FONCTIONS ASYMPTOTIQUEMENT PRESQUE-PÉRIODIQUES SUR LES GROUPES LOCALEMENT COMPACTS

PAR

ANCA PRECUPANU

Le but de ce travail est de généraliser la notion classique de fonction asymptotiquement presque-périodique (voir [3], p. 270—276) pour le cas d'un groupe localement compact et, en même temps, de donner certaines propriétés remarquables concernant cette espèce de fonctions.

Parmi ces propriétés, on distingue deux résultats synthétisés dans les théorèmes 3.3 et 3.4, qui caractérisent la notion en question pour un groupe σ-compact.

Pour pouvoir introduire la notion de fonction asymptotiquement presque-périodique (abrégé a. p. p.) sur un groupe localement compact, on utilise une compactification par deux points pour le groupe.

Dans [6], Magill a donné certaines conditions pour qu'un espace localement compact admette une compactification par un nombre fini de points. En appliquant le résultat du théorème 2.1 de [6] et en utilisant encore les cas particuliers indiqués dans la section 3 du même travail, on voit qu'il existe des groupes localement compacts qui admettent des compactifications par deux points.

§ 1. Soit G un groupe commutatif localement compact, qui admet une compactification par deux points ω_1 et ω_2.

En vertu du théorème 2.1 de [6], G admet une 2-étoile, c'est-à-dire il existe une partition pour G, formée par deux ensembles ouverts D_1 et D_2 et un ensemble compact K_0, telle que:

$$G = D_1 \cup D_2 \cup K_0. \tag{1}$$

Du même théorème cité il résulte aussi que les voisinages de ω_1 (respectivement ω_2) sont tels que

(2) $$V_{\omega_1} = (G \setminus \tilde{K}) \cap D_1 (\text{resp. } (G \setminus \tilde{K}) \cap D_2),$$

où $\tilde{K}$ est un ensemble compact de G tel que $\tilde{K} \supset K_0$ et donc D_1 (resp. D_2) est lui-même un voisinage de ω_1 (resp. ω_2); en outre, les ensembles $D_1 \cup K_0 \cup \{\omega_1\}$ et $D_2 \cup K_0 \cup \{\omega_2\}$ sont compacts dans la compactification de G. On désigne encore par $S_1 = D_1 \cup K_0$ et par $S_2 = D_2 \cup K_0$ et alors (1) devient:

(3) $$G = S_1 \cup S_2.$$

Pour que la décomposition (1) soit compatible avec la structure du groupe G, nous demanderons l'accomplissement de la condition suivante:

(C) Pour chaque couple de suites généralisées $\{x_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ et $\{y_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ de G, où $x_\gamma \to x_0$ et $y_\gamma \to \omega_i$ $i = 1, 2$), on a $x_\gamma y_\gamma \to \omega_i$ où $i = 1, 2$(x_0 peut être éventuellement ω_i).

Comme toutes les propriétés données pour ω_1 restent aussi vraies pour ω_2, dans ce qui suit nous les formulerons seulement pour ω_1.

De la condition (C) de compatibilité il résulte:

Lemme 1.1. a) *La famille $\{tS_1;\ t \in G\}$ est un fondamental de voisinages pour ω_1; en outre, pour chaque suite généralisée $\{t_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ convergente à ω_1, la famille $\{t_\gamma S_1;\ \gamma \in \Gamma\}$ forme un système fondamental de voisinages pour ω_1:*

b) *Pour chaque ensemble compact $K \subset G$, il existe un élément $t \in G$ tel que $tK \subset S_1$.*

c) *Il existe un élément t de G tel que tS_1 soit un demi-groupe.*

Démonstration. a) Démontrons d'abord que tS_1 est un voisinage de ω_1 pour chaque $t \in G$, c'est-à-dire pour chaque $t \in G$ il existe un voisinage V_{ω_1} de ω_1 tel que $V_{\omega_1} \subset tS_1$. En cas contraire, pour chaque V_{ω_1} il existerait un élément $x_v \in V_{\omega_1}$, tel que $x_v \notin tS_1$.

Mais $\{x_v;\ V \in \mathcal{V}(\omega_1)\}$ est une suite généralisée convergente vers ω_1 et donc $x_v t^{-1} \to \omega_1$; comme l'ensemble S_1 est un voisinage de ω_1, il résulte qu'il existe x_v tel que $x_v t^{-1} \in S_1$, c'est-à-dire $x_v \in tS_1$, ce qui est impossible.

Montrons maintenant que si $\{t_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ est une suite généralisée arbitraire convergente vers ω_1, alors pour chaque voisinage V_{ω_1} de ω_1 il existe γ tel que $t_\gamma S_1 \subset V_{\omega_1}$.

