CONNEXION DANS DES ESPACES TOPOGÈNES

PAR

C. AMIHĂESEI

On va utiliser, dans cet article, la terminologie et les notations de [2]. Rappelons quelques-unes des notations dont on va se servir. Appelons *ordre semi-topogène* sur E, une relation $<$ sur l'ensemble des sous-ensembles de E, satisfaisant aux axiomes suivants:

(O_1) $\emptyset < \emptyset$, $E < E$,

(O_2) de $A < B$ il résulte $A \subset B$,

(O_3) de $A \subset A' < B' \subset B$ il s'ensuit $A < B$.

L'ordre semi-topogène $<$ sur E s'appelle *ordre topogène* sur E s'il satisfait à l'axiome

(Q) les formules $A < B$ et $A' < B'$ impliquent que l'on a $A \cup A' < B \cup B'$ et $A \cap A' < B \cap B'$.

L'ordre semi-topogène $<$ sur E s'appelle *symétrique* s'il satisfait à la condition

(S) si $A < B$ alors $E - B < E - A$.

L'ordre semi-topogène $<$ sur E s'appelle *parfait* s'il satisfait à la condition suivante:

(P) $A_i < B_i$ $(i \in I)$ impliquent $\bigcup_{i \in I} A_i < \bigcup_{i \in I} B_i$.

La famille $\mathfrak{S} = \{<\}$ ayant comme élément l'ordre topogène $<$ sur E est par définition une structure topogène sur E si elle satisfait à l'axiome

(S) si $A < B$ alors il y a un ensemble $C \subset E$ de sorte que $A < C < B$.

La couple $[E, \mathcal{S}]$ formée d'un ensemble arbitraire E et d'une structure topogène $\mathcal{S} = \{<\}$ sur E est appelée espace topogène.

La structure topogène $\mathcal{S} = \{<\}$ sur E est appelée structure topogène parfaite (topologie) sur E si l'ordre topogène $<$ est parfait.

La structure topogène $\mathcal{S} = \{<\}$ sur E s'appelle *structure topogène symétrique*, si l'ordre topogène $<$ est symétrique.

Si la structure topogène $\mathcal{S}$ sur E est parfaite (symétrique), l'espace topogène $[E, \mathcal{S}]$ s'appelle espace topologique (espace topogène symétrique).

Si $\mathcal{S}$ est une topologie sur E, alors l'ensemble des sous-ensembles $A \subset E$, qui satisfont à la condition $A < A$ constitue la famille d'ensembles ouverts d'une topologie habituelle τ sur E [1]. La topologie τ s'appelle la topologie classique associée à $\mathcal{S}$. Soit un ensemble non-vide E; on dit qu'un sous-ensemble $A \subset E$ est un sous-ensemble propre de E, s'il est non-vide et différent de E.

Dans le présent article, nous nous occupons des questions suivantes.

Tout d'abord nous définissons la notion de noyau d'un ordre semi-topogène et présentons quelques exemples d'ordres semi-topogènes à noyau vide. Ensuite on introduit la notion d'espace topogène connexe et on donne un exemple d'espace topogène connexe qui n'est ni parfait, ni symétrique. Après cela, on présente, dans le langage des structures topogènes, quelques résultats connus tirés de la théorie des espaces topologiques classiques et connexes. En guise de conclusion, on va démontrer un théorème de caractérisation des espaces topogènes symétriques connexes à l'aide des espaces à proximité.

Les ordres qu'on utilise dans cet article seront différents de l'ordre semi-topogène $<_0$ défini sur E par

$$A <_0 B \text{ si et seulement si ou } A = \emptyset, \text{ ou } B = E.$$

§1. **Le noyau d'un ordre semi-topogène.** Soit $<$ un ordre semi-topogène sur un ensemble E.

Définition 1.1. *On appelle noyau d'un ordre semi-topogène $<$ la famille $N_<$ formée des sous-ensembles propres A de l'ensemble E ayant la propriété $A < A$.*

Si $\mathcal{S} = \{<\}$ est une structure topogène sur E, l'ensemble $N_<$ sera appelé le noyau de la structure topogène $\mathcal{S}$.

