FUNCŢII $\mathfrak{M}^p$-ASIMPTOTIC APROAPE PERIODICE

DE

ANCA PRECUPANU

În teza sa de doctorat, [1], J. P. Bertrandias se ocupă de diferit noţiuni de aproape periodicitate a funcţiilor mărginite în medie asimptotică de ordin $p \geq 1$, scopul său fiind obţinerea unor importante proprietăţi pentru funcţiile pseudoaleatoare. Modul de definire a funcţiei $\mathfrak{M}^p$-aproape periodice ne-a sugerat introducerea noţiunii de funcţie $\mathfrak{M}^p$ asimptotic aproape periodică.

În Nota de faţă ne propunem să ne ocupăm de această clasă a funcţiilor $\mathfrak{M}^p$-asimptotic aproape periodice.

După precizarea în § 1 a unor noţiuni cu caracter general, Nota cuprinde două secţiuni.

În § 2 se introduce noţiunea de funcţie $\mathfrak{M}^p$-asimptotic aproape periodică, care se caracterizează apoi cu ajutorul normalităţii $\mathfrak{M}^p$-asimptotice ca şi prin intermediul unei proprietăţi de descompunere, rezultatele fiind sintetizate în teorema 2.6.

În baza acestei importante teoreme se trece în § 3 la studiul unor proprietăţi topologice ale spaţiului funcţiilor $\mathfrak{M}^p$-asimptotic aproape periodice. Pentru anumite noţiuni şi proprietăţi cu caracter general, legate de funcţiile aproape periodice a se vedea [2] şi [5].

§ 1. Fie R — mulţimea numerelor reale; R_α — semidreapta $x \geq \alpha$; C — mulţimea numerelor complexe; $L^p([\alpha, T])$ unde $p \geq 1$, — spaţiul vectorial normat al funcţiilor cu valori complexe, p-integrabile pe intervalul $[\alpha, T]$.

Vom nota prin $\mathfrak{M}^p_\alpha$ spaţiul vectorial al funcţiilor $f \in L^p([\alpha, T])$ pentru orice $T \in R_\alpha$ aşa încît

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left[\limsup_{T \to \infty} \frac{1}{T-\alpha} \int_\alpha^T |f(t)|^p dt\right]^{1/p} < +\infty. \tag{1}$$

Dacă $p = \infty$ atunci prin $\mathfrak{M}_\alpha^\infty$ vom înţelege spaţiul funcţiilor pentru care

$$\|f\|_{\infty,\alpha} = \limsup_{T\to\infty} \|f\|_{L^\infty([\alpha,T])} = \|f\|_{L^\infty([\alpha,\infty))} < +\infty. \tag{2}$$

Vom conveni să indentificăm două funcţii din $\mathfrak{m}_\alpha^p$ care diferă printr-o funcţie $f \in \mathfrak{M}_\alpha^p$ pentru care $\|f\|_{p,\alpha} = 0$. In modul acesta spaţiul vectorial $\mathfrak{M}_\alpha^p$ devine un spaţiu normat în raport cu norma (1). Datorită relaţiei (2), spaţiul $\mathfrak{M}_\alpha^\infty$ se identifică cu spaţiul $L^\infty([\alpha,+\infty))$ al tuturor funcţiilor esenţial mărginite pe semidreapta R_α.

Vom nota prin $f_\tau(x) = f(x+\tau)$ o transformată prin translaţie a funcţiei $f \in \mathfrak{M}_\alpha^p$ care aparţine lui $\mathfrak{M}_{\alpha-\tau}^p$.