S'il n'existait pas γ avec cette propriété alors pour chaque γ on pourrait indiquer un élément $s_{1\gamma}$ tel que:

(4) $$s_{1\gamma} \in S_1 \text{ et } t_\gamma s_{1\gamma} \notin V_{\omega_1}.$$

Mais $\{s_{1\gamma};\ \gamma \in \Gamma\}$ est une suite généralisée d'éléments appartenant à S_1 et comme $S_1 \cup \{\omega_1\}$ est un ensemble compact, on peut extraire de $s_{1\gamma}$ une sous-suite généralisée convergente $\{s_{1\gamma'};\ \gamma' \in \Gamma'\}$ (éventuellement avec la limite ω_1), d'où, en utilisant (C), il résulte $t_\gamma s_{1\gamma'} \to \omega_1$ ce qui contredit la relation (4).

b) Nous démontrerons aussi par contradiction l'affirmation b). En effet supposons qu'il existe un ensemble compact $K \subset G$ tel que pour chaque $t \in G$ on peut indiquer un élément $k_t \in K$ pour lequel $tk_t \notin S_1$.

Maintenant si $t = t_\gamma$, où $\{t_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ est une suite généralisée qui tend vers ω_1, k_{t_γ} contient une sous-suite généralisée convergente $k_{t_{\gamma'}}$ et donc $t_{\gamma'} k_{t_{\gamma'}} \to \omega_1$, contrairement à l'hypothèse faite.

c) Tout d'abord on remarque qu'il existe $t \in G$ tel que $tS_1 S_1 \subset S_1$.

Maintenant supposons que l'affirmation c) ne serait pas vraie, donc pour chaque t il existeraient s_1' et s_1'' tels que $ts_1' s_1'' \notin S_1$.

Si, de nouveau, $t = t_\gamma$ où $\{t_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ est une suite généralisée convergente vers ω_1, alors $s_{1\gamma}'$ correspondante contient une sous-suite généralisée convergente (éventuellement vers ω_1), et $s_{1\gamma'}'$ et $s_{1\gamma'}''$ contient à son tour une sous-suite $s_{1\gamma''}''$ convergente (éventuellement vers ω_1). Évidemment, il résulte que $t_{\gamma''} s_{1\gamma''}' s_{1\gamma''}'' \to \omega_1$ contredisant le choix de t_γ tel que $t_\gamma s_{1\gamma}' s_{1\gamma}'' \notin S_1$ pour chaque γ. Comme $tS_1 . S_1 \subset S_1$, on voit que tS_1 est demi-groupe parce que $tS_1 . tS_1 \subset tS_1$.

§ 2. Dans cette section nous allons introduire la notion de fonction asymptotiquement presque-périodique sur un groupe localement compact qui admet une compactification par deux points et nous allons montrer aussi que les fonctions a. p. p. sont bornées et uniformément continues.

Soit G un groupe localement compact, abélien qui admet une compactification par deux points, c'est-à-dire pour lequel la condition donnée par (1) ou (3) est remplie.

On désigne par:

$\mathcal{E}(S_1)$ la famille de fonctions continues sur S_1 avec les valeurs dans C, l'ensemble des nombres complexes et par

$\mathcal{E}_0(S_1)$ l'ensemble de fonctions $f(x)$ continues sur S_1 avec les valeurs dans C qui tendent vers 0 pour x tendant vers ω_1.

Définition 2.1. *On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{E}(S_1)$ est une fonction asymptotiquement presque-périodique (a. p. p.) si pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble compact K et un voisinage V_{ω_1} de ω_1 tels que pour chaque $s \in G$, sK contient un élément τ pour lequel*

(5) $$|f(\tau x) - f(x)| < \varepsilon \text{ lorsque } x \in V_{\omega_1} \text{ et } \tau x \in V_{\omega_1}.$$

Compte tenu du lemme 1.1 (a), on peut donner immédiatement une définition équivalente:

Définition 2.2. *On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{E}(S_1)$ est une fonction asymptotiquement presque-périodique (a. p. p.) si pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble compact K et un élément $t \in G$ tels que pour chaque $s \in G$, sK contient un élément τ pour lequel:*

(5') $$|f(\tau x) - f(x)| < \varepsilon \text{ lorsque } \tau x \in tS_1 \text{ et } x \in tS_1.$$

On désigne par $AP(S_1)$ l'espace des fonctions a. p. p. définies sur S_1.

Remarques. 1. En vertu du lemme 1.1 (b) on peut supposer, sans diminuer la généralité, que l'ensemble compact K qui entre dans la définition 2.1 est contenu en V_{ω_1}. En effet si l'ensemble K n'était pas inclus dans V_{ω_1}, il existerait une translatée de lui avec cette propriété.

2. On voit, de même, de la définition 2.1, que la restriction à S_1 de chaque fonction presque-périodique au sens de von Neumann, définie sur G, est une fonction a. p. p. [1]).