Remarques 1.1. Tout ordre semi-topogène $<$ sur E, engendré par un système Σ de générateurs ayant plus de deux éléments a le noyau non-vide.

1.2. Le noyau d'une structure topogène parfaite $\mathcal{S}$ sur E coïncide avec le système de générateurs de l'ordre topogène $<$, dont on extrait l'ensemble vide et l'ensemble E. Il en résulte que toute structure topogène à noyau vide n'est pas parfaite. On présente maintenant quelques exemples d'ordres topogènes à noyau vide.

[1]) Les notations et les résultats de topologie classique utilisés ici, sont celles de [1].

I. Soit E l'ensemble des nombres réels. Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit un ordre topogène $<_\varepsilon$ sur E par

$$(1) \qquad A <_\varepsilon B \text{ si et seulement si } \sup A + \varepsilon \leqslant \inf (E - B).$$

L'ordre topogène $<_\varepsilon$ a le noyau vide (voir [2], page 22).

II. Soit E l'ensemble des nombres réels et pour tout nombre positif ε, l'ordre topogène $<_\varepsilon$ défini par (1). On considère l'ordre topogène $< = \bigcup_{\varepsilon > 0} <_\varepsilon$ sur E défini par

$$(2) \qquad A < B \text{ si et seulement s'il y a } \varepsilon > 0 \text{ de sorte que } A <_\varepsilon B.$$

L'ordre topogène $<$ sur E se caractérise par

$$(3) \qquad A < B \text{ si et seulement si } \sup A < \inf (E - B).$$

La famille $\mathcal{S} = \{<\}$ est une structure topogène sur l'ensemble E des nombres réels (voir [2], page 79).

Proposition 1.1. *L'ordre topogène $<$ défini par (2) sur l'ensemble E des nombres réels a le noyau vide et n'est ni parfait, ni symétrique.*

En effet si $N_< \neq \emptyset$, alors il y a un sous-ensemble propre A de l'ensemble des nombres réels E, qui satisfait à la relation $A < A$. Il résulte de (3) $\sup A < \inf (E - A)$. Cette inégalité étant impossible, il résulte que $N_< = \emptyset$. Si $A < B$ implique $E - B < E - A$, alors on a les inégalités $\sup A < \inf (E - B) \leqslant \sup (E - B) < \inf A$, qui conduisent à $\sup A < \inf A$. La dernière inégalité étant impossible quel que soit l'ensemble des nombres réels, on déduit que l'ordre $<$ n'est pas symétrique. La famille $\mathcal{S} = \{<\}$ étant une structure topogène sur l'ensemble E des nombres réels, à noyau vide, il résulte de la remarque 1.2 que l'ordre topogène $<$ n'est pas parfait. Cela dit, la proposition est démontrée.

III. On donne maintenant un exemple d'ordre topogène symétrique à noyau vide. Soit $[E, \rho]$ un espace métrique connexe. On désigne par δ la structure de proximité engendrée par la métrique ρ, et par $<$ l'ordre topogène symétrique associé à la structure de proximité δ. La structure de proximité δ et l'ordre topogène $<$ se définissent par

$$(4) \qquad A \delta B \text{ si et seulement si } \rho(A, B) = 0,$$

$$(5) \qquad A < B \text{ si et seulement si } A \delta (E - B).$$

Si l'on tient compte de (4), l'ordre topogène $<$ se caractérise par

$$(6) \qquad A < B \text{ si et seulement si } \rho(A, E - B) > 0.$$

Dans ces conditions on démontre la proposition suivante.

Proposition 1.2. *L'ordre topogène $<$ associé à la relation de proximité δ déduite de la métrique ρ sur E, est un ordre topogène symétrique à noyau vide.*

Supposons par absurde que $N_< \neq \emptyset$. Il suit qu'il y a un sous-ensemble propre A de E de sorte que $A < A$. D'une part, il résulte de (6) que $\rho(A, E-A) > 0$. D'autre part, on déduit du fait que E est connexe, que $\mathrm{Fr}\,(A) \neq \emptyset$ ou $\bar{A} \cap \overline{E-A} \neq \emptyset$, ce qui implique $\rho(A, E-A) = 0$. Les relations $\rho(A, E-A) > 0$ et $\rho(A, E-A) = 0$ étant contradictoires, on déduit que $N_< = \emptyset$.