Din modul în care s-au definit normele (1) şi (2) rezultă imediat următoarele

Proprietăţi:

(1.1) Norma definită prin (1) este invariantă la translaţii în sensul că $\|f_\tau\|_{p,\alpha} = \|f\|_{p,\alpha+\tau}$

(1.2) Dacă α_1, α_2 sînt două numere reale astfel încît $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$ iar $f \in \mathfrak{M}_{\alpha_1}^p$, atunci are loc:

$$\|f\|_{p,\alpha_2} \leqslant \|f\|_{p,\alpha_1} \tag{3}$$

pentru orice $p \geqslant 1$, făcînd în acelaşi timp convenţia că dacă $f \in \mathfrak{M}_\alpha^p$ atunci prin $f \in \mathfrak{M}_\beta^p$ cu $\beta \geqslant \alpha$ vom înţelege că este vorba de restricţia lui f la semidreapta R_β.

§2. În această secţiune vom introduce noţiunile de funcţie $\mathfrak{M}^p$-asimptotic aproape periodică (prescurtat $\mathfrak{M}^p$-a.a.p.) şi de funcţie $\mathfrak{M}^p$-asimptotic normală ca generalizări naturale ale noţiunilor clasice de funcţie asimptotic normală.

După ce vom exprima proprietatea de $\mathfrak{M}^p$-aproape periodicitate asimptotică a unei funcţii cu ajutorul ε-reţelelor (teorema 2.4) vom caracteriza această noţiune pe de o parte cu ajutorul $\mathfrak{M}^p$-normalităţii asimptotice iar pe de altă parte cu ajutorul unei proprietăţi de descompunere analogă celei din [4], rezultatele din urmă fiind sintetizate în teorema 2.6.

Definiţia 2.1. *Spunem că o funcţie $f \in \mathfrak{M}_\alpha^p$ este o funcţie continuă în medie asimptotică de ordin p dacă are loc relaţia:*

$$\|f_\tau - f\|_{p,\alpha'} \to 0 \text{ cînd } \tau \to 0 \text{ pentru fiecare } \alpha' > \alpha. \tag{4}$$

Vom nota prin $\mathfrak{M}_{c,\alpha}^p$ subspaţiul lui $\mathfrak{M}_\alpha^p$ al tuturor funcţiilor continue în medie asimptotică de ordin p.

Din definiţia 2.1 rezultă imediat următoarea

Lema 2.2. *Fie $f \in \mathfrak{M}_{c,\alpha}^p$. Dacă $[\gamma,\delta]$ este un interval compact oarecare atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ şi orice $\beta > \max\{\alpha-\gamma, \alpha\}$ există un număr finit de elemente $s_i \in [\gamma,\delta]$ astfel încît pentru orice $a \in [\gamma,\delta]$ să corespundă măcar un s_j pentru care să avem*

$$\|f_a - f_{s_j}\|_{p,\beta} < \varepsilon. \tag{5}$$

Demonstraţie. Dacă $f \in \mathfrak{M}_{c,\alpha}^p$ atunci în baza relaţiei (4) şi a proprietăţilor (1.1) şi (1.2), rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ şi $\beta > \max\{\alpha-\gamma, \alpha\}$ există $\eta > 0$ aşa încît

$$\|f_a - f_{a'}\|_{p,\beta} < \varepsilon \text{ pentru } |a - a'| < \eta. \tag{6}$$

Dar pentru $[\gamma,\delta]$ există $s_i \in [\gamma,\delta]$ în număr finit aşa încît dacă $a \in [\gamma,\delta]$ există un s_j pentru care să avem $|a - s_j| < \eta$ ceea ce antrenează conform cu (6) relaţia (5).