3. En appliquant la définition 2.1, on remarque que la famille des fonctions définies et continues sur S_1 de façon que $f = p + q$, où p est la restriction à S_1 d'une fonction presque-périodique au sens de von Neumann définie sur G, et $q \in \mathcal{E}_0(S_1)$, nous donne un autre exemple très utile de fonction a. p. p.

4. On voit sans peine que dans la définition de la notion de fonction a. p. p. sur un groupe localement compact le fait que f est définie sur S_1 n'est pas essentiel; f pourrait être définie sur chaque translatée tS_1 de S_1 avec $t \in G$. Si on désigne par $AP(tS_1)$ l'espace des fonctions a. p. p. définies sur tS_1 pour chaque $t \in G$, alors, grâce à l'isomorphisme F_t: $AP(S_1) \to AP(tS_1)$ défini par $F_t(f) = g$, où $g(x) = f(t^{-1}x)$ pour $x \in S_1$, nous pouvons opérer seulement avec des fonctions de $AP(S_1)$ en gardant toute la généralité des résultats.

Plus précisément, si on introduit sur l'ensemble $AP^{\omega_1}(G) = \bigcup_{t \in G} AP(tS_1)$ la relation d'équivalence ρ définie par $f\rho g$ si et seulement si g est une translatée de f, alors l'espace-quotient $AP^{\omega_1}(G)/\rho$ est isomorphe avec chaque espace $AP(tS_1)$.

En utilisant la définition 2.1 et les remarques faites, montrons deux propriétés importantes des fonctions a. p. p. données par les théorèmes 2.3 et 2.4.

Théorème 2.3. *Chaque fonction a. p. p. est bornée sur S_1.*

Démonstration. Soient $f \in AP(S_1)$ et ε un nombre positif arbitraire. Alors, en vertu de la définition 2.1, il existe K et V_{ω_1} tels que pour chaque $s \in G$, sK contient au moins un élément pour lequel on a la relation (5).

Soient $x \in V_{\omega_1}$ arbitraire et $K_1 = Kx^{-1}$. De la définition 2.1 on déduit qu'il existe un élément $\tau \in K_1$ tel que:

$$|f(\tau x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{parce que} \quad \tau x \in V_{\omega_1}$$

($\tau \in K_1$ entraîne $\tau x \in K$ et grâce à la remarque 2, il résulte $\tau x \in V_{\omega_1}$), d'où en désignant par $M_1 = \sup_{x \in K} |f(x)|$ on obtient:

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(\tau x)| + |f(\tau x)| < \varepsilon + M_1. \tag{6}$$

[1]) Pour tout ce qui concerne la théorie générale des fonctions presque-périodique sur les groupes localement compacts voir [1] et [9].

Mais comme un voisinage de ω_1 est donné par $V_{\omega_1} = (G \setminus \tilde{K}) \cap D_1$, où $\tilde{K}$ est un ensemble compact de G, il résulte que $S_1 \setminus V_{\omega_1} = [S_1 \cap \tilde{K}] \cup K_0$ est aussi un ensemble compact, ce qui entraîne le fait que f est bornée sur S_1 / V_{ω_1}.

Désignant par $M_2 = \sup_{x \in S_1/V_{\omega_1}} |f(x)|$ et en utilisant (4), on obtient enfin

$$|f(x)| < M = \max\{M_1 + \varepsilon, M_2\} \quad \text{pour chaque } x \in S_1. \tag{7}$$

Théorème 2.4. *Une fonction a. p. p. est uniformément continue sur S_1.*

Démonstration. Soit $f \in AP(S_1)$. Nous allons montrer que pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage de e (l'unité du groupe), $U(e)$, tel que:

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{pour chaque couple d'éléments } x, y \in S_1 \text{ tels que} \tag{8}$$
$$x^{-1}y \in U(e).$$

Il est clair que f est uniformément continue sur l'ensemble compact $S_1 \setminus V_{\omega_1}$. Il reste à prouver la propriété de l'énoncé pour f, sur l'ensemble V_{ω_1}.

Soient $x, y \in V_{\omega_1}$ tels que $x^{-1}y \in V(e)$, où $V(e)$ est un voisinage de l'unité de G. Soient aussi ε arbitraire positif et K l'ensemble compacs correspondant d'après la définition 2.1. Pour chaque couple d'ensemble K et $V(e)$ soit $K_1 = b^{-1}KV(e)$ où b est un élément de G convenablement choisi tel que $K_1 \subseteq V_{\omega_1}$ (il existe au moins un élément $b \in G$ avec cette propriété grâce au lemme 1.1(b)).