§2. **Espaces topogènes connexes.** 1. Soit E un ensemble quelconque et $\mathcal{S} = \{<\}$ une structure topogène sur E.

Définition 2.1. *On dit que la structure topogène $\mathcal{S}$ sur E est connexe si elle satisfait à l'axiome suivant:*

(C^*) *Pour tout sous-ensemble propre A de E, il y a un point $x \in E$, de sorte que les formules $x < A$ et $x < E-A$ sont fausses. L'espace topogène $[E, \mathcal{S}]$ est connexe si la structure topogène $\mathcal{S}$ sur E est connexe.*

On présente un exemple d'espace topogène connexe qui a le noyau vide et qui n'est ni parfait, ni symétrique. Considérons, sur l'ensemble E des nombres réels, la structure topogène $\mathcal{S} = \{<\}$, où $<$ est l'ordre topogène défini par (2), §1.

Proposition 2.1. *L'espace topogène $[E, \mathcal{S}]$ est connexe, a le noyau vide et n'est ni parfait, ni symétrique.*

La proposition 1.1 du §1 montre que $[E, \mathcal{S}]$ a le noyau vide, n'est ni parfait, ni symétrique. Il reste à montrer que $[E, \mathcal{S}]$ satisfait à l'axiome (C^*). Supposons par absurde que $[E, \mathcal{S}]$ ne satisfait pas à l'axiome (C^*). Il résulte qu'il y a un sous-ensemble propre A de E de sorte que, quel que soit $x \in E$, au moins l'une des formules suivantes soit vraie: $x < A$, $x < E-A$. Pour tout nombre réel $x \in A$, la formule $x < E-A$ étant en défaut, il suit que $x < A$. Si l'on tient compte de la définition de l'ordre topogène $<$, on déduit qu'on a $\sup A \leqslant \inf (E-A)$. D'une façon analogue on déduit $\sup (E-A) \leqslant \inf A$. Ces deux inégalités nous conduisent aux égalités $\inf A = \sup A = \inf (E-A) = \sup (E-A)$. Ces égalités étant contradictoires, il suit que l'espace topogène $[E, \mathcal{S}]$ est connexe. Avec cela, la proposition est démontrée.

2. On présente, dans le langage des structures topogènes, quelques notions et résultats de la théorie des espaces topologiques classiques connexes. Soit E un ensemble arbitraire, $\mathcal{S} = \{<\}$ une topologie sur E et τ la topologie classique associée à la topologie $\mathcal{S}$. Nous rappelons qu'un sous-ensemble $V \subset E$ s'appelle voisinage d'un point $x \in E$, si $x < V$.

Définition 2.2. *Un point $x \in E$ s'appelle point intérieur de l'ensemble A, si A est un voisinage de x. L'ensemble $\mathring{A}$ des points intérieurs de A s'appelle l'intérieur de A.*

Si l'on tient compte du fait que $\mathring{A} < A$ équivaut à $x < A$ pour tout $x \in A$ dans le cas où l'ordre $<$ est parfait, il résulte qu'un ensemble $A \subset E$ est ouvert si et seulement s'il coïncide avec son intérieur. Par conséquent, l'intérieur dans l'espace $[E, \mathcal{S}]$ coïncide avec l'intérieur dans l'espace $[E, \tau]$, où τ est la topologie classique associée à $\mathcal{S}$.

Définition 2.3. *Un point $x \in E$ s'appelle point adhérent à l'ensemble $A \subset E$ si la formule $x < E-A$ est fausse. L'ensemble $\bar{A}$ des points adhérents à l'ensemble A s'appelle fermeture de A.*

Remarques 2.1. Un ensemble $A \subset E$ est fermé si et seulement si du fait que $x < E-A$ n'est pas vraie, il résulte $x \in A$.

2.2. Un point $x \in E$ est un point frontière pour l'ensemble $A \subset E$ si et seulement si les formules $x < E-A$ et $x < A$ sont fausses. En utilisant les ordres topogènes, on démontre la proposition suivante.