Definiţia 2.3. *Se spune că o funcţie $f \in \mathfrak{M}_{c,\alpha}^p$ este $\mathfrak{M}^p$-asimptotic aproape periodică dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $L > 0$ şi un număr $\beta \geqslant \alpha$ aşa încît orice interval de lungime L al semidreptei $R_{\alpha-\beta}$ să conţină măcar un punct τ pentru care să avem:*

$$\|f_\tau - f\|_{p,\beta} < \varepsilon. \tag{7}$$

Ţinînd seama de proprietatea de continuitate în medie asimptotică de ordin p, se constată cu uşurinţă că în definiţia dată $R_{\alpha-\beta}$ poate fi înlocuită cu o semidreaptă fixă R_γ luînd bineînţeles $\beta \geqslant \alpha - \gamma$. În acest fel satisfacerea definiţiei cu un anumit β atrage satisfacerea ei cu atît mai mult pentru fiecare $\beta' \geqslant \beta$. În virtutea proprietăţii de invarianţă (1.1) numărul β poate fi ţinut fix. Din toate aceste observaţii rezultă următoarea definiţie echivalentă a $\mathfrak{M}^p$-aproape periodicităţii asimptotice:

Definiţia 2.3. *O funcţie $f \in \mathfrak{M}_{c,\alpha}^p$ este $\mathfrak{M}^p$-asimptotic aproape periodică dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există numerele $L > 0$, $\beta > \alpha$ şi $\gamma \geqslant \alpha - \beta$ aşa încît orice interval de lungime L al semidreptei R_γ să conţină măcar un punct τ pentru care să avem relaţia (7).*

Utilizînd lema 2.2 putem da o caracterizare simplă a funcţiilor $\mathfrak{M}^p$-asimptotic aproape periodice cu ajutorul ε-reţelelor.

Teorema 2.4. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca o funcţie $f \in \mathfrak{M}_{c,\alpha}^p$ să fie $\mathfrak{M}^p$-asimptotic aproape periodică este ca pentru o semidreaptă arbitrară R_γ, oricare ar fi $\varepsilon > 0$ să existe un număr $\beta > \alpha$ şi o n-uplă de numere reale $\{s_i; i = 1,2,..n\}$ astfel încît oricare ar fi $a \in R_\gamma$ să existe măcar un $s_j \in R_\gamma$ aşa încît:*

$$\|f_a - f_{s_j}\|_{p,\beta} < \varepsilon. \tag{8}$$

Demonstraţie. Să arătăm mai întîi că această condiţie este necesară. În adevăr, dacă $f \in \mathfrak{M}_{c,\alpha}^p$ este o funcţie $\mathfrak{M}^p$-a.a.p. atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $L > 0$ şi $\beta > \alpha$ astfel încît orice interval al semidreptei $R_{\alpha-\beta}$

de lungime L să conţină măcar un punct τ pentru care să avem (7) cu ε înlocuit prin $\varepsilon/2$.

Fie a un punct arbitrar al semidreptei R_γ. Fără a restrînge generalitatea, putem presupune ţinînd seama de lema 2.2 că $[a-L, a] \subset R_{\alpha-\beta}$. Atunci datorită faptului că f este $\mathfrak{M}^p$-a.a.p. rezultă că există măcar un element $\tau \in [a-L, a]$ pentru care să avem (7). Fie $a_0 = a - \tau$, adică $a_0 \in [0, L]$. De aici rezultă:

$$\|f_{a_0} - f_a\|_{p,\beta} < \varepsilon/2. \tag{9}$$

Pe de altă parte cum $f \in \mathfrak{M}^p_{c,\alpha}$ conform lemei 2.2 rezultă că există n numere reale $\{s_i; i = 1, 2, .. n\}$ aparţinînd intervalului $[0, L]$ aşa încît pentru $a_0 \in [0, L]$ să avem:

$$\inf_{1 \leq i \leq n} \|f_a - f_{s_i}\|_{p,\beta} < \varepsilon/2. \tag{10}$$

pentru β ales ca mai sus. În sfîrşit combinînd (10) cu (9) rezultă relaţia (8).