Comme f est une fonction continue sur S_1, il en est de même sur K_1 et donc pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage de l'unité, $U_1(e)$ tel que $U_1(e) \subseteq V(e)$ et

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pour chaque couple d'éléments } x, y \in K_1 \text{ tels} \tag{9}$$
$$\text{que } x^{-1}y \in U_1(e).$$

Soient, maintenant, x, y arbitraires de V_{ω_1} tels que $x^{-1}y \in U_1(e)$, f étant une fonction a. p. p. définie sur S_1, l'ensemble $b^{-1}Kx^{-1}$ contient au moins un point τ pour lequel on a:

$$|f(\tau x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{parce que } \tau x \in V_{\omega_1} \text{ et } x \in V_{\omega_1} \tag{10}$$

($\tau x \in V_{\omega_1}$ parce que $\tau \in b^{-1}Kx^{-1}$ entraîne $\tau x \in b^{-1}K \subseteq b^{-1}KV(e) = K_1 \subseteq V_{\omega_1}$).

D'autre part, $y \in xV_1(e)$ et donc $\tau y \in \tau x U_1(e) \subseteq b^{-1}KU_1 \subseteq K_1 \subseteq V_{\omega_1}$ et alors on a aussi:

$$|f(\tau y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{11}$$

Mais comme τx et τy se trouvent dans K_1 et $(\tau x)^{-1}\tau y = x^{-1}y \in U_1(e)$, en vertu de la continuité uniforme de f sur K_1 on obtient:

$$|f(\tau y) - f(\tau x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{12}$$

Enfin, en combinant les relations (10), (11) et (12) on trouve:

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad x, y \in V_{\omega_1} \quad \text{et} \quad x^{-1}y \in U_1(e), \tag{13}$$

ce qui termine la démonstration.

En utilisant maintenant la propriété donnée par le théorème précédent sur $tS_1 \subseteq S_1$, il résulte aussitôt une autre définition équivalente pour les fonctions a. p p.

Définition 2.5. *On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{C}(S_1)$ est a. p. p. si pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $s_i \in G$, en nombre fini, et $t \in G$ tels que, quel que soit $s \in G$, on ait pour au moins une valeur de i:*

$$|f(sx) - f(s_i x)| < \varepsilon \text{ lorsque } sx \in tS_1 \text{ et } s_i x \in tS_1. \tag{14}$$

En effet, supposons d'abord que $f \in \mathcal{C}(S_1)$ est une fonction a. p. p. au sens de la définition 2.2; alors pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble compact K et un élément $t \in G$ tels que, pour chaque $s \in G$, sK contient un élément τ pour lequel:

$$|f(\tau y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ lorsque } \tau y \in tS_1 \text{ et } y \in tS_1$$

d'où compte tenu de $\tau = sk$(où $k \in K$) et en désignant $x = ky$ il résulte:

$$|f(sx) - f(k^{-1}x) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ lorsque } sx \in tS_1 \text{ et } k^{-1}x \in tS_1. \tag{15}$$

D'autre part, pour chaque $k^{-1} \in K^{-1}$ on peut faire correspondre, en vertu du théorème 2.4, un voisinage $V_{k^{-1}} \in \mathcal{V}(k^{-1})$ pour lequel on ait

$$|f(k^{-1}x) - f(k'x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ lorsque } k' \in V_{k^{-1}},\ k^{-1}x \in tS_1 \text{ et } k'x \in tS_1. \tag{16}$$

Mais comme $\bigcup_{k \in K} V_{k^{-1}} \supset K^{-1}$, il existe $s_i \in K^{-1}$, en nombre fini, tels que $\bigcup_{i=1}^{n} V_{s_i} \supset K^{-1}$. Il en résulte que pour tout $k^{-1} \in K^{-1}$ il existe au moins un s_i tel que $k^{-1} \in V_{s_i}$ et donc:

$$|f(k^{-1}x) - f(s_i x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } k^{-1}x \in tS_1 \text{ et } s_i x \in tS_1. \tag{17}$$

Enfin, en combinant (17) avec (15), il résulte (14), donc la définition entraîne la définition 2.5.

Il est clair que la définition 2.5 entraîne la définition 2.2 en remarquant que les ensembles finis sont compacts.

Remarques. 1. Dans les définitions 2.1, 2.2 et 2.5, t n'est pas essentiel, donc nous pouvons prendre toujours $t = e$ en gardant toute la généralité; ceci est possible parce qu'une fonction est a. p. p. si et seulement s'il existe une translatée de cette fonction avec cette propriété.

2. On voit aussi que dans la définition 2.5 on peut considérer $s \in S_1$ parce que cette condition entraîne la propriété pour chaque $s \in G$.

En effet, si f satisfait aux conditions de la définition 2.5 avec $s \in S_1$ alors s_i et s_i^{-1} forment un ε-réseau pour $S_1 \cup S_1^{-1}$. Mais $G \setminus (S_1 \cup S_1^{-1})$ est contenu dans un ensemble compact K, d'où grâce à l'uniforme continuité de f il existe un ε-réseau $\{u_j;\ j = 1, 2, \ldots m\}$ pour l'ensemble $G \setminus (S_1 \cup S_1^{-1})$; donc l'ensemble formé par $s_i (i = 1, 2, \ldots, n)$, s_i^{-1} et $u_j (j = 1, 2, \ldots m)$ donne un ε-réseau fini sur G.