Proposition 2.2. *Un sous-ensemble A de E est simultanément ouvert et fermé si et seulement si la frontière de A est vide.*

Si on suppose que $\mathrm{Fr}\,(A) = \emptyset$, alors quel que soit le point $x \in E$, on a soit $x < E-A$, soit $x < A$. Si $x \in A$, alors $x < E-A$ n'est pas vraie, donc $x < A$. L'ordre topogène $<$ étant parfait, on déduit que $A < A$. De façon similaire, on trouve que $E-A < E-A$ et par conséquent A est simultanément ouvert et fermé. Réciproquement, on suppose que A est à la fois ouvert et fermé donc il satisfait aux formules $A < A$, $E-A < E-A$. Pour tout $x \in A$ et tout $y \in E-A$, on aura $x < A$ et $y < E-A$ et, par conséquent, il ne peut y avoir nul point $x \in E$, de sorte que les formules $x < A$ et $x < E-A$ soient fausses. Donc $\mathrm{Fr}\,(A) = \emptyset$. Cela dit, la proposition est complètement démontrée.

On déduit, de la remarque 2.2 et de la proposition 2.2 la proposition suivante.

Proposition 2.3. *Un espace topologique $[E, \mathcal{S}]$ est connexe si et seulement si pour tout sous-ensemble propre A de E, on a $\mathrm{Fr}\,(A) \neq \emptyset$* (voir [3], page 79).

Dans le langage des structures associées, la proposition ci-dessus montre qu'un espace topologique classique $[E, \tau]$ este connexe si et seulement si la frontière de toute partie propre de E est non-vide.

Si l'on tient compte de la définition des ordres topogènes symétriques, on a la proposition suivante.

Proposition 2.4. *Tout espace topologique symétrique n'est pas connexe.*

Définition 2.4. *Une partie E_0 de l'espace topologique $[E, \mathcal{S}]$ est connexe si le sous-espace $[E_0, \mathcal{S}|E_0]$ est connexe.*

Si $\mathcal{S} = \{<\}$ alors l'ordre topogène $<_0 = <|E_0$ est défini par

$$A <_0 B \text{ si et seulement si } A < B \cup (E - E_0). \tag{7}$$

De (7) et de la formule $(E_0 - A) \cup (E - E_0) = E - A$ si $A \subset E_0$, on obtient la proposition suivante.

Proposition 2.5. *Un sous-ensemble E_0 de l'espace topologique $[E, \mathcal{S}]$ est connexe si et seulement si, quel que soit A — un sous-ensemble propre de E_0, il y a un point $x \in E_0$ de sorte que les formules $x < A \cup (E - E_0)$ et $x < E - A$ sont fausses.*

Corollaire 1. *Si E_0 est un ensemble connexe dans l'espace topologique $[E, \mathcal{S}]$, alors quel que soit un sous-ensemble propre A de E_0, il y a un point $x \in E_0$ de sorte que les formules $x < A$ et $x < E - A$ sont fausses.*

Corollaire 2. *Si E_0 est un ensemble connexe dans l'espace topologique $[E, \mathcal{S}]$, alors, quel que soit le sous-ensemble propre A de E_0, il y a un point $x \in E_0$ de sorte que les formules $x < A$ et $x < E - A$ ne sont pas vraies.*

Le corollaire 2 résulte du corollaire 1 si l'on tient compte du fait que $E_0 - A \subset E - A$.

Proposition 2.6. *Dans des espaces topologiques symétriques, il n'y a pas d'ensembles connexes.*

La démonstration résulte tout de suite de la proposition 2.5 et de l'égalité $(<|E_0)^c = <^c|E_0$, qui est vraie quel que soit l'ordre semi-topogène $<$ sur E et quel que soit l'ensemble $E_0 \subset E$.

3. On s'occupe maintenant de quelques propriétés des espaces topogènes symétriques connexes. Soit $\mathcal{S} = \{<\}$ une structure topogène symétrique définie sur un ensemble arbitraire E. Si $N_< \neq \emptyset$, alors l'axiome (C^c) ne peut plus être vérifié et, par conséquent, $[E, \mathcal{S}]$ est dans ce cas un espace topogène non-connexe. On a donc la proposition suivante.