Reciproc, să presupunem că $f \in \mathfrak{M}^p_{c,\alpha}$ are proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\{s_i; i = 1, 2, .. n\}$ şi un număr $\beta > \alpha$ aşa încît pentru orice $a \in R_\gamma$ să existe măcar un s_j pentru care să avem (8). Fie $L = 2 \max_{1 \leq i \leq n} |s_i|$. Să arătăm acum că orice interval al lui R_γ de lungime L conţine măcar un element τ pentru care să avem (7). Să notăm prin $\mathcal{J}$ un interval arbitrar al lui R_γ de lungime L şi prin a mijlocul său. Atunci conform condiţiei din enunţ rezultă că există un j_0 astfel încît să avem (8). Luînd $\tau = a - s_{j_0}$ se observă că $\tau \in \mathcal{J}$ iar din proprietatea (1.1) a normei rezultă

$$\|f_\tau - f\|_{p,\beta - s_{j_0}} = \|f_a - f_{s_{j_0}}\|_{p,\beta} < \varepsilon,$$

ceea ce antrenează $\mathfrak{M}^p$-aproape periodicitatea asimptotică a lui f conform cu definiţia 2.3, unde β este substituit prin $\max\{\beta - s_i\}$.

Observaţie. Utilizînd invarianţa normei se constată cu uşurinţă că numerele s_i ale ε-reţelei pot fi luate pe orice semidreaptă dorim.

Să introducem acum noţiunea de funcţie $\mathfrak{M}^p$-asimptotic normală.

Definiţia 2.5. *Spunem că o funcţie $f \in \mathfrak{M}^p_{c,\alpha}$ este o funcţie $\mathfrak{M}^p$-asimptotic normală dacă din orice şir $\{h_n\}$ convergent la $+\infty$ se poate extrage un subşir $\{h'_n\}$ astfel încît şirul corespunzător al translatelor lui f, $\{f_{h'_n}\}$ să fie convergent în norma (1) pe orice semidreaptă R_γ.*

Să notăm prin $\mathfrak{P}^p_\alpha$ mulţimea tuturor funcţiilor $\mathfrak{M}^p$-a.a.p. definite pe o aceeaşi semidreaptă R_α $(1 \leq p \leq +\infty)$. Spaţiul $\mathfrak{P}^\infty_\alpha$ va fi atunci spaţiul tuturor funcţiilor care coincid aproape peste tot cu funcţii numerice asimptotic aproape periodice în sens Fréchet.

Acum vom demonstra următoarea teoremă principală care conţine două proprietăţi caracteristice pentru funcţiile $\mathfrak{M}^p$-a.a.p.

Teorema 2.6. *Fie $f \in \mathfrak{M}^p_{c,\alpha}$. Următoarele trei condiţii sînt echivalente:*

I. $f \in \mathfrak{P}^p_\alpha$ $(1 \leq p \leq +\infty)$

II. *f este $\mathfrak{M}^p$-asimptotic normală,*

III. *f poate fi reprezentată în mod unic sub forma:*

$$f(x) = \Psi(x) + \omega(x), \tag{11}$$

egalitatea avînd loc aproape peste tot pe R_α unde Ψ este o funcţie $\mathfrak{M}^p$-aproape periodică în sensul definiţiei 1 din [1], cap. VII, p. 69 iar $\omega \in \mathfrak{M}^p_{c,\alpha}$ are proprietatea că $\lim_{\beta \to \infty} \|\omega\|_{p,\beta} = 0$.

Demonstraţie. Să arătăm mai întîi că I. antrenează II.

Dacă $f \in \mathfrak{P}^p_\alpha$ atunci din teorema 2.4 rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\beta > \alpha$ şi o n-uplă de numere reale $\{s_i; i = 1, 2, ... n\}$ astfel încît dacă $a \in R_\gamma$ să existe măcar un s_j pentru care să aibă loc relaţia (8). Dar pe de altă parte se observă imediat că această proprietate se conservă la translaţii şi deci numerele s_i pot fi luate pe o semidreaptă fixă R_α. Fie acum $\{h_n\}$ un şir arbitrar care tinde la $+\infty$. Atunci pentru $\varepsilon = 1/2$ şi β fixat conform teoremei 2.4 există o $1/2$ reţea finită cu puncte din R_β şi deci vom găsi atunci un subşir $\{h_{n1}\}$ al lui $\{h_n\}$ comparabil cu un acelaşi element s_{i_0} al $1/2$ reţelei, pentru care să avem:

$$\|f_{h_{n1}} - f_{s_{i_0}}\|_{p,\beta} < 1/2,$$

de unde rezultă

$$\|f_{h_{n1}} - f_{h_{m1}}\|_{p,\beta} < 1. \tag{11'}$$

Dacă acum vom aplica raţionamentul de mai sus şirului $\{h_{n1}\}$ cu $\varepsilon = 1/2^2$ vom găsi un subşir $\{h_{n2}\}$ al lui $\{h_{n1}\}$ aşa încît

$$\|f_{h_{n2}} - f_{h_{m2}}\|_{p,\beta} < 1/2. \tag{12}$$

Prin recurenţă se găseşte un şir de şiruri $\{h_{nj}\}$ în care $\{h_{nj}\}$ este un subşir al lui $\{h_{nj-1}\}$ pentru care avem:

$$\|f_{h_{nj}} - f_{h_{mj}}\|_{p,\beta} < 1/2^{j-1} \tag{13}$$

pentru $j = 1, 2, ...$ şi $m > n$.

Se observă deci că şirul $\{f_{h_{nn}}\}$ corespunzător şirului diagonal $\{h_{nn}\}$ este convergent în $\mathfrak{M}^p_\beta$ întrucît are loc:

$$\|f_{h_{nn}} - f_{h_{mm}}\|_{p,\beta} < 1/2^{n-2} \tag{14}$$

pentru $m > n$ şi orice β fixat.

Să arătăm acum că din şirul $\{h_{nn}\}$ se poate extrage un subşir astfel ca şirul corespunzător al translatelor lui f să fie convergent în $\mathfrak{M}^p_\gamma$ pentru orice γ.

Se observă imediat că e suficient de demonstrat această proprietate pentru orice semidreaptă R_γ unde γ este un număr întreg negativ. Să notăm prin $h'_n = h_{nn}$. Fie $\{h'_{n1}\}$ subşirul lui $\{h'_n\}$ pentru care $\{f_{h'_{n1}}\}$ să conveargă în $\mathfrak{M}^p_{-1}$, $\{h'_{n2}\}$ subşirul lui $\{h'_{n1}\}$ pentru care $\{f_{h'_{n2}}\}$ să conveargă în $\mathfrak{M}^p_{-2}$. Prin recurenţă se găseşte subşirul $\{h'_{nm}\}$ al lui $\{h'_{nm-1}\}$ pentru care $\{f_{h'_{nm}}\}$ să fie convergent în $\mathfrak{M}^p_{-m}$. Să notăm acum prin $l_n = h'_{nn}$. Se observă că $\{f_{l_n}\}$ este convergent în orice $\mathfrak{M}^p_{-m}$ datorită consideraţiilor de mai sus, fapt care antrenează convergenţa în orice $\mathfrak{M}^p_\gamma$.

Demonstraţia faptului că II. antrenează I. o vom face prin reducere la absurd. Dacă $f \in \mathfrak{M}^p_{c,\alpha}$ îndeplineşte II. fără a îndeplini I. rezultă atunci că există un $\varepsilon > 0$ aşa încît pentru orice $L > 0$ şi orice număr $\beta > \alpha$, fiecare interval de lungime L al semidreptei R_β să nu conţină puncte τ cu proprietatea (7). Fie $I'_1 = I_{1,1}$ intervalul corespunzător lui $L = 1$ şi $\beta = \alpha + 1$ şi h_1 un punct oarecare din I'_1. Fie h_2 astfel ales încît $h_2 - h_1 \in I'_1$. Apoi considerăm un alt interval I'_2 aşa încît lungimea sa $\tau_{12} > 2(h_2 - h_1)$. În acest interval luăm un punct h_3 aşa ca $h_3 - h_1$, $h_3 - h_2 \in I'_2$. Prin recurenţă se obţine un şir de intervale I'_n şi un şir de numere $\{h_n\}$ pozitive aşa încît $h_{n+1} - h_1$ $h_{n+1} - h_2 \ldots, h_{n+1} - h_n \in I'_n$ şi lungimea $\tau_{in} > \max 2(h_i - h_j)$ pentru $i, j = 1, 2 \ldots n + 1$. Dar atunci avem:

$$\|f_{h_i} - f_{h_j}\|_{p,\beta} = \|f_{h_i - h_j} - f\|_{p,\beta} > \varepsilon \tag{15}$$

datorită faptului că diferenţele $h_i - h_j$ au fost alese astfel încît să nu poată coincide cu un număr de tip τ. Relaţia (15) ne spune însă că f nu este $\mathfrak{M}^p$-asimptotic normală, fapt ce contrazice II. Deci f este $\mathfrak{M}^p$-asimptotic aproape periodică.

Să arătăm acum că I. antrenează III. În adevăr dacă $f \in \mathfrak{M}^p_{c,\alpha}$ este $\mathfrak{M}^p$-a.a.p. atunci f este $\mathfrak{M}^p$-asimptotic normală deci dacă $\{l_n\}$ este un şir tinzînd la ∞ atunci există un subşir al său $\{l'_n\}$ aşa încît şirul corespunzător al translatelor $\{f_{l'_n}\}$ să conveargă în $\mathfrak{M}^p_\beta$. Fie Ψ funcţia limită (în sensul convergenţei în norma (1) a şirului $\{f_{l'_n}\}$; evident această funcţie este definită pe R şi în plus avem:

$$\|f_{l'_n} - \Psi\|_{p,\beta} < \varepsilon \tag{16}$$

pentru orice $\beta \in R$. Să arătăm că Ψ este o funcţie $\mathfrak{M}^p$-aproape periodică în sensul definiţiei 1 din [1] (Cap. VII, Teor. 1). Conform definiţiei 2.3, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $L > 0$ şi $\beta > \alpha$ aşa încît orice interval al semidreptei $R_{\alpha,\beta}$ să conţină măcar un τ pentru care să avem (7). Dar cum $\{l'_n\}$

este un şir convergent la ∞ rezultă din (7) în baza proprietăţii (1.1) de invarianţă că pe semidreapta $R_{\alpha-\beta-l'_n}$ are loc relaţia:

$$\|f_{l'_n} - f_{l'_n+\tau}\|_{p,\beta} < \varepsilon. \tag{17}$$

Datorită convergenţei la ∞ a şirului $\{l'_n\}$ se observă că β poate fi ales arbitrar şi atunci trecînd la limită în (17) şi folosind în acelaşi timp (16) obţinem:

$$\|\Psi - \Psi_\tau\|_p < \varepsilon \tag{18}$$

ceea ce asigură $\mathfrak{M}^p$-aproape periodicitatea lui Ψ.

Fie $\{\varepsilon_n\}$ un şir de numere pozitive convergent la 0. Conform definiţiei 2.3 pentru orice $\varepsilon_n > 0$ există $L(\varepsilon_n) > 0$ şi $\beta_n > \alpha$ aşa încît fiecare interval $(n, n + L(\varepsilon_n))$ să conţină măcar un τ_n pentru care să avem:

$$\|f_{\tau_n} - f\|_{p,\beta_n} < \varepsilon_n. \tag{19}$$

Dar cum şirul $\{\tau_n\}$ este un şir convergent la ∞, rezultă că există un subşir $\{\tau'_n\}$ astfel ca şirul corespunzător al translatelor lui f, $\{f_{\tau'_n}\}$ să conveargă la o funcţie Ψ pe orice semidreaptă R_β.