De plus, on peut considérer $s \in uS_1$ pour u arbitrairement fixé dans G.

§ 3. Dans ce qui suit, nous allons donner deux propriétés caractéristiques pour les fonctions a. p. p. définies sur un groupe σ-compact.

Pour les considérations de ce paragraphe, nous avons besoin d'un résultat auxiliaire que voici:

Lemme 3.1. *Soit G un groupe localement compact qui admet une compactification par deux points pour laquelle la condition* (C) *de compatibilité est remplie. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes:*

a) *G est un groupe σ-compact.*

b) *Les points ω_i $(i = 1, 2)$ possèdent des systèmes fondamentaux dénombrables de voisinages.*

c) *Il existe deux suites $\{x_n;\ n \in N\}$ et $\{y_n;\ n \in N\}$ telles que $x_n \to \omega_1$ et $y_n \to \omega_2$.*

Démonstration. Grâce au lemme 1.1 (a) les conditions b) et c) de ce lemme sont évidemment équivalentes.

Il reste à prouver l'équivalence entre les affirmations a) et b).

Compte tenu de la forme (2) des voisinages pour les deux points ω_i $(i = 1, 2)$, on voit aisément que a) entraîne b).

Inversement, b) entraîne a) parce qu'en vertu de la même relation (2), il résulte que pour chaque ensemble compact K il existe un voisinage V_n de ω_1 tel que:

$$V_n \subseteq (G \setminus K) \cap D_1. \tag{18}$$

D'autre part comme V_n sont des ensembles d'un système fondamental, il existe un ensemble compact K_n pour lequel on a:

$$(G \setminus K_n) \cap D_1 \subseteq V_n. \tag{19}$$

D'après les relations (18) et (19) on obtient:

$$(G \setminus K_n) \cap D_1 \subseteq (G \setminus K) \cap D_1. \tag{20}$$

Par analogie on peut construire les ensembles compacts K_m tels que

$$(G \setminus K_m) \cap D_2 \subseteq (G \setminus K) \cap D_2. \tag{21}$$

Maintenant, pour prouver que G est un groupe σ-compact, il suffit de démontrer que G est une réunion d'ensembles compacts de type K_n (voir (20)), de type K'_m (voir (21)) et K_0 (voir (1)), ce qui revient à montrer que pour chaque ensemble compact $K \subseteq G$ il y a les ensembles K_n et K'_m tels que:

$$K \subseteq K_n \cup K'_n \cup K_0. \tag{22}$$

De la relation (20) on obtient $K \cup (G - D_1) \subseteq K_n \cup (G - D_1)$ et comme $(K \cap D_1) \cap (G - D_1) = \Phi$, il résulte que $K \cap D_1 \subseteq K_n$. Par analogie avec ce cas, on obtient $K \cap D_2 \subseteq K'_m$ et en tenant compte que:

$$K = K \cap G = (K \cap D_1) \cup (K \cap D_2) \cup (K \cap K_0), \tag{23}$$

il résulte (22).

En vertu de la dernière affirmation du lemme précédent on peut introduire la notion de fonction asymptotiquement normale sur G.

Définition 3.2. *On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{E}(S_1)$ est asymptotiquement normale si de toute suite $\{s_n;\ n \in N\}$ d'éléments de G convergente vers ω_1, on peut extraire une sous-suite $\{s_{k_n};\ n \in N\}$ telle que la suite correspondante $\{s_{k_n} f;\ n \in N\}$ des translatées de f soit uniformément convergente sur tS_1 pour chaque $t \in G$.*

A l'aide de la définition 3.2 nous allons démontrer que les notions de fonction a. p. p. et de fonction asymptotiquement normale sont équivalentes pour le cas d'un groupe σ-compact. On a donc:

Théorème 3.3. *Si G est un groupe σ-compact, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f \in \mathcal{E}(S_1)$ soit a.p.p. est que f soit asymptotiquement normale.*

Démonstration. Montrons d'abord la nécessité. Soit $f \in \mathcal{E}(S_1)$ une fonction a. p. p. au sens de la définition 2.5. Alors pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe s_i, en nombre fini, et $t \in G$, tels que, quel que soit $s \in G$, on ait pour au moins une valeur de i la relation (14).