Proposition 2.7. *Tout espace topogène symétrique $[E, \mathcal{S}]$ à noyau non-vide est non-connexe.*

On va présenter ci-dessous un exemple d'espace topogène symétrique non-connexe. Soit Σ une algèbre de sous-ensembles de E. Σ est un système de générateurs pour un ordre semi-topogène $<$ défini sur l'ensemble E, par ce que $\emptyset, E \in \Sigma$. Il résulte, des propriétés de l'algèbre, que $<$ est un ordre topogène symétrique. Si Σ a plus de deux éléments, alors $N_< \neq \emptyset$ et, par conséquent, l'espace topogène symétrique $[E, \{<\}]$ est non-connexe.

On considère de nouveau une structure topogène symétrique $\mathcal{S} = \{<\}$ définie sur un ensemble E. Soit $\mathcal{S}^p = \{<^p\}$ la topologie déduite de la structure topogène symétrique $\mathcal{S} = \{<\}$. Étant donné que les formules $x <^p A$ et $x < A$ sont équivalentes, on déduit qu'un espace topogène symétrique $[E, \mathcal{S}]$ est connexe si et seulement si l'espace topologique $[E, \mathcal{S}^p]$ est connexe. On a, part conséquent, la proposition suivante.

Proposition 2.8. *Un espace topogène symétrique $[E, \mathcal{S}]$ est connexe si et seulement si l'espace topologique $[E, \mathcal{S}^p]$ est connexe.*

On remarque qu'en général la topologie $\mathcal{S}^p$, déduite de la structure topogène symétrique $\mathcal{S}$, n'est pas symétrique.

Soit δ la structure de proximité associée à la structure topogène symétrique $\mathcal{S} = \{<\}$. La relation de proximité δ est définie par

(8) $A \delta B$ si et seulement si la formule $A < E - B$ est fausse.

Si l'on tient compte de (8), on déduira la proposition suivante de caractérisation des espaces topogènes symétriques, à l'aide des structures de proximités associées.

Proposition 2.9. *L'espace topogène symétrique $[E, \mathcal{S}]$ est connexe si et seulement si, quelle que soit la partie propre A de E, il y a un point $x \in E$ de sorte que les relations $x \delta A$ et $x \delta E - A$ soient vraies.*

Définition 2.5. *L'espace de proximité $[E, \delta]$ est connexe si l'espace topogène symétrique associé $[E, \mathcal{S}]$ est connexe.*

Un point $x \in E$, étant point adhérent à l'ensemble A dans l'espace de proximité $[E, \delta]$, s'il satisfait à la formule $x \delta A$ [4], on déduit la proposition suivante.

Proposition 2.10. *Un espace de proximité $[E, \delta]$ est connexe si et seulement si l'espace topologique classique $[E, \tau]$ associé à l'espace de proximité $[E, \delta]$ est connexe.*

L'espace topologique classique $[E, \tau]$ associé à un espace de proximité $[E, \delta]$ étant complètement régulier, il suit que si l'on part d'une algèbre Σ à plus de deux éléments, on obtient une topologie complètement régulière non-connexe.

BIBLIOGRAPHIE

1. Bourbaki N. — *Topologie générale*, chap. III, Hermann, Paris, 1965.
2. Császár A. — *Fondements de la topologie générale*. Akadémiai Kiado Budapest, 1960.
3. Kuratowski C.— *Topologie*, II, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1961.
4. Смирнов М. Ю. — *О пространствах близости*, Мат. Сборник, (31) 73, 1952 стр. 543–574.

CONEXIUNE ÎN SPAŢII TOPOGENE

Rezumat

În acest articol sînt tratate următoarele probleme:

Mai întîi, se defineşte noţiunea de nucleu al unei ordini semi-topogene şi se dau cîteva exemple de ordini semi-topogene cu nucleul vid. Apoi se introduce noţiunea de spaţiu topogen conex şi se dă un exemplu de spaţiu topogen conex care nu este nici perfect, nici simetric. După aceea, sînt prezentate, în limbajul structurilor topogene, cîteva rezultate cunoscute din teoria spaţiilor topologice clasice şi conexe. În final, se demonstrează o teoremă de caracterizare a spaţiilor topogene simetrice şi conexe cu ajutorul spaţiilor de proximitate.