Fie $\eta_n = \|f_{\tau'_n} - \Psi\|_{p,\beta}$ unde β este arbitrar şi $\omega = f - \Psi$. Evident $\omega \in \mathfrak{M}^p_{c,\alpha}$ şi în plus avem conform cu proprietatea (1.2):

$$\begin{aligned} \|\omega\|_{p,\beta+\beta'_n} &= \|f - \Psi\|_{p,\beta+\beta'_n} \leqslant \|f - f_{\tau'_n}\|_{p,\beta+\beta'_n} + \|f_{\tau'_n} - \Psi\|_{p,\beta+\beta'_n} \\ &\leqslant \|f - f_{\tau'_n}\|_{p,\beta'_n} + \|f - \Psi\|_{p,\beta} < \varepsilon'_n + \eta_n. \end{aligned} \tag{20}$$

Cum pentru $n \to \infty$, ε_n şi η_n tind la 0 rezultă că

$$\lim_{\beta \to \infty} \|\omega\|_{p,\beta+\beta'_n} = 0. \tag{21}$$

Deci $f = \Psi + \omega$, unde Ψ este restricţia la R_α a unei funcţii $\mathfrak{M}^p$-aproape periodice iar $\omega \in \mathfrak{M}^p_{c,\alpha}$ cu proprietatea că norma sa din $\mathfrak{M}^p_\beta$ tinde la 0 pentru $\beta \to \infty$. Unicitatea descompunerii (11) rezultă imediat din [1], Cap. VII, Teor. II.

În sfîrşit să arătăm că III. antrenează I. Fie $f \in \mathfrak{M}^p_{c,\alpha}$ pentru care are loc descompunerea (11). Cum Ψ din (11) este restricţia la R_α a unei funcţii $\mathfrak{M}^p$-aproape periodice, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $L > 0$ aşa încît să aibă loc (18). Pe de altă parte, din (20) rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un β suficient de mare astfel ca:

$$\|\omega\|_{p,\beta} < \varepsilon. \tag{22}$$

Din ultimele două afirmaţii rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\beta > \alpha$ şi $L > 0$ aşa încît orice interval al semidreptei $R_{\alpha-\beta}$ de lungime L să conţină măcar un τ pentru care să avem:

$$\|f_\tau - f\|_{p,\beta} \leqslant \|\Psi_\tau - \Psi\|_{p,\beta} + \|\omega\|_{p,\beta} + \|\omega_\tau\|_{p,\beta} < 3\varepsilon$$

ceea ce ne asigură că $f \in \mathfrak{P}^p_\alpha$. Cu aceasta teoremă 2.6 este complet demonstrată.

§ 3. În această secţiune vom pune în evidenţă cîteva proprietăţi importante ale spaţiului tuturor funcţiilor $\mathfrak{M}^p$-asimptotic aproape periodice.

Ţinînd seama de Teorema 2.6 III. vom putea introduce pe spaţiul $\mathfrak{P}^p_\alpha$, al tuturor funcţiilor $\mathfrak{M}^p$-asimptotic aproape periodice definite pe o aceeaşi semidreaptă R_α o a doua normă dată de:

$$f\|_{p,\alpha} = \|\Psi\|_p + \|\omega\|_{p,\alpha}. \tag{23}$$

Urmînd demonstraţia dată de noi în [6] pentru cazul funcţiilor asimptotic aproape periodice în sens Fréchet, avem:

Propoziţia 3.1. *Normele date de* (1) *şi* (23) *sînt echivalente.*

Să notăm prin $\mathfrak{M}^p_{c_0,\alpha}$ spaţiul Banach al funcţiilor continue în norma (1) care tind la 0 pentru $\alpha \to \infty$.

Teorema 3.2. *$\mathfrak{P}^p_\alpha$ este un spaţiu Banach, sumă directă a spaţiilor Banach $\mathfrak{P}^p$ şi $\mathfrak{M}^p_{c_0,\alpha}$.*

$$\mathfrak{P}^p_\alpha = \mathfrak{P}^p + \mathfrak{M}^p_{c_0,\alpha}. \tag{24}$$

Demonstraţie. Afirmaţia acestei teoreme rezultă imediat din (11) ţinînd seama că norma (1) este echivalentă cu norma (23), norma sumei directe a spaţiilor $\mathfrak{P}^p$ şi $\mathfrak{M}^p_{c_0,\alpha}$. Această proprietate dată de teorema 3.2, ne permite să deducem anumite proprietăţi topologice ale spaţiului $\mathfrak{P}^p_\alpha$ din proprietăţile topologice ale spaţiilor componente $\mathfrak{P}^p$ şi $\mathfrak{M}^p_{c_0,\alpha}$. Astfel avem:

Corolarul 3.3. *Un şir $\{f_n\}$ de funcţii $\mathfrak{M}^p$-a.a.p. este convergent în norma* (1) *dacă şi numai dacă şirurile componente $\{\Psi_n\}$ ale părţilor $\mathfrak{M}^p$-aproape periodice şi ale părţilor $\{\omega_n\}$ care tind la 0 pentru $\alpha \to \infty$ sînt convergente.*

Observaţie. Dacă se defineşte funcţia $\Phi_{\alpha\beta}: \mathfrak{P}^p_\alpha \to \mathfrak{P}^p_\beta$ prin $\Phi_{\alpha\beta}(f) = g$, în care $g = f_{\alpha-\beta}$ atunci rezultă că între spaţiile $\mathfrak{P}^p_\alpha$ şi $\mathfrak{P}^p_\beta$ s-a stabilit un izomorfism izometric.

Fie $\mathcal{A}^p = \bigcup_{\alpha \in R} \mathfrak{P}^p_\alpha$. Atunci pe $\mathcal{A}^p$ se poate introduce o relaţie de echivalenţă ρ definită prin $f \rho g$ dacă şi numai dacă g este o transformată prin translaţie a lui f, fapt care antrenează izomorfismul dintre spaţiul $\mathcal{A}^p/\rho$ şi fiecare spaţiu $\mathfrak{P}^p_\alpha$.

BIBLIOGRAFIE

1. Bertrandias J. P. — *Espaces de functions bornées et continues en moyenne asymptotique d'ordre p.* Bull. Soc. Math. de France, Suppl., mars 1906, Nr. 5.
2. Corduneanu C. — *Almost-periodic functions.* John Wiley, New York, 1968.
3. Fan Ky — *Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques d'une variabile entière et leur application à l'étude de l'itération des transformations continues.* Math. Zts., 3,48 (1942/43), pp. 685—711.
4. Halanay A. — *Introducere în teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1956.
5. Левитан Б. М. — *Почти периодические функции.* Москва, 1963.
6. Precupanu A. — *Fonctions et suites asymptotiquement presque-périodiques avec des valeurs dans un espace de Banach.* An. şt. Univ. Iaşi, t. XV, p. 29—38.

FONCTIONS $\mathfrak{M}^p$-ASYMPTOTIQUEMENT PRESQUE-PÉRIODIQUES

Résumé

Le but de cette Note est d'introduire la notion de fonction $\mathfrak{M}^p$-asymptotiquement presque-périodique. Après quelques considérations à caractère général, dans le § 1, on introduit la notion de fonction $\mathfrak{M}^p$-asymptotiquement presque-périodique et on la caractérise à l'aide de la notion de fonction $\mathfrak{M}^p$-asimptotiquement normale et d'autre part à l'aide d'une propriété de décomposition, les résultats étant synthétisés dans le théorème 2.6. Dans le § 3, on donne certaines propriétés topologiques pour l'espace des fonctions $\mathfrak{M}^p$-asymptotiquement presque-périodiques.