Soit a un élément fixé de G et s' un autre élément tel que $s = as'$. En utilisant la dernière relation, (14) devient:

$$|f(as'x) - f(s_i a^{-1} ax)| < \varepsilon \text{ pour } as'x \in tS_1 \text{ et } s_i x \in tS_1. \tag{24}$$

En désignant par $y = ax$ et $s'_i = s_i a^{-1}$ on obtient encore:

$$|f(s'y) - f(s'_i y)| < \varepsilon \text{ si } s'y \in tS_1 \text{ et } s'_i y \in tS_1, \tag{25}$$

ce qui montre que la définition 2.5 reste vraie pour chaque translation appliquée à un ε-réseau $\{s_i;\ i = 1, 2, \ldots, m\}$.

Avec cette remarque on peut supposer toujours que le réseau se trouve dans une translatée de S_1 convenablement choisie.

Soient maintenant une suite arbitraire h_n tendant vers ω_1 et u, un élément fixe de G.

Alors pour $\varepsilon = 1/2$ il existe $t \in G$ et un $1/2$-réseau qui est formé par les points $\{s_i;\ i = 1, 2, \ldots, m\}$ tels que $s_i S_1 \subseteq u^{-1} tS_1$. Donc il existe au moins un élément s_{i_0} et une sous-suite $\{h_{n1};\ n \in N\}$ de h_n telle que:

$$|f(h_{n1}x) - f(s_{i_0}x)| < \frac{1}{2} \tag{26}$$

pour chaque $x \in uS_1$ ($x \in uS_1$ entraîne $h_{n1}x \in h_{n1}uS_1 \subseteq tS_1$ et $s_{i_0}x \in s_{i_0}uS_1 \subseteq tS_1$) et donc pour $m > n$ on a:

$$|f(h_{n1}x) - f(h_{m1}x)| < 1 \tag{27}$$

pour chaque $x \in uS_1$.

Nous allons trouver par récurrence une suite de suites $\{h_{nj};\ n \in N\}$ où h_{nj} est une sous-suite de h_{nj-1} pour chaque $j = 1, 2, \ldots$ et de plus on a:

$$|f(h_{nj}x) - f(h_{mj}x)| < \frac{1}{2^{j-1}} \tag{28}$$

pour chaque $x \in uS_1$ et $j = 1, 2, \ldots, m > n$.

On remarque que la suite $\{f(h_{nn}x);\ n \in N\}$ correspondante à la suite diagonale h_{nn} est uniformément convergente sur uS_1 parce qu'on a:

$$|f(h_{nn}x) - f(h_{mm}x)| < \frac{1}{2^{n-2}} \tag{29}$$

pour $m > n$ et chaque $x \in uS_1$.

En outre nous allons prouver qu'on peut extraire une sous-suite de h_n telle que $\{f(h_n x)\}$ correspondante soit uniformément convergente sur uS_1 pour chaque $u \in G$.

On voit qu'il suffit de démontrer cette propriété pour chaque $u_m S_1$ où $\{u_m;\ m \in N\}$ est une suite convergente vers ω_2. En effet si u est un élément arbitraire de G il existe u_{m_0} tel que $u.S_1 \subseteq u_{m_0} S_1$, grâce au lemme 1.1 (a)

Soit la suite $u_m \to \omega_2$, qui peut être choisie telle que $u_m S_1 \subseteq u_{m+1} S_1$.

On désigne par $k_n = h_{nn}$. Soit k_{n1} la sous-suite de k_n telle que $f(k_n x)$ converge uniformément sur $u_1 S_1$ et k_{n2} la sous-suite de k_{n1} telle que $f(k_{n2}x)$ soit uniformément convergente sur $u_2 S_1$.

Par réccurence on peut construire les sous-suites k_{nm} telles que k_{nm} soit une sous-suite de k_{nm-1} et $f(k_{nm}x)$ soit uniformément convergente sur $u_m S_1$.

Désignant $l_n = k_{nn}$, on remarque que $f(l_n x)$ est uniformément convergente sur chaque $u_m S_1$, parce que pour n assez grand on a $l_n x \in S_1$ pour $x \in u_m S_1$ et l_n est une sous-suite de k_{nm} pour laquelle on a, grâce aux considérations déjà faites, la convergence uniforme sur $u_m S_1$. Ceci

montre que $f(l_n x)$ est uniformément convergente sur uS_1 pour chaque $u \in G$ et donc f est une fonction asymptotiquement normale.

