline{eexyz} = \overline{xyz};$$

puis:

(22) $$(xy)_{d,e} = \overline{xye} \text{ avec } (ey)_{d,e} = \overline{eye} = y \text{ et } (xe)_{d,e} = \overline{xee} = x$$

et

(23) $$((xy)_{d,e} \cdot z)_{d,e} = \overline{xyeze} = \overline{xyeze} = \overline{xyz}.$$

L'élément e joue ici encore le rôle d'élément unité pour les algèbres binaires qui dérivent de l'algèbre ternaire.

Nous considérons, de nouveau, l'espace vectoriel $\mathfrak{E}$ de dimension finie n; l'algèbre $\mathfrak{A}$ sur l'espace $\mathfrak{E}$ est d'ordre n. Dans une base $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ soit: $x = \xi^i e_i$, $y = \eta^j e_j$, $z = \zeta^k e_k$; le produit ternaire s'exprime alors par:

(24) $$\overline{xyz} = \psi^i(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n;\ \eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n;\ \zeta^1, \zeta^2, \ldots, \zeta^n)\, e_i.$$

Les coordonnées ψ^i du produit sont des fonctions de trois suites de variables, les coordonnées de x, y, z, qui remplissent seulement les conditions:

(25) $$\begin{aligned} 0 &= \psi^i(0, 0, \ldots, 0;\ \eta^1, \ldots, \eta^n;\ \zeta^1, \ldots, \zeta^n) = \\ &= \psi^i(\xi^1, \ldots, \xi^n;\ 0, 0, \ldots, 0;\ \zeta^1, \ldots, \zeta^n) = \\ &\psi^i(\xi^1, \ldots, \xi^n;\ \eta^1, \ldots, \eta^n;\ 0, 0, \ldots, 0). \end{aligned}$$

Les algèbres ternaires qui sont, en même temps, totalement distributives et totalement homogènes, s'appellent algèbres ternaires linéaires; dans ce cas, les fonctions ψ^i sont linéaires en chacune des variables et homogènes, c'est-à-dire:

(26) $$\psi^i = \alpha^i_{rst}\, \xi^r \eta^s \zeta^t \quad (r, s, t = 1, 2, \ldots, n),$$

(27) $$\overline{xyz} = \alpha^i_{rst}\, \xi^r \eta^s \zeta^t e_i$$

et puis:

(28) $$\overline{e_r e_s e_t} = \alpha^i_{rst}\, e_i.$$

On constate que l'algèbre $\mathfrak{A}$ est partiellement commutative à gauche, si l'on a:

(29) $$\alpha^i_{rst} = \alpha^i_{srt} \text{ (pour tous les indices)},$$

à droite pour:

(30) $$\alpha^i_{rst} = \alpha^i_{rts}$$

et latéralement si:

(31) $$\alpha^i_{rst} = \alpha^i_{str}.$$

Quand α^i_{rst} reste invariable dans le groupe des permutations de rst, l'algèbre $\mathfrak{A}$ est totalement commutative.

Pour l'associativité totale dans l'algèbre $\mathfrak{A}$, il est nécessaire et suffisant que les coefficients α^i_{rst} satisfassent aux relations:

(32) $$\alpha^i_{rst}\, \alpha^r_{hjk} = \alpha^i_{hrt}\, \alpha^r_{jks} = \alpha^i_{hsr}\, \alpha^r_{kst},$$

nommées, comme dans le cas des algèbres binaires, les relations de structure de l'algèbre ternaire $\mathfrak{A}$.

On peut construire des algèbres ternaires en partant d'algèbres binaires.

En voici un exemple: considérons une algèbre binaire sur l'espace vectoriel $\mathfrak{E}$; notons par: $u = A(x, y)$ le produit d'une couple d'éléments $x, y \in \mathfrak{E}$, u étant aussi dans $\mathfrak{E}$. Supposons que les deux conditions: $A(0, y) = A(x, 0) = 0$ sont remplies.

On définit les produits ternaires:

(33) $$D_1(xyz) = A(x + y, z) - A(x, z) - A(y, z),$$

et

(34) $$D_2(xyz) = A(x, y + z) - A(x, y) - A(x, z)$$

dans l'espace $\mathfrak{E}$, qui, par ces opérations, devient soit l'algèbre ternaire $\mathfrak{A}_1$, donnée par (28), soit l'algèbre ternaire $\mathfrak{A}_2$, donnée par (29). Nous désignons ces algèbres; les algèbres de distributivité de l'algèbre $\mathfrak{A}$, respectivement, à droite et à gauche.

Quand l'algèbre $\mathfrak{A}$ est elle-même distributive, alors tous les produits ternaires sont zéro: $D_1(xyz) = D_2(xyz) = 0$ et on dit que les algèbres ternaires correspondantes sont zéro.