Réciproquement, si $f \in \mathcal{E}(S_1)$ est une fonction asymptotiquement normale nous allons prouver que f est a. p. p. Nous allons raisonner par l'absurde. Si f n'était pas a. p. p. il y aurait un nombre $\varepsilon_0 > 0$ pour lequel les conditions de la définition 2.5 ne seraient pas remplies, c'est-à-dire il n'existerait pas de ε_0-réseaux finis. Soit t_n une suite convergente vers ω_1. Alors grâce à la remarque 2 qui suit la définition 2.5 il résulte qu'on peut prendre $s \in t_2 S_1$ (au lieu de $s \in G$) et donc pour $s_1 \in S$ on trouve $s_2 \in t_2 S_1$ tel que :

$$\sup_{\substack{s_1 x \in t_2 S_1 \\ s_2 x \in t_2 S_1}} |f(s_1 x) - f(s_2 x)| \geq \varepsilon_0 .$$

Par réccurence, on peut construire une suite $\{s_n;\ n \in N\}$ avec $s_n \in t_n S_1$ pour laquelle on ait :

$$\sup_{\substack{s_n x \in t_m S_1 \\ s_m x \in t_m S_1}} |f(s_n x) - f(s_m x)| \geq \varepsilon_0, \text{ pour } m > n,$$

et donc la suite $f(s_n x)$ ne peut pas contenir des sous-suites fondamentales sur $t_n S_1$.

D'autre part, on voit que la suite obtenue s_n est convergente vers ω_1 et par suite le résultat précédent contredit le fait que f est asymptotiquement normale.

Cela termine la démonstration.

Une autre propriété caractéristique pour les fonctions a. p. p. sur un groupe σ-compact est donné par le

Théorème 3.4. *Si G est un groupe σ-compact, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f \in \mathcal{E}(S_1)$ soit a. p. p. est que cette fonction peut être représentée d'une manière unique sous la forme*

$$f(x) = p(x) + q(x) \text{ pour chaque } x \in S_1, \tag{30}$$

où p est une fonction presque-périodique sur G et q est une fonction appartenant à $\mathcal{E}_0(S_1)$.

Démonstration. La condition est nécessaire car si $\{h_n\}_{n \in N}$ est une suite de G convergente vers ω_1, alors grâce au théorème précédent il existe une sous-suite k_n de l_n telle que $\{s_n f\}_{n \in N}$ soit uniformément convergente sur chaque tS_1.

On note que $G = \bigcup_{t \in G} tS_1$ ce qui entraîne que la fonction limite $p(x)$ de la suite $f(k_n x)$ est définie sur le groupe entier G et donc on a

$$p(x) = \lim_{n \to \infty} f(k_n x) \text{ pour chaque } x \in G. \tag{31}$$

Montrons maintenant que la fonction $p(x)$ donnée par (31) est une fonction presque-périodique sur G. En effet, de la définition 2.5 pour les fonctions

a. p. p. il résulte que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $s_i \in G$, en nombre fini, tels que, quel que soit $s \in G$, on ait pour au moins une valeur de i la relation (14).

Soient $s, y \in G$ fixés et s_i l'élément correspondant à s par la définition 2.5.

Si l'on prend comme x dans la relation (14) les produits $h_n y$ pour $n > n_0$, alors on obtient :

$$|f(sh_n y) - f(s_i h_n y)| < \varepsilon \tag{32}$$

puisque $sh_n y \in S_1$ et $s_i h_n y \in S_1$.

Dans la relation (32) on fait $n \to \infty$ et alors, en utilisant (31), on a

$$|p(sy) - p(s_i y)| < \varepsilon \quad \text{pour } y \in G, \tag{33}$$

ce qui montre que p est une fonction presque-périodique sur G.

En second lieu, montrons qu'il existe une fonction p presque-périodique sur G telle que $f(x) - p(x) \to 0$ pour $x \to \omega_1$. En effet, soit $\{\varepsilon_n\}_{n \in N}$ une suite de nombres positifs convergente vers 0 ; ensuite, en appliquant la définition 2.1 pour f avec ces ε_n on voit qu'il existe une suite d'ensembles compacts K_n (sans diminuer la généralité nous la pouvons supposer ascendante) et une suite V_n de voisinages de ω_1 tels que pour chaque $s \in G$, sK_n contienne un élément τ pour lequel on ait (5). Choisissons convenablement les points $s \in G$ tels que les éléments τ_n correspondants à sK_n forment une suite convergente à ω_1.

Donc pour de tels τ_n, on a

$$|f(\tau_n x) - f(x)| < \varepsilon_n \text{ si } \tau_n x \in V_n \text{ et } x \in V_n. \tag{34}$$

Alors, il existe une sous-suite $\{\tau'_n\}$ de $\{\tau_n\}$ telle que $\{\tau'_n f\}$ soit uniformément convergente vers une fonction presque-périodique p, définie sur G.

En vertu de (34) et de l'uniforme continuité sur chaque V_n de la suite $\{f(\tau'_n x)\}_{n \in N}$ on obtient

$$|f(x) - p(x)| \leq |f(x) - f(\tau'_n x)| + |f(\tau'_n f) - p(x)| \leq \varepsilon_n + \varepsilon_n,$$

$$\text{pour } x \in V_n.$$

Désignons par $q(x) = f(x) - p(x)$ pour chaque $x \in S_1$. Il est évident que $q \in \mathcal{E}_0(S_1)$ et donc la relation (30) a lieu dans les hypothèses du théorème. Pour finir la démonstration de la nécessité, il reste à prouver que la décomposition (30) est unique.

Supposons qu'il existerait deux décompositions du type (30) pour $f(x)$; alors on aurait

$$f(x) = p(x) + q(x) = p_1(x) + q_1(x),$$

où p, p_1 sont des fonctions presque-périodiques sur G et q, $q_1 \in \mathcal{E}_0(S_1)$. Il en résulte que $p(x) - p_1(x) = q_1(x) - q(x)$ et donc la fonction presque-

périodique $p(x) - p_1(x)$ tend vers 0 pour $x \to \omega_1$ ce qui entraîne $p(x) - p_1(x) \equiv 0$.

Le fait que la condition est nécessaire résulte en utilisant la remarque 4 faite après la définition 2.2.

Remarques. 1. Les résultats contenus dans les théorèmes 3.3 et 3.4 peuvent être généralisés dans certaines conditions pour le cas d'un groupe localement compact qui n'est pas σ-compact, en prenant, au lieu des suites, des suites généralisées, en admettant en même temps l'axiome de Zermelo.

Les démonstrations données plus haut pour les deux théorèmes sont indépendantes de cet axiome.

2. Si G est un groupe arbitraire localement compact (en général, non-σ-compact) qui admet une compactification par deux points et en même temps une 2-étoile particulière de façon que:

$$G = D_1 \cup D_2 \cup \{e\}, \tag{32}$$

où D_1 est un demi-groupe et $D_2 = \{s;\ s \in G,\ s^{-1} \in D_1\}$, alors on peut introduire sur G une relation d'ordre totale en convenant de dire que $y \leq x$ si et seulement si $xy^{-1} \in D_1$.

On peut traiter ce cas en suivant sans aucune modification la démonstration donnée dans [3].

3. Tous les résultats de cette Note peuvent être généralisés, en opérant des modifications convenables, en prenant au lieu de C comme l'ensemble des valeurs pour les fonctions a. p. p. un espace de Banach ou justement un espace localement convexe.

On voit aussi que le théorème de décomposition 3.4 est étroitement lié à un résultat de K. de Leeuw et F. Glicksberg ([4], th, 5.7); en effet, si S_1 est un demi-groupe, alors une fonction $f \in \mathcal{E}(S_1)$ est a. p. p. si et seulement si f est une fonction presque-périodique sur S_1 au sens de la définition de [5] en vertu de la remarque 2 après la définition 2.5.

BIBLIOGRAPHIE

1. Corduneanu C. — *Almost-periodic functions.* John Wiley, New York, 1968.
2. Fan Ky — *Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques d'une variable entière et leur application à l'étude de l'itération des transformations continues.* Math. Zts., 3, 48 (1942), pp. 685–711.
3. Hafanay A. — *Introducere în teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale.* Ed. tehnică, București, 1956.
4. de Leeuw K. and Glicksberg F. — *Almost periodic compactifications.* Acta Math., 105 (1961), pp. 69–97.
5. de Leeuw K. and Glicksberg F. — *Almost periodic functions on semigroups.* Acta Math., 105 (1961), pp. 99–140.
6. Magill K. D. — *N-point-compactifications.* Amer. Math. Monthly, 75 (1965).
7. von Neumann J. — *Almost periodic functions in a group.* I. Trans. Amer. Math. Soc., t. 36 (1934), pp. 445–492.

8. Precupanu A. — *Fonctions et suites asymptotiquement presque-périodiques avec des valeurs dans un espace de Banach,* An. şt. Univ. Iaşi, Matematică, t. XV (1969), pp. 29–38.
9. Weil A. — *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications.* Herman, Paris, 1965.

FUNCȚII ASIMPTOTIC APROAPE PERIODICE PE GRUPURI LOCAL COMPACTE

Rezumat

Scopul acestei Note este de a extinde noțiunea de funcție asimptotic aproape periodică (prescurtat a. p. p.) la un grup local compact, care admite un compactificat prin două puncte și de a prezenta în același timp anumite proprietăți remarcabile ale acestor funcții. După o scurtă introducere, Nota conține 3 paragrafe.

În § 1, după ce se impune condiția (C) de compatibilitate a compactificării prin două puncte a unui grup local compact cu structura de grup, se demonstrează lema 1.1 necesară introducerii noțiunii de funcție asimptotic aproape periodică pe un grup G.

În § 2 se introduce noțiunea de funcție a. p. p. pe un grup G și se arată că o asemenea funcție este mărginită și uniform continuă (teoremele 2.3 și 2.4). Datorită uniformei continuități a funcțiilor a. p. p. se dă o a doua definiție echivalentă (definiția 2.5) pentru noțiunea introdusă.

Ultimul paragraf cuprinde două teoreme de caracterizare a funcțiilor a. p. p. pentru cazul în care grupul G este σ-compact.