Dans le cas d'algèbres binaires du troisième degré, données par:

$$A(x, y) = [\alpha^i_{p,q}\, \xi^p \eta^q + \alpha^i_{pq,r}\, \xi^p \xi^q \eta^r + \alpha^i_{p,qr}\, \xi^p \eta^q \eta^r]\, e_i, \tag{35}$$

où $i = 1, 2, \ldots, n$; $p, q, r = 1, 2, \ldots, n$ et $\alpha^i_{pq,r} = \alpha^i_{qp,r}$, $\alpha^i_{p,qr} = \alpha^i_{p,rq}$, les produits ternaires considérés, sont

$$D_1 = 2\alpha^i_{pq,r}\, \xi^p \eta^q \zeta^r e_i, \tag{36}$$

et

$$D_2 = 2\alpha^i_{p,qr}\, \xi^p \eta^q \zeta^r e_i. \tag{37}$$

Les algèbres de distributivité sont linéaires (c'est-à-dire totalement distributives et homogènes).

Pour l'associativité totale il faut et il suffit que soient remplies les relations:

$$\begin{aligned} \alpha^i_{pq,r}\, \alpha^p_{st,l} &= \alpha^i_{sp,r}\, \alpha^p_{tl,q}, \\ \alpha^i_{pq,r}\, \alpha^p_{st,l} &= \alpha^i_{st,p}\, \alpha^p_{lq,r} \end{aligned} \tag{38}$$

pour A_1, et:

$$\begin{aligned} \alpha^i_{p,qr}\, \alpha^p_{s,tl} &= \alpha^i_{s,pr}\, \alpha^p_{t,lq}, \\ \alpha^i_{p,qr}\, \alpha^p_{s,tl} &= \alpha^i_{s,tp}\, \alpha^p_{l,qr} \end{aligned} \tag{39}$$

pour A_2.

Un autre exemple résulte de l'associativité des facteurs d'une algèbre binaire. En notant toujours par $A(x, y)$ le produit de deux éléments x, y d'une algèbre binaire, nous obtenons les composées ternaires:

$$\overline{xyz} = A(A(x, y), z) \text{ et } \overline{xyz} = A(x, A(y, z)). \tag{40}$$

L'espace vectoriel doté de l'un ou de l'autre des produits (35) est transformé en deux algèbres ternaires A_1 et A_2. Ces deux algèbres sont les mêmes ($A_1 = A_2$) quand l'algèbre binaire A est associative.

Pour les algèbres binaires A d'ordre n distributives, les algèbres A_1 et A_2 sont:

$$\begin{aligned} (A_1)\quad \overline{xyz} &= \alpha^i_{p,q}\, \alpha^p_{r,s}\, \xi^r \eta^s \zeta^q e_i, \\ (A_2)\quad \overline{xyz} &= \alpha^i_{r,p}\, \alpha^p_{s,q}\, \xi^r \eta^s \zeta^q e_i. \end{aligned} \tag{51}$$

L'associativité de A est assurée si les relations de structure sont satisfaites:

$$\alpha^i_{p,q}\, \alpha^p_{r,s} = \alpha^i_{r,p}\, \alpha^p_{s,q}.$$

L'associativité dans A_1 (36) est donnée par:

$$\alpha^i_{p,q}\, \alpha^p_{r,s}\, \alpha^r_{h,l}\, \alpha^h_{j,k} = \alpha^i_{p,q}\, \alpha^p_{j,r}\, \alpha^r_{h,s}\, \alpha^h_{k,l} = \alpha^i_{p,r}\, \alpha^p_{j,k}\, \alpha^r_{h,q}\, \alpha^h_{l,s} \tag{43}$$

et, dans A_2 par:

$$\alpha^i_{r,p}\, \alpha^r_{s,q}\, \alpha^s_{h,l}\, \alpha^h_{j,k} = \alpha^i_{r,p}\, \alpha^r_{j,s}\, \alpha^s_{h,q}\, \alpha^h_{k,l} = \alpha^i_{r,s}\, \alpha^r_{j,k}\, \alpha^s_{h,p}\, \alpha^h_{l,q}. \tag{44}$$

Évidemment, si l'algèbre binaire A est associative, l'algèbre ternaire $A_1 = A_2$ est elle aussi associative. Reste à démontrer s'il existe ou non des solutions pour les systèmes (38) ou (39), qui ne vérifient pas le système (37).

Quand les algèbres binaires sont de degrés supérieurs à deux, la recherche des algèbres ternaires, qui proviennent de l'associativité, est assez laborieuse.

BIBLIOGRAPHIE

1. Creangă I. — *Sur les algèbres du troisième degré*. An. şt. Univ. Iaşi, s. I, Matematică, t. XIV, (1968), pp. 221–234.
2. Вагнер В. В. — *Теория обобщенных груд и обобщенных групп*. Матем. Сб. 32 (74) (1953), стр. 545 – 632.
3. Вагнер В. В. — *Теория Полугрупп и ее приложения*. Изд. Саратовского университета 1965.

ASUPRA ALGEBRELOR TERNARE

Rezumat

În Nota de faţă se consideră algebre ternare care se construiesc peste un spaţiu liniar; se cercetează proprietăţi de distributivitate, de comutativitate şi asociativitate. Se dau unele exemple de algebre ternare, construite plecînd de la algebre